MP 21-22

ENSAI MP 2000 PREMIERE EPREUVE

Eléments de correction

PARTIE I

1. Supposons que $\mathcal{L}(E)$ contienne un projecteur cyclique h. Pour tout $a, a \in E$, on a $h^2(a) = h(a)$, donc un cycle de h est nécessairement de la forme $\{a\}$ ou bien $\{a, h(a)\}$. Comme c'est une partie génératrice de E, il vient $\dim E \leq 2$.
   Réciproquement, si $n = 1$, id_E est cyclique car pour tout vecteur a non nul de E, $C_a^1 = \{a\}$ est un cycle de id_E.
   Si $n = 2$, et si (e_1, e_2) est une base de E, la projection sur vect $(e_1 + e_2)$ parallèlement à vect (e_2) est cyclique car admet pour cycle $\{e_1, f(e_1)\}$ ($Vect\left(C_{e_1}^2\right) = E$ car $(e_1, f(e_1))$ est une base de E, $f(e_1) \neq e_1$ et $f\left(C_{e_1}^2\right) \subset C_{e_1}^2$ car $f^2(e_1) = f(e_1) = e_1 + e_2$).
   En conclusion les valeurs de n cherchées sont $\boxed{n = 1 \text{ et } n = 2}$.

2. (a) $*$ La partie $C_{e_1}^n = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ est un cycle de f, car vect $\left(C_{e_1}^n\right) = E$, card $\left(C_{e_1}^n\right) = n$ et $f\left(C_{e_1}^n\right) = \{e_2, e_3, ..., e_n\}$ et ainsi $f\left(C_{e_1}^n\right) \subset C_{e_1}^n$.
   $*$ $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)) = \mathrm{rg}(e_2, e_3, \ldots, e_n) = n - 1$.
   $*$ La matrice A étant triangulaire, on a $\chi_A(X) = X^{n-1}(X-1)$, donc le spectre de f est $\{0, 1\}$.
   On a $\dim E_1(f) = 1$, car 1 est valeur propre simple, et $\dim E_0(f) = 1$ d'après le théorème du rang.
   Or f est diagonalisable si, et seulement si, $\dim E_1(f) + \dim E_0(f) = \dim E$ donc si, et seulement si, $\boxed{n = 2}$.

   (b) $*$ La partie $C_{e_1}^{n+1} = \left\{e_1, e_2, \ldots, e_n, -\sum\limits_{i=1}^{n} e_i\right\}$ est un cycle de g.
   En effet, vect $\left(C_{e_1}^{n+1}\right) = E$, puisque $\mathcal{B}$ engendre E ; card $\left(C_{e_1}^{n+1}\right) = n + 1$ et $g\left(C_{e_1}^{n+1}\right) = \left\{e_2, e_3, ..., e_n, -\sum\limits_{i=1}^{n} e_i, e_1\right\}$ et ainsi $g\left(C_{e_1}^{n+1}\right) \subset C_{e_1}^{n+1}$, puisque $g\left(-\sum\limits_{i=1}^{n} e_i\right) = -e_2 - \cdots - e_n - g(e_n) = e_1$.
   $*$ On a $g^{n+1}(e_1) = e_1$ donc, pour tout élément x de la partie génératrice $C_{e_1}^{n+1}$, on a $g^{n+1}(x) = x$ et par suite $g^{n+1} = \mathrm{id}_E$.
   Le polynôme $X^{n+1} - 1$, annulateur de g, est scindé à racines simples, donc $\boxed{g \text{ est diagonalisable}}$.
   Comme 0 n'est pas racine de ce polynôme, 0 n'est pas valeur propre de g, donc g est inversible et $\boxed{\mathrm{rg}\, g = n}$.

3. (a) Si C_a^p est un cycle de f, c'est une partie génératrice à p éléments dans un espace vectoriel de dimension n, donc $\boxed{p \geq n}$.

   (b) Si $\mathrm{rg}(f) \leq n - 2$, alors $\dim \mathrm{vect}\left(f(a), f^2(a), \ldots, f^{p-1}(a)\right) \leq n - 2$, donc $\dim \mathrm{vect}\left(C_a^p\right) \leq n - 1$ ce qui est contraire à vect $\left(C_a^p\right) = E$. Donc $\boxed{rg(f) \geq n - 1}$.

4. (a) L'existence de m est assurée par le fait que E est de dimension finie. On peut remarquer $m \leqslant n$. Démontrons le résultat demandé par récurrence. A tout entier naturel k on associe le prédicat $\mathcal{P}(k) : f^k(a) \in \text{vect}(\mathcal{F})$.

   * Par définition de m, la famille $\mathcal{F}$ est libre et en rajoutant le vecteur $f^m(a)$, on obtient la famille liée $\left(a, f(a), f^2(a), ..., f^{m-1}(a), f^m(a)\right)$. Par conséquent $f^m(a) \in \text{vect}(\mathcal{F})$ et la propriété $\mathcal{P}(m)$ est vraie.
   * Soit k un entier naturel supérieur ou égal à m tel que la propriété $\mathcal{P}(k)$ soit vraie. Montrons $\mathcal{P}(k+1)$.
     Alors $f^{k+1}(a) \in \text{vect}\left(f(a), f^2(a), \ldots, f^m(a)\right)$ et alors $f^{k+1}(a) \in \text{vect}(\mathcal{F})$ puisque $f^m(a) \in \text{vect}(\mathcal{F})$. La propriété $\mathcal{P}(k+1)$ est donc vraie.

   En conclusion $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ k \geq m \Longrightarrow f^k(a) \in \text{vect}(\mathcal{F})}$.

   (b) Le (a) implique $\text{vect}\left(\{f^k(a) \mid k \in \mathbb{N}\}\right) \subset \text{vect}(\mathcal{F})$ et par suite $\text{vect}(C_a^p) \subset \text{vect}(\mathcal{F})$, d'où $E = \text{vect}(\mathcal{F})$. La famille $\mathcal{F}$ est donc libre et génératrice de E ; par suite $\boxed{\mathcal{F} \text{ est une base de } E \text{ et } m = n}$.

   (c) Soit $Q \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$, $Q = \sum_{k=0}^{n-1} b_k X^k$. Si Q est un polynôme annulateur de f on a notamment $Q(f)(a) = 0$ ce qui s'écrit $\sum_{k=0}^{n-1} b_k f^k(a) = 0$.
   La famille $\mathcal{F}$ étant libre cette relation impose $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $b_k = 0$ ou encore $Q = 0$.
   Par conséquent le polynôme minimal $\prod_f$ de f est de degré supérieur ou égal à n.
   Selon le théorème de Cayley-Hamilton $\prod_f$ divise P_f. Comme P_f est de degré égal à n et ces deux polynômes sont unitaires, on a bien $\prod_f = P_f$.

5. On suppose de plus f bijectif. On a $f^p(a) \in C_a^p$ car $f(C_a^p) \subset C_a^p$.
S'il existait $j, j \in [\![1, p-1]\!]$, tel que $f^p(a) = f^j(a)$ on aurait alors $f\left(f^{p-1}(a) - f^{j-1}(a)\right) = 0$ avec $f^{p-1}(a) - f^{j-1}(a) \neq 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse $\text{Ker}(f) = \{0\}$. Donc $\boxed{f^p(a) = a}$.

6. Supposons f cyclique d'ordre 2. Soit C_e^2 un cycle de f. On sait d'après la question 4.(b) que $(e, f(e))$ est une base de $\mathbb{C}^2$.
Or par définition on a $f^2(e) \in \{e, f(e)\}$ c'est-à-dire $f^2(e) = e$ ou $f^2(e) = f(e)$. Considérons chacun de ces deux cas :
• $f^2(e) = e$: alors f admet comme polynôme annulateur le polynôme $X^2 - 1$, scindé à racines simples. Ainsi f est diagonalisable et n'ayant pas la valeur propre 1 a pour seule valeur propre -1 : on doit donc avoir $f = -\text{id}_{\mathbb{C}^2}$ ce qui n'est visiblement pas le cas.
• $f^2(e) = f(e)$: alors f admet comme polynôme annulateur le polynôme $X^2 - X$, scindé à racines simples. Ainsi f est diagonalisable et n'ayant pas la valeur propre 1 a pour seule valeur propre 0 : on doit donc avoir $f = 0$ ce qui n'est visiblement pas le cas.

En conclusion un endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ vérifiant ces hypothèses n'est jamais cyclique.

7. Soient $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ dont la matrice dans la base canonique est égale à $R(\theta)$. On a $\det f = 1$, d'où $f \in \mathcal{GL}(E)$.
On a de plus $\chi_f(X) = X^2 - 2\cos\theta\, X + 1 = \left(X - e^{i\theta}\right)\left(X - e^{-i\theta}\right)$. Les valeurs propres de f sont donc les nombres complexes $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$.

Supposons f cyclique d'ordre p et notons C_a^p un cycle de f. Selon la question 5. on doit avoir $f^p(a) = a$. Or la matrice de f^p dans la base canonique est $R(p\theta)$, dont les valeurs propres sont $e^{ip\theta}$ et $e^{-ip\theta}$. L'égalité précédente impliquant que 1 est valeur propre de f^p on en déduit $p\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$ ou encore $\theta \in 2\pi\mathbb{Q}$.

Réciproquement supposons $\theta \in 2\pi\mathbb{Q}$. Il existe un couple (M,p), $(M,p) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, tel que $\theta = 2\pi\dfrac{M}{p}$ et $M \wedge p = 1$. On fixe le couple (M,p) et on remarque que l'on a $p \geqslant 2$, car $\theta \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$. Posons alors $a = (1,0)$.

On a $f(a) = (\cos\theta, \sin\theta)$ et ayant $\sin\theta \neq 0$ le couple $(a, f(a))$ est une base de $\mathbb{C}^2$. A fortiori le système $\left(a, f(a), \ldots, f^{p-1}(a)\right)$ est générateur. Posons $C_a^p = \left\{a, f(a), \ldots, f^{p-1}(a)\right\}$. Ayant $f^p = \mathrm{id}_E$ l'ensemble C_a^p est clairement stable par f. Pour conclure il reste à vérifier que les vecteurs $a, f(a), \ldots, f^{p-1}(a)$ sont deux à deux distincts. Or étant donnés k, ℓ appartenant à $[\![0, p-1]\!]$, on a

$$\begin{aligned} f^k(a) = f^\ell(a) &\iff k\theta \equiv \ell\theta\,[2\pi] \\ &\iff M(k-\ell) \equiv 0\,[p] \\ &\iff (k-\ell) \equiv 0\,[p] \end{aligned}$$

la dernière équivalence étant due à ce que M et p sont premiers entre eux. Or ayant $-(p-1) \leqslant k-\ell \leqslant p-1$ ceci impose $k = \ell$. Par conséquent les vecteurs $a, f(a), \ldots, f^{p-1}(a)$ sont deux à deux distincts. Ainsi l'endomorphisme f de $\mathbb{C}^2$ est cyclique.

En conclusion une condition nécessaire et suffisante pour que f soit cyclique est $\theta \in 2\pi\mathbb{Q}$.

PARTIE II

1. (a) D'après I 5., on a $f^p(a) = a$. On en déduit
$$\forall j \in [\![0, p-1]\!],\ f^p\left(f^j(a)\right) = f^j\left(f^p(a)\right) = f^j(a)$$
Donc f^p et id_E coïncident sur les vecteurs de la partie génératrice C_a^p ce qui entraîne leur égalité, ou encore $\boxed{f^p = \mathrm{id}_E}$.
f annule le polynôme scindé à racines simples $X^p - 1$ donc, par théorème, $\boxed{f \text{ est diagonalisable}}$.

   (b) Comme $X^p - 1$ est un polynôme annulateur, il s'agit d'un multiple du polynôme minimal $\prod_f$ de f.
D'autre part, supposant l'existence d'un élément k de $[\![1, p-1]\!]$ tel que χ_f (ou $\prod_f$) divise $X^k - 1$, alors $X^k - 1$ serait un polynôme annulateur de f et on aurait $f^k = \mathrm{id}_E$ et par suite $f^k(a) = a$, ce qui serait contraire à $\mathrm{card}\left(C_a^p\right) = p$. D'où le résultat demandé.

2. Réciproquement soit f, $f \in GL(E)$, tel que P_f divise $X^p - 1$ et $p = \min\left\{k \in \mathbb{N}^* \mid P_f \text{ divise } X^k - 1\right\}$.

   (a) Le polynôme $X^p - 1$ étant scindé à racines simples, il en est de même de P_f. Etant donné une valeur propre λ de f, c'est-à-dire une racine de P_f, λ est aussi une racine de $\prod_f$. Comme les racines de P_f sont simples, le polynôme P_f divise le polynôme $\prod_f$.
De plus, selon le théorème de Cayley-Hamilton, le polynôme $\prod_f$ divise P_f.
Ces deux polynômes étant unitaires, on a donc $\prod_f = P_f$.

   (b) Comme on vient de le signaler, le polynôme P_f est scindé à racines simples : on sait alors, selon le cours, que f est diagonalisable.

(c) Soit $(v_1,\dots,v_n)$ une base vecteurs propres de f. Pour tout élément i de $[\![1,n]\!]$ notons λ_i la valeur propre de f associée à v_i, c'est-à-dire $f(v_i)=\lambda_i\, v_i$; selon ce qui précède les nombres complexes $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ sont deux à deux distincts. Soit x un vecteur de E, $x=\sum_{i=1}^{n} x_i\, v_i$, tel que $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $x_i\neq 0$.
Montrons que la famille $\left(x,f(x),\dots,f^{n-1}(x)\right)$ est libre. Soient $b_0,\dots,b_{n-1}$ des nombres complexes tels que $\sum_{k=0}^{n-1} b_k\, f^k(x)=0$: notons alors $Q=\sum_{k=0}^{n-1} b_k X^k$.
On a ainsi (par propriété de polynôme d'endomorphisme)

$$0=\sum_{k=0}^{n-1} b_k\, f^k(x)=Q(f)(x)=\sum_{i=1}^{n} x_i\, Q(f)(v_i)=\sum_{i=1}^{n} x_i\, Q(\lambda_i)\, v_i$$

Les vecteurs $v_1,\dots,v_n$ étant linéairement indépendants on peut écrire

$$\forall i\in[\![1,n]\!],\ Q(\lambda_i)=0$$

Le polynôme Q, de degré inférieur ou égal à $n-1$, a n racines distinctes : ainsi $Q=0$ puis $\forall k\in[\![0,n-1]\!]$, $b_k=0$.
Par conséquent la famille $\left(x,f(x),\dots,f^{n-1}(x)\right)$ est libre.

(d) Notons $C_x^p=\left\{x,f(x),\dots,f^{p-1}(x)\right\}$. Tout d'abord $\left(x,f(x),\dots,f^{n-1}(x)\right)$ est une base de E et, puisque $n\leqslant p$ (car P_f divise X^p-1), C_x^p est une partie génératrice de E.
Ensuite ayant $f^p=\mathrm{id}_E$ (car P_f divise X^p-1), C_x^p est stable par f (selon un argument déjà développé).
Enfin vérifions que les éléments de C_x^p sont deux à deux distincts. Soient k,ℓ appartenant à $[\![0,p-1]\!]$, $\ell\leqslant k$, on a (f est bijective)

$$\begin{aligned} f^k(x)=f^\ell(x) &\iff f^{k-\ell}(x)=x\\ &\iff \forall j\in[\![0,n-1]\!],\ f^{k-\ell}\left(f^j(x)\right)=f^j(x)\\ &\iff f^{k-\ell}=\mathrm{id}_E \end{aligned}$$

(car $\left(x,f(x),\dots,f^{n-1}(x)\right)$ est une base de E).
Ainsi

$$f^k(x)=f^\ell(x)\iff \prod\nolimits_f \text{ divise } X^{k-\ell}-1$$

L'hypothèse vérifiée par P_f, c'est-à-dire par $\prod_f$, permet d'écrire

$$f^k(x)=f^\ell(x)\iff p\leqslant k-\ell$$

Ayant $k,\ell\in[\![0,p-1]\!]$, a bien

$$f^k(x)=f^\ell(x)\iff k=\ell$$

Ainsi les éléments de C_x^p sont deux à deux distincts.
En conclusion f est cyclique et C_x^p est un cycle.

PARTIE III

1. (a) Comme f est cyclique, selon I 3.(b) on $\mathrm{rg}(f)\geq n-1$, d'où $\mathrm{rg}(f)=n-1$, puisque f n'est pas inversible. Le théorème du rang donne alors $\boxed{\dim\operatorname{Ker} f=1}$.

(b) Supposons $f^p(a) = a$: alors pour tout vecteur x de la partie génératrice C_a^p on a $f^p(x) = x$ ce qui entraîne $f^p = \mathrm{id}_E$ et donc f est inversible, ce qui est exclu par hypothèse. Donc $\boxed{f^p(a) \neq a}$.

(c) Soit j appartenant à $[\![1, p-1]\!]$ tel que $f^p(a) = f^j(a)$: on a, pour tout vecteur x de la partie génératrice C_a^p, $f^p(x) = f^j(x)$, ce qui entraîne $\boxed{f^p = f^j}$.

(d) D'après (c), $X^p - X^j$ est un polynôme annulateur de f et ainsi P_f divise $X^p - X^j$ $\left(= X^j\left(X^{p-j} - 1\right)\right)$. Par conséquent il existe un polynôme Q, Q divisant $X^{p-j} - 1$, et un élément j_1 de $[\![0, j]\!]$ tel que $P_f = X^{j_1} Q(X)$.
Supposant $j_1 < j$, on aurait $f^{p-j+j_1} - f^{j_1} = 0$, puis $f^{p-j+j_1}(a) = f^{j_1}(a)$ avec $p - j + j_1$ et j_1 éléments distincts de $[\![0, p-1]\!]$ ce qui est contraire à la propriété $\mathrm{card}\left(C_a^p\right) = p$.
Donc $\boxed{\chi_f = X^j Q(X) \text{ où } Q \text{ divise } X^{p-j} - 1}$.

2. Si Q est un polynôme constant, alors $j = n$ (car $\deg(P_f) = n$) et $Q = 1$.
Comme $P_f = \prod_{f}$, $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$. En considérant un vecteur x, $x \notin \mathrm{Ker}\left(f^{n-1}\right)$, la partie C_x^n est un cycle de f car :

* $f\left(C_x^n\right) = \left\{f(x), f^2(x), \ldots, f^{n-1}(x)\right\}$ et ainsi $f\left(C_x^n\right) \subset C_x^n$.
* Supposons la famille $\left(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{n-1}(x)\right)$ liée : il existe une famille $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1})$ de scalaires non tous nuls tels que $y = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k(x) = 0$. Soit $p = \min\{k \in [\![0, n-1]\!] \mid \alpha_k \neq 0\}$. Ayant $f^{n-1-p}(y) = \alpha_p f^{n-1}(x) = 0$, avec $f^{n-1}(x) \neq 0$, on en déduit $\alpha_p = 0$, ce qui est contradictoire avec la définition de p. Donc la famille $\left(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{n-1}(x)\right)$ est libre et comme elle a n éléments, c'est une base de E. Par suite $\mathrm{vect}\left(C_x^n\right) = E$ et $\mathrm{card}\left(C_x^n\right) = n$.

3. (a) Le polynôme P_f est un diviseur du polynôme $X^j\left(X^q - 1\right)$, qui est donc un polynôme annulateur de f (théorème de Cayley-Hamilton). Comme les polynômes X^j et $X^q - 1$ sont premiers entre eux le lemme des noyaux permet alors d'écrire
$$E = \mathrm{Ker}\, f^j \oplus \mathrm{Ker}\left(f^q - \mathrm{id}_E\right)$$

(b) Si U est un polynôme on sait, d'après le cours, que $\mathrm{Ker}\, U(f)$ est un sous-espace vectoriel de E stable par f (à savoir redémontrer le jour voulu). Notamment les deux sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 sont stables par f.

4. (a) Ayant $E_2 = \mathrm{Ker}\left(f^q - \mathrm{id}_E\right)$ on a $\forall x \in E_2$, $f^q(x) = x$ ce qui signifie $f_2^q = \mathrm{id}_{E_2}$.
Selon le cours (il suffit d'écrire la matrice de f dans une base de E adaptée à la décomposition en somme directe $E = E_1 \oplus E_2$) on a $P_f = P_{f_1} P_{f_2}$. Ainsi P_{f_2} divise $X^j\left(X^q - 1\right)$ et f_2 étant inversible n'a pas pour valeur propre 0 ce qui signifie que P_{f_2} est premier avec X.
Comme $f_1^j = 0$, 0 est la seule valeur propre de f_1 et par suite $P_{f_1} = X^{\dim E_1}$. Par conséquent, on a $P_{f_1} = X^j$ et donc $\dim E_1 = j$, puis $\boxed{P_{f_2} = Q}$.
Donc P_{f_2} divise $X^q - 1$ sans diviser $X^k - 1$ avec $k < q$ ce qui entraîne, d'après II 2., que $\boxed{f_2 \text{ est cyclique d'ordre } q}$.

(b) Soit $C_{a_2}^q$ un cycle de f_2. On a

$$\left\{f^j(a_2), f^{j+1}(a_2), \ldots, f^{j+q-1}(a_2)\right\} = \left\{f_2^j(a_2), f_2^{j+1}(a_2), \ldots, f_2^{j+q-1}(a_2)\right\} = f_2^j\left(C_{a_2}^q\right) = C_{a_2}^q$$

car $f_2^j\left(C_{a_2}^q\right) \subset C_{a_2}^q$ et f_2 est bijective (propriété des ensembles finis).

Donc $\boxed{\left\{f^j(a_2), f^{j+1}(a_2), \ldots, f^{j+q-1}(a_2)\right\} \text{ engendre } E_2}$.

5. (a) $\dim E_1 = j$ a déjà été démontré dans la question 4.(a).

   (b) Si on suppose $f_1^{j-1} = 0$ alors $X^{j-1}Q(X)$ annule f (car les restrictions de $f^{j-1} \circ Q(f)$ à E_1 et E_2 sont nulles), ce qui est contraire à l'égalité $\prod_f = X^jQ(X)$. Par conséquent on a $\boxed{f_1^{j-1} \neq 0}$.

   (c) Ainsi f_1 est un endomorphisme de E_1 et $\prod_{f_1} = P_{f_1} = X^j 1$. Il suffit d'appliquer le résultat de la question 2. pour conclure que f_1 est un endomorphisme cyclique de E_1 d'ordre j.

6. Notons $a = a_1 + a_2$. On a $C_a^{j+q} = \left\{a_1 + a_2, ..., f^{j-1}(a_1) + f^{j-1}(a_2)\ ,\ f^j(a_2), ..., f^{j+q-1}(a_2)\right\}$.

   * Soit $x \in E$. Comme $E = E_1 \oplus E_2$, et d'après 4. et 5., il existe une famille de scalaires $(b_0, \ldots, b_{j+q-1})$ tels que $x = \sum_{k=0}^{j-1} b_k f^k(a_1) + \sum_{k=j}^{j+q-1} b_k f^k(a_2)$. Comme $\left\{f^j(a_2), f^{j+1}(a_2), ..., f^{j+q-1}(a_2)\right\} = C_{a_2}^q$ et $\forall k \in [\![0, j-1]\!]$, $f^k(a_1) = \left(f^k(a_1) + f^k(a_2)\right) - f^k(a_2)$, x s'écrit alors :

   $$x = \sum_{k=0}^{j-1} b_k \left(f^k(a_1) + f^k(a_2)\right) + \sum_{k=j}^{j+q-1} b'_k f^k(a_2)$$

   et ainsi $\operatorname{vect}\left(C_a^{j+q}\right) = E$.

   * On a de plus $f\left(C_a^{j+q}\right) \subset C_a^{j+q}$, car $f^{q+j}(a) = f^{q+j}(a_2) = f^j(a_2) = f^j(a)$.

   * Enfin on a $\left(\operatorname{card} C_a^{j+q}\right) = q + j$, car les j premiers termes sont distincts ainsi que les q derniers. En outre s'il existe un élément k de $[\![0, j-1]\!]$ et un élément u de $[\![j, j+q-1]\!]$ tels que $f^k(a) = f^u(a)$, alors on obtient aisément $\forall x \in C_a^{j+q}$, $\left(f^k - f^u\right)(x) = 0$, ce qui entraîne $f^k - f^u = 0$ et par suite $X^k - X^u = X^k\left(X^{u-k} - 1\right)$ serait multiple de $\prod_f = X^jQ$, ce qui est exclu car $k < j$.

   En conclusion, $\boxed{C_a^{j+q} \text{ est un cycle de } f}$.

7. Pour cet exemple, le calcul donne $P_f(X) = X^2(X - j)$. De plus on a (théorème de Cayley-Hamilton) $P_f(f) = 0$ et on vérifie qu'aucun diviseur de P_f n'annule f donc $P_f = \prod_f$. On est donc dans le cadre des hypothèses précédentes avec $j = 2$ et $q = 3$.
$E_1 = \operatorname{Ker}\left(f^2\right)$ est le plan d'équation $x_1 + x_2 + jx_3 = 0$ et, notant $a_1 = (-j, 0, 1)$, $(a_1, f(a_1))$ est une base de $\operatorname{Ker}\left(f^2\right)$. $E_2 = \operatorname{Ker}(f - j\,\mathrm{id}_E) = \operatorname{vect}(a_2)$ avec $a_2 = (0, 0, 1)$.
En prenant $\boxed{a = a_1 + a_2 = (-j, 0, 2) \quad C_a^5 \text{ est un cycle de } f}$.

CORRIGÉ

Exercice I : Informatique

I.1. La fonction suivante répond à la question :

```
def gcd(a,b):
    r = min(a,b)
    for i in range(1,r+1):
        if a%i == 0 and b%i == 0:
            d = i
    return d
```

I.2. La fonction récursive suivante calcule le pgcd de deux entiers naturels selon l'algorithme d'Euclide :

```
def euclide_rec(a,b):
    if b == 0:
        return a
    else:
        return euclide_rec(b,a%b)
```

I.3.a. Quand on calcule le pgcd de F_6 et F_5 avec la fonction `euclide`, on effectue successivement les divisions euclidiennes suivantes :

$$8 = 1\times5+3, \quad 5 = 1\times3+2, \quad 3 = 1\times2+1, \quad 2 = 2\times1+0.$$

I.3.b. D'après le résultat admis, on a $0 \leqslant F_2 \leqslant F_n < F_{n+1}$, donc la relation $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ montre que F_n est le reste de la division euclidienne de F_{n+2} par F_{n+1}. Par suite, la fonction `euclide` réalise $u_n = n$ divisions euclidiennes successives pour calculer le pgcd de F_{n+2} et F_{n+1}.

I.3.c. Puisque $F_{n+2} > F_{n+1}$, la fonction `gcd` réalise $v_n = 2F_{n+1}$ divisions euclidiennes pour calculer le pgcd de F_{n+2} et F_{n+1}. D'après le résultat admis,

$$\frac{u_n}{v_n} \sim \frac{\sqrt{5}\,n}{2\,\varphi^{n+1}}.$$

Puisque $\varphi > 1$, il vient

$$u_n = o(v_n).$$

I.4. La fonction suivante réalise le calcul du n^{e} nombre de Fibonacci :

```
def fibo(n):
    if n == 0:
        return 0
    a = 0
    b = 1
    for i in range(1,n):
        (a,b) = (b,a+b)
    return b
```

I.5. Par associativité du pgcd, la fonction suivante réalise le calcul du pgcd de trois entiers naturels :

```
def gcd_trois(a,b,c):
    return euclide(euclide(a,b),c)
```

Exercice II

II.1. Le polynôme $P := X^3 + X^2 + X = X(X-j)(X-j^2)$ annule A, donc les valeurs propres complexes de A sont parmi ses racines 0, j et j^2.

II.2. Comme P est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$, la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

II.3. Supposons A inversible. Ainsi, 0 n'est pas valeur propre de A, si bien que $\mathrm{sp}(A) \subset \{j,j^2\}$. Les racines du polynôme caractéristique de A sont donc parmi j et j^2. Comme A est à coefficients réels, χ_A l'est aussi, et j et $\overline{j} = j^2$ ont donc même multiplicité, notée p, comme racines de χ_A. Ainsi,

$$\det A = j^p\, \overline{j}^p = (j\overline{j})^p = 1^p = 1.$$

Problème III

III.1.a. On suppose que P et Q ne sont pas premiers entre eux. Ils admettent alors un diviseur commun R non constant. D'après le théorème de d'Alembert & Gauss, R possède une racine complexe, qui est alors racine commune de P et Q.

Par contraposition, si P et Q n'ont aucune racine complexe commune, alors ils sont premiers entre eux.

III.1.b. Supposons que P et Q divisent un polynôme R. Écrivons $R = PR_1$ pour un certain $R_1 \in \mathbb{C}[X]$. Alors, Q divise PR_1 et est premier avec P, donc Q divise R_1 par le théorème de Gauss. Écrivant $R_1 = QR_2$ pour un $R_2 \in \mathbb{C}[X]$, on a donc $R = PQR_2$. Ainsi, PQ divise R.

III.2. Pour $k \in [\![1,n]\!]$, posons $R_k := \prod_{i=1}^{k} P_i$ et $Q_k := \dfrac{R_k'}{R_k}$, et démontrons par récurrence finie

$$H_k : \text{« } Q_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{P_i'}{P_i}. \text{ »}$$

La propriété H_1 est évidente. Soit $k \in [\![1,n-1]\!]$ tel que H_k soit vraie. Par dérivation d'un produit, on a alors

$$\frac{R_{k+1}'}{R_{k+1}} = \frac{R_k'\, P_{k+1} + R_k\, P_{k+1}'}{R_k\, P_{k+1}} = \frac{R_k'}{R_k} + \frac{P_{k+1}'}{P_{k+1}},$$

et donc, en utilisant l'hypothèse de récurrence,

$$\frac{R'_{k+1}}{R_{k+1}} = \Big(\sum_{i=1}^{k} \frac{P'_i}{P_i}\Big) + \frac{P'_{k+1}}{P_{k+1}} = \sum_{i=1}^{k+1} \frac{P'_i}{P_i}.$$

Ainsi, H_{k+1} est vraie.

Par récurrence finie, H_n est vérifiée, ce qu'il fallait démontrer.

III.3.a. Supposons $P(a) = P'(a) = 0$.
Choisissons un entier naturel n supérieur ou égal à la fois au degré de P et à 2. La formule de Taylor pour les polynômes s'écrit donc

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k = \sum_{k=2}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k = (X-a)^2 R,$$

pour $R := \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^{k-2}$, ce qui montre que $(X-a)^2$ divise P.

III.3.b. D'abord, φ est bien une fonction de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{2p-1}[X]$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{2p}$. Par linéarité de la dérivation, elle est linéaire. En effet, pour tous P et Q dans $\mathbb{R}_{2p-1}[X]$ et tout réel λ,

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P + Q) &= \big((\lambda P+Q)(x_1), \dots, (\lambda P+Q)(x_p), (\lambda P+Q)'(x_1),\\ &\qquad\qquad \dots, (\lambda P+Q)'(x_p)\big)\\ &= \big(\lambda P(x_1) + Q(x_1), \dots, \lambda P(x_p) + Q(x_p), \lambda P'(x_1) + Q'(x_1),\\ &\qquad\qquad \dots, \lambda P'(x_p) + Q'(x_p)\big)\\ &= \lambda\,\varphi(P) + \varphi(Q).\end{aligned}$$

Montrons enfin que φ est injective. Soit $P \in \operatorname{Ker}\varphi$. D'après **III.3.a**, les polynômes $(X-x_k)^2$ divisent tous P. Par récurrence, nous montrons pour tout $k \in [\![1,p]\!]$ que le polynôme $Q_k := \displaystyle\prod_{i=1}^{k}(X-x_i)^2$ divise P. En effet :

- ce résultat est connu au rang 1 ;
- pour tout $k \in [\![1,p-1]\!]$, les polynômes Q_k et $(X-x_{k+1})^2$ sont premiers entre eux, d'après **III.1.a** (ils n'ont pas de racine commune puisque les x_i sont deux à deux distincts), et donc si Q_k divise P, on déduit alors de **III.1.b** que $Q_{k+1} = Q_k \times (X-x_{k+1})^2$ le divise aussi.

En particulier, ce résultat est valable au rang p. Si P n'était pas nul, on en déduirait par comparaison des degrés que $2p \leqslant \deg P$, ce qui est faux.

Ainsi, φ est injective. Comme $\mathbb{R}_{2p-1}[X]$ et $\mathbb{R}^{2p}$ sont tous deux de même dimension finie $2p$, l'application linéaire φ est un isomorphisme.

III.3.c. La liste $(a_1,\dots,a_p,b_1,\dots,b_p) \in \mathbb{R}^{2p}$ possède un unique antécédent par la bijection φ, ce que traduit le résultat exigé.

III.4. On écrit $P_H = aX^3 + bX^2 + cX + d = 0$, où $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$. Par retour à la définition de P_H, on obtient donc le système d'égalités suivant :

$$\begin{cases} -a+b-c+d=1 \\ a+b+c+d=0 \\ 3a-2b+c=-1 \\ 3a+2b+c=2. \end{cases}$$

Résolvant ce système à la calculatrice, on obtient

$$P_H = \frac{1}{2}X^3 + \frac{3}{4}X^2 - X - \frac{1}{4}.$$

III.5.a. De manière immédiate, pour tout $k \in [\![1,p]\!]$,

$$Q_i(x_k) = \delta_{i,k}.$$

Pour tout $k \in [\![1,p]\!] \setminus \{i\}$, on voit que Q_i est divisible par $(X - x_k)^2$, et donc, d'après le cours, $Q_i'(x_k) = 0$. Enfin, en appliquant **III.2** aux polynômes $P_j := \dfrac{(X-x_j)^2}{(x_i-x_j)^2}$, pour j dans $[\![1,p]\!] \setminus \{i\}$, on trouve

$$\frac{Q_i'}{Q_i} = \sum_{j\in[\![1,p]\!]\setminus\{i\}} \frac{P_j'}{P_j} = \sum_{j\in[\![1,p]\!]\setminus\{i\}} \frac{2(X-x_j)}{(X-x_j)^2} = \sum_{j\in[\![1,p]\!]\setminus\{i\}} \frac{2}{X-x_j}.$$

Comme x_i est distinct de tous les x_j, pour $j \in [\![1,p]\!] \setminus \{i\}$, il n'est pôle d'aucune des fractions dans cette égalité, et donc par substitution,

$$Q_i'(x_i) = \frac{Q_i'(x_i)}{Q_i(x_i)} = \sum\nolimits_{j\in[\![1,p]\!]\setminus\{i\}} \frac{2}{x_i-x_j}.$$

III.5.b. Soit $i \in [\![1,p]\!]$. Posons

$$R_i := \big(1 - Q_i'(x_i)(X-x_i)\big)\, a_i + (X-x_i)\, b_i$$

et notons que

$$R_i(x_i) = a_i \quad \text{et} \quad R_i'(x_i) = -Q_i'(x_i)\, a_i + b_i.$$

Pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, le polynôme R_i est de degré au plus 1, alors que Q_i est de degré $2p-2$, donc $\deg(R_iQ_i) \leqslant 2p-1$. Par addition, $P \in \mathbb{R}_{2p-1}[X]$.

Évaluons maintenant $\varphi(P)$. Soit $i \in [\![1,n]\!]$, D'après le calcul précédent,

$$P(x_i) = \sum\nolimits_{j=1}^{p} R_j(x_i)\, Q_j(x_i) = R_i(x_i) = a_i$$

et

$$P'(x_i)=\sum_{j=1}^{p}\big(R_j'(x_i)\,Q_j(x_i)+R_j(x_i)\,Q_j'(x_i)\big)=R_i'(x_i)+R_i(x_i)Q_i'(x_i)=b_i.$$

Ainsi, P est le polynôme d'interpolation d'Hermite recherché.

III.5.c. Reprenons les données de **III.4**. Ici,

$$Q_1=\frac{(X-1)^2}{4}\quad\text{et}\quad Q_2=\frac{(X+1)^2}{4}$$

et $Q_1'(x_1)=-1$. En appliquant la formule de **III.5.b**, on trouve donc

$$P=\big((1+(X+1))+(X+1)\times(-1)\big)\,\frac{(X-1)^2}{4}+(X-1)\times 2\times\frac{(X+1)^2}{4},$$

ce qui donne, après développement brutal,

$$P=\frac{1}{2}\,X^3+\frac{3}{4}\,X^2-X-\frac{1}{4}.$$

C'est le résultat obtenu en **III.4**.

III.6. Montrons, par récurrence sur n, l'énoncé

P_n : « Le polynôme H_n est unitaire de degré n. »

La propriété P_0 est immédiate, car $H_0=1$.
Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que P_n soit vraie. Alors,

$$\deg(H_n')<n\quad\text{et}\quad\deg(XH_n)=n+1>\deg(H_n'),$$

donc par soustraction $\deg(H_{n+1})=n+1$, et le coefficient dominant de H_{n+1} est celui de XH_n. Ce dernier est le produit des coefficients dominants respectifs de X et H_n, à savoir 1. Par suite, P_{n+1} est vraie.

Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$, le polynôme H_n est unitaire de degré n.

III.7. Montrons le résultat par récurrence sur n. Comme H_1 est unitaire de degré 1 et $H_0=1$, on a bien $H_1'=H_0$.

Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $H_{n+1}'=(n+1)H_n$. Alors, $H_{n+1}''=(n+1)H_n'$, et donc

$$\begin{aligned}H_{n+2}'&=H_{n+1}+XH_{n+1}'-H_{n+1}''\\&=H_{n+1}+(n+1)XH_n-(n+1)H_n'\\&=H_{n+1}+(n+1)H_{n+1}=(n+2)\,H_{n+1}.\end{aligned}$$

Ainsi, nous avons établi par récurrence

$$\forall n\in\mathbb{N},\ H_{n+1}'=(n+1)\,H_n.$$

III.8.a. Fixons $R \in \mathbb{R}[X]$ et montrons l'existence de $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} R(t)\, f(t)\, \mathrm{d}t$, ce qui répondra à la question en appliquant ce résultat au polynôme PQ.

En posant $n := \max(0, \deg R)$, on sait que $R(x) = O_{x\to\pm\infty}(x^n)$. Or, par croissances comparées

$$u^{\frac{n+2}{2}} e^{-u} \underset{u\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

d'où, par substitution,

$$\frac{|x|^{n+2}}{2^{\frac{n+2}{2}}} e^{-\frac{x^2}{2}} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par suite,

$$R(x)\, f(x) = o_{x\to\pm\infty}\big(x^{-2}\big).$$

La fonction $x \mapsto R(x)f(x)$ étant évidemment continue sur $\mathbb{R}$, cela prouve qu'elle est intégrable sur $\mathbb{R}$.

III.8.b. La fonction $\langle - \mid - \rangle$ est évidemment symétrique, autrement dit

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2,\ \langle Q \mid P \rangle = \langle P \mid Q \rangle.$$

Pour établir qu'elle est bilinéaire, il suffit donc de montrer sa linéarité à gauche. Un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ étant fixé, on a pour tous P_1 et P_2 dans $\mathbb{R}[X]$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\langle \lambda P_1 + P_2 \mid Q \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \big(\lambda P_1(x) + P_2(x)\big)\, Q(x)\, f(x)\, \mathrm{d}x \\
&= \lambda \int_{\mathbb{R}} P_1(x)\, Q(x)\, f(x)\, \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}} P_2(x)\, Q(x)\, f(x)\, \mathrm{d}x \\
&= \lambda \langle P_1 \mid Q \rangle + \langle P_2 \mid Q \rangle.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\langle - \mid - \rangle$ est bilinéaire.

Soit enfin $P \in \mathbb{R}[X]$. La fonction $x \mapsto P(x)^2 f(x)$ est évidemment positive sur $\mathbb{R}$, donc, par intégration, $\langle P \mid P \rangle \geqslant 0$. Supposons $\langle P \mid P \rangle = 0$. La fonction $x \mapsto P(x)^2 f(x)$ étant continue et positive sur $\mathbb{R}$, d'intégrale nulle sur $\mathbb{R}$, elle est identiquement nulle. La fonction f ne s'annulant pas, on trouve $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = 0$. Le polynôme P est nul puisqu'ayant une infinité de racines.

Ainsi, $\langle - \mid - \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

III.9.a. Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété

R_n : « $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \langle P \mid H_n \rangle = \langle P^{(n)} \mid H_0 \rangle$. »

La propriété est clairement vraie au rang $n = 0$.

Soit $n \geqslant 0$ tel que R_n soit vraie. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Les fonctions

$$u : t \mapsto -H_n(t)f(t) \quad \text{et} \quad v : t \mapsto P(t)$$

sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Vu l'expression de f, nous avons, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$u'(t)\,v(t) = \big(tH_n(t) - H_n'(t)\big)\,f(t) \quad \text{et} \quad u(t)\,v'(t) = -H_n(t)\,P'(t)\,f(t).$$

En intégrant par parties, il vient donc

$$\int_{\mathbb{R}} u'(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t = \big[u(t)\,v(t)\big]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t,$$

la validité de la formule étant garantie par l'existence des deux intégrales, qui découle de **III.8.a**. Enfin, avec la méthode ayant servi à établir **III.8.a**, on trouve

$$u(t)\,v(t) = -H_n(t)\,P(t)\,f(t) \underset{t\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi, par retour à la définition de H_{n+1},

$$\langle P \mid H_{n+1}\rangle = \langle P' \mid H_n\rangle.$$

L'hypothèse de récurrence appliquée à P' donne donc

$$\langle P \mid H_{n+1}\rangle = \langle (P')^{(n)} \mid H_0\rangle = \langle P^{(n+1)} \mid H_0\rangle.$$

Ainsi, R_{n+1} est validée.

Ce raisonnement par récurrence montre que R_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

III.9.b. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'abord, **III.6** montre que $(H_0,\dots,H_n)$ est bien une famille de vecteurs de $\mathbb{R}_n[X]$. Elle est libre, car constituée de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts. Comme elle possède $n+1$ vecteurs et que $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$, c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Montrons qu'elle est orthogonale : soit i et j dans $[\![0,n]\!]$ tels que $i < j$. Alors, $H_i^{(j)} = 0$ car $j > i = \deg H_i$, et la question précédente donne donc

$$\langle H_i \mid H_j\rangle = \big\langle (H_i)^{(j)} \mid H_0\big\rangle = 0.$$

Ainsi, $(H_0,\dots,H_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

III.9.c. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme H_n est unitaire de degré n, on a $H_n^{(n)} = n!$. Ainsi, par **III.9.a**,

$$\|H_n\|^2 = \langle H_n \mid H_n\rangle = \langle n! \mid H_0\rangle = n!\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = n!.$$

Par positivité de la norme, il vient

$$\|H_n\| = \sqrt{n!}.$$

III.9.d. L'utilisation de la relation de récurrence définissant les polynômes d'Hermite donne successivement $H_1 = X$, $H_2 = X^2 - 1$ et $H_3 = X^3 - 3X$. On obtient alors, par divisions euclidiennes successives, l'expression

$$P = H_3 + H_2 + 4H_1 + 2H_0.$$

Le polynôme $R := H_3 + H_2 + 4H_1$ est orthogonal à H_0, d'après **III.9.c**, donc orthogonal à tout vecteur de $\mathbb{R}_0[X] = \mathrm{Vect}(H_0)$. Ainsi, le projeté orthogonal de P sur $\mathbb{R}_0[X]$ est $Q := 2H_0$, si bien que $P - Q = R$. Or, d'après le cours, $d^2 = \|P-Q\|^2$. Par orthogonalité de (H_1, H_2, H_3) et **III.9.c**, il vient

$$\|R\|^2 = \|H_3\|^2 + \|H_2\|^2 + 16\,\|H_1\|^2 = 6 + 2 + 16 = 24,$$

et donc

$$d = 2\sqrt{6}.$$

III.10. Nous considérons que $a_1, \dots, a_p$ sont les racines de H_n d'ordre impair (**voir les commentaires en fin de corrigé**).

III.10.a. Supposons $p < n$. Le polynôme S est de degré p, et $(H_0, \dots, H_p)$ est une base de $\mathbb{R}_p[X]$, donc S est une combinaison linéaire de ces polynômes. Comme $p < n$, les polynômes $H_0, \dots, H_p$ sont tous orthogonaux à H_n, et S l'est donc également.

III.10.b. Notons $b_1, \dots, b_q$ les racines réelles (distinctes) d'ordre pair de H_n, et $2r_1, \dots, 2r_q$ leurs ordres de multiplicité respectifs. Les ordres de multiplicité respectifs de $a_1, \dots, a_p$ sont notés $2s_1+1, \dots, 2s_p+1$. Par décomposition en facteurs irréductibles, nous disposons, comme H_n est unitaire, d'un polynôme $R \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ H_n(x) = \prod_{k=1}^{p} (x - a_k)^{2s_k+1} \prod_{k=1}^{q} (x - b_k)^{2r_k}\, R(x)$$

et tel que R soit le produit d'une famille (éventuellement vide) de polynômes irréductibles unitaires de degré 2 de $\mathbb{R}[X]$, tous positifs sur $\mathbb{R}$. Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ S(x)\, H_n(x) = \prod_{k=1}^{p} (x - a_k)^{2s_k+2} \prod_{k=1}^{q} (x - b_k)^{2r_k}\, R(x) \geqslant 0$$

puisque tous les exposants apparents sont pairs.

III.10.c. Supposons $p < n$. Alors, **III.10.a** montre que $x \mapsto S(x)\, H_n(x)\, f(x)$ est d'intégrale nulle sur $\mathbb{R}$. Or, cette fonction est positive vu **III.10.b**, et évidemment continue. Elle est donc identiquement nulle. Comme en **III.8.a**, on en déduirait $SH_n = 0$, ce qui est faux car les polynômes S et H_n sont non nuls. Ainsi, $p \geqslant n$. En particulier, H_n possède au moins n racines distinctes. Comme il est de degré n, il admet exactement n racines réelles distinctes (et celles-ci sont simples).

COMMENTAIRES

Le préambule du problème indiquait, de manière erronée, que les deux premières parties étaient indépendantes, alors qu'en réalité c'est la troisième qui était indépendante des deux précédentes.

Le sujet imposait implicitement de faire abstraction du théorème de factorisation à l'aide de plusieurs racines, dont nous rappelons de suite l'énoncé.

> Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$. Soit $a_1,\ldots,a_r$ des éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts, et $n_1,\ldots,n_r$ des entiers naturels. On suppose que a_i est d'ordre au moins n_i comme racine de P, et ce pour tout $i \in [\![1,r]\!]$. Alors, P est divisible par $\displaystyle\prod_{i=1}^{r}(X-a_i)^{n_i}$.

Il convenait aussi de faire abstraction de la décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$, résultat qui figure au programme : en effet, sans cela on ne voit pas bien l'intérêt de la question **III.2**.

En **III.4**, il était indiqué que le candidat pouvait utiliser sa calculatrice pour inverser une matrice : comme la résolution d'un système est moins coûteuse qu'une telle inversion, il était légitime d'utiliser la calculatrice pour résoudre directement le système plutôt que d'inverser sa matrice.

Nous avons conservé la faute d'orthographe d'origine en **III.10**, car elle tient de l'erreur d'énoncé. Il fallait lire « on note $a_1,\ldots,a_p$ ces racines » et non « on note $a_1,\ldots,a_p$ ses racines ». Il était facile de repérer cette erreur compte tenu de la définition de p.

Comme indiqué dans l'énoncé, la deuxième et la troisième partie du problème n'avaient aucun rapport entre elles sinon leur parenté avec Charles Hermite. Les polynômes d'interpolation d'Hermite généralisent les polynômes interpolateurs de Lagrange : on se donne une liste $(x_1,\ldots,x_p)$ de scalaires deux à deux distincts, et, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, un entier naturel $n_i > 0$. Le théorème d'interpolation d'Hermite garantit alors que pour toute famille $(y_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant p,\ 0\leqslant j<n_i}$ de scalaires il existe un unique polynôme P de degré strictement inférieur à $\sum_{i=1}^{p} n_i$ tel que

$$\forall i \in [\![1,p]\!],\ \forall j \in [\![0,n_i-1]\!],\ P^{(j)}(x_i) = y_{i,j}.$$

Dans le cas particulier considéré dans l'énoncé, tous les n_i sont égaux à 2.

Les polynômes de la partie **III** sont quant à eux un cas particulier de polynômes orthogonaux. Rappelons brièvement les grandes lignes de la théorie des polynômes orthogonaux : on se donne une forme linéaire $\varphi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ telle que $\varphi(P) > 0$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]\setminus\{0\}$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0$.

La fonction $(P,Q) \mapsto \varphi(PQ)$ est alors un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. Le procédé d'orthonormalisation de Schmidt, appliqué à la base canonique $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$, fournit une base orthonormée $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ telle que $\mathrm{Vect}(Q_0,\ldots,Q_n) = \mathrm{Vect}(X^0,\ldots,X^n) = \mathbb{R}_n[X]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors, Q_n est systématiquement de degré n, et l'on note P_n son normalisé au sens des polynômes. Ainsi, $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}[X]$ pour le produit scalaire précédent, et P_n est unitaire de degré n pour tout entier n. Ici, la forme linéaire φ est $R \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} R(t)\, e^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t$, et $P_n = H_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La méthode de **III.10** permet de démontrer que P_n est systématiquement scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.

THÉORÈMES UTILISÉS

- **Théorème 2, p.** 281. Théorème de d'Alembert & Gauss
- **Théorème 3, p.** 281. Théorème de Gauss pour les polynômes
- **Théorème 4, p.** 281. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$

Math II PSI 2017

MP 21-22

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Eléments de correction

1. Si les deux endomorphismes u et $-u$ de E sont semblables, par propriétés de la trace (dont la linéarité), on a
$$\operatorname{tr}(u) = \operatorname{tr}(-u) = -\operatorname{tr}(u)$$
et ainsi $\operatorname{tr}(u) = 0$.

2. On peut effectuer un calcul matriciel "à la main" ou utiliser le théorème de Cayley-Hamilton car, en dimension 2, tenant compte de l'hypothèse $\operatorname{tr}(u) = 0$, on a
$$\chi_u = X^2 - \operatorname{tr}(u)\,X + \det(u) = X^2 + \det(u)$$
Selon le théorème de Cayley-Hamilton, $0 = \chi_u(u) = u^2 + \det(u)\operatorname{id}_E$ et ainsi $u^2 = -\det(u)\operatorname{id}_E = \delta^2 \operatorname{id}_E$.
Comme, par hypothèse, $\delta \neq 0$, χ_u a deux racines distinctes δ et $-\delta$. Comme $\dim E = 2$, on en déduit que u est diagonalisable et que ses deux sous-espaces propres sont des droites vectorielles.

3. Notons (e_1, e_2) une base de E constituée de vecteurs propres de u ainsi que $D = \mathbb{C}(e_1 + e_2)$. Alors D est une droite vectorielle de E qui n'est pas stable par u, puisqu'elle n'est pas engendrée par un vecteur propre de u.
Ensuite, en posant $D' = u(D)$, comme on a $u^2 = \delta^2 \operatorname{id}_E$, u est un automorphisme de E donc D' est une droite vectorielle de E supplémentaire de D dans E et qui vérifie $u(D') = u^2(D) = D$.
En conclusion, u est un endomorphisme échangeur de E.

4. Les formats des blocs constituant la matrice M permettent d'effectuer les calculs de produits matriciels demandés. Un calcul de produit par blocs fournit
$$\begin{pmatrix} 0_n & B \\ 0_{p,n} & 0_p \end{pmatrix}^2 = 0_{n+p} \qquad \begin{pmatrix} 0_n & 0_{n,p} \\ A & 0_p \end{pmatrix}^2 = 0_{n+p}$$
Comme $M = \begin{pmatrix} 0_n & B \\ 0_{p,n} & 0_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0_n & 0_{n,p} \\ A & 0_p \end{pmatrix}$, M apparaît comme la somme de deux matrices de carré nul.

5. La matrice D est diagonale par blocs, ce qui permet de calculer aisément son déterminant et
$$\det D = (-1)^p$$
En outre, on reconnaît en D une matrice de symétrie et ainsi $D^2 = I_{n+p}$, ce qui prouve à nouveau que D est inversible et en outre $D^{-1} = D$. Un calcul de produit matriciel par blocs fournit
$$DMD^{-1} = \begin{pmatrix} I_n & 0_{n,p} \\ 0_{p,n} & -I_p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0_n & B \\ A & 0_p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & 0_{n,p} \\ 0_{p,n} & -I_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_n & B \\ -A & 0_p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & 0_{n,p} \\ 0_{p,n} & -I_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_n & -B \\ -A & 0_p \end{pmatrix} = -M$$
Par conséquent, M est semblable à $-M$.

6. Les vecteurs $u(f_1), u(f_2), \ldots, u(f_n)$ (resp. $u(g_1), u(g_2), \ldots, u(g_p)$) appartiennent à G (resp. à F). Par conséquent la matrice de u dans la base $\mathbf{B}$ est de même forme que la matrice M de la question précédente.

7. (a) Comme rappelle de le faire l'énoncé, commençons par traiter le cas où l'un des deux sous-espaces vectoriels F et G est égal à $\{0\}$. Par symétrie on peut supposer $F = \{0\}$.
Dans ce cas, $G = E$ et puisque $u(G) \subset F$, cela signifie que l'on a $u = 0$.

Il suffit alors de poser $a = b = 0$ pour que la condition $(C2)$ soit satisfaite.
En outre $u = -u$, donc u est semblable à $-u$, ce qui signifie que la condition $(C3)$ est satisfaite.

(b) On se place ici dans le cas $F \neq \{0\}$ et $G \neq \{0\}$. Construisons une base $\mathbf{B}$ de E sur le modèle de celle définie dans la question 6.. En notant $n = \dim F$ et $p = \dim G$, on obtient

$$\exists (A, B) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C}) : \mathrm{mat}_{\mathbf{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0_n & B \\ A & 0_p \end{pmatrix}$$

Définissons alors b, a et s les endomorphismes de E de matrices respectives

$$\begin{pmatrix} 0_n & B \\ 0_{p,n} & 0_p \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0_n & 0_{n,p} \\ A & 0_p \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} I_n & 0_{n,p} \\ 0_{p,n} & -I_p \end{pmatrix}$$

dans la base $\mathbf{B}$. Les calculs matriciels effectués dans la question 5. se traduisent ici par

$$u = a + b \qquad a^2 = b^2 = 0 \qquad s = s^{-1} \qquad s \circ u \circ s^{-1} = -u$$

En conclusion, dans ce cas aussi, les deux conditions $(C2)$ et $(C3)$ sont satisfaites.

8. Soit f un endomorphisme de E vérifiant $f^2 = 0$. On en déduit aisément $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f$: notamment $\mathrm{rg}\, f \leqslant \dim \mathrm{Ker}\, f$.
Ensuite la formule du rang fournit

$$\mathrm{rg}\, f + \dim \mathrm{Ker}\, f = \dim E$$

L'inégalité ci-dessus donne alors $\boxed{\dim E \leqslant 2 \dim \mathrm{Ker}\, f}$.

9. Commençons par vérifier que $\mathrm{Ker}\, a$ et $\mathrm{Ker}\, b$ sont en somme directe. Soit $x \in \mathrm{Ker}\, a \cap \mathrm{Ker}\, b$. Alors

$$u(x) = a(x) + b(x) = 0$$

Comme u est notamment injectif, cela implique $x = 0$. Par conséquent $\mathrm{Ker}\, a$ et $\mathrm{Ker}\, b$ sont en somme directe.
Par propriété d'une somme directe, on a

$$\dim(\mathrm{Ker}\, a \oplus \mathrm{Ker}\, b) = \dim \mathrm{Ker}\, a + \dim \mathrm{Ker}\, b$$

Notamment, $\mathrm{Ker}\, a \oplus \mathrm{Ker}\, b$ étant un sous-espace vectoriel de E, on a $\dim \mathrm{Ker}\, a + \dim \mathrm{Ker}\, b \leqslant \dim E$.
Or, selon la question précédente, a et b étant de carrés nuls, on a $\dim \mathrm{Ker}\, a + \dim \mathrm{Ker}\, b \geqslant \dim E$.
Finalement $\dim \mathrm{Ker}\, a + \dim \mathrm{Ker}\, b = \dim E$ ou encore $\dim(\mathrm{Ker}\, a \oplus \mathrm{Ker}\, b) = \dim E$, dont on déduit (en dimension finie) $\boxed{\mathrm{Ker}\, a \oplus \mathrm{Ker}\, b = E}$.
On en déduit

$$\dim \mathrm{Ker}\, a + \dim \mathrm{Ker}\, b = \dim E \qquad \dim \mathrm{Ker}\, a = \dim \mathrm{Ker}\, b = \frac{\dim E}{2}$$

(ce qui impose à $\dim E$ d'être un entier pair). La formule du rang donne alors

$$\mathrm{rg}\, a = \frac{\dim E}{2} = \dim \mathrm{Ker}\, a \qquad \mathrm{rg}\, b = \frac{\dim E}{2} = \dim \mathrm{Ker}\, b$$

A nouveau par propriété d'endomorphisme de carré nul vue en 8., on a ainsi

$$\mathrm{Im}\, a \subset \mathrm{Ker}\, a \qquad \mathrm{rg}\, a = \dim \mathrm{Ker}\, a$$

puis (en dimension finie) $\boxed{\mathrm{Im}\, a = \mathrm{Ker}\, a}$. Par symétrie, on a aussi $\boxed{\mathrm{Im}\, b = \mathrm{Ker}\, b}$.

10. Vérifions que l'on a $u(\mathrm{Ker}\, a) \subset \mathrm{Ker}\, b$. Soit $x \in \mathrm{Ker}\, a$. On a ainsi

$$u(x) = a(x) + b(x) = b(x)$$

puis

$$b(u(x)) = b^2(x) = 0$$

car $b^2 = 0$. On a donc bien $u(\mathrm{Ker}\, a) \subset \mathrm{Ker}\, b$. Par symétrie, on a de même $u(\mathrm{Ker}\, b) \subset \mathrm{Ker}\, a$.

Ainsi $\operatorname{Ker} a$ et $\operatorname{Ker} b$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E tels que $u(\operatorname{Ker} a) \subset \operatorname{Ker} b$ et $u(\operatorname{Ker} b) \subset \operatorname{Ker} a$. En conclusion, u est un endomorphisme échangeur de E.

11. Soit $k \in \mathbb{N}$. Vérifions l'inclusion $\operatorname{Ker} v^k \subset \operatorname{Ker} v^{k+1}$. Soit $x \in \operatorname{Ker} v^k$.
Par définition, on a $v^k(x) = 0$ puis, par linéarité de v,
$$v^{k+1}(x) = v\left(v^k(x)\right) = v(0) = 0$$
et ainsi $x \in \operatorname{Ker} v^{k+1}$. Par conséquent la suite $\left(\operatorname{Ker} v^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante.

12. Pour tout entier naturel k, $\operatorname{Ker} v^k$ est un sous-espace vectoriel de E, espace vectoriel de dimension finie, donc est aussi de dimension finie majorée par $\dim E$. Ainsi l'ensemble $\left\{\dim \operatorname{Ker} v^k \mid k \in \mathbb{N}\right\}$ est une partie non vide majorée de $\mathbb{N}$, donc admet un plus grand élément q.
Notons $m = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid \dim \operatorname{Ker} v^k = q\right\}$ (dont l'existence est assurée par la définition de q). Par construction, on a
$$\forall k \in \mathbb{N},\ k \geqslant m \Longrightarrow \dim \operatorname{Ker} v^k \leqslant \dim \operatorname{Ker} v^m$$
Or, selon la question précédente, on a aussi $\forall k \in \mathbb{N},\ k \geqslant m \Longrightarrow \operatorname{Ker} v^m \subset \operatorname{Ker} v^k$, ce qui entraîne
$$\forall k \in \mathbb{N},\ k \geqslant m \Longrightarrow \dim \operatorname{Ker} v^m \leqslant \dim \operatorname{Ker} v^k$$
Finalement, on en déduit $\forall k \in \mathbb{N},\ k \geqslant m \Longrightarrow \dim \operatorname{Ker} v^k = \dim \operatorname{Ker} v^m$ puis, par propriété d'espaces vectoriels de dimension finie, on obtient $\forall k \in \mathbb{N},\ k \geqslant m \Longrightarrow \operatorname{Ker} v^k = \operatorname{Ker} v^m$.
Il suffit de poser $p = m$ ou $p = m + 1$, selon que m est pair ou impair, pour définir un entier naturel p pair vérifiant
$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \operatorname{Ker} v^k = \operatorname{Ker} v^p$$
Remarque : l'énoncé ne le mentionne pas, mais on peut imposer à p d'être non nul. Si $p = 0$ convient, cela signifie que v est un automorphisme de E, et on peut alors poser $p = 2$ en conservant la validité du résultat obtenu.

13. Par construction de p, on a $\forall k \in \mathbb{N},\ k \geqslant p \Longrightarrow \operatorname{Ker} v^k = \operatorname{Ker} v^p$. Notamment $\operatorname{Ker} v^{2p} = \operatorname{Ker} v^p$.
Vérifions que $\operatorname{Ker} v^p$ et $\operatorname{Im} v^p$ sont en somme directe. Soit $y \in \operatorname{Ker} v^p \cap \operatorname{Im} v^p$. Par définition, il existe x appartenant à E tel que $y = v^p(x)$. Fixons un tel vecteur x. Alors
$$0 = v^p(y) = v^{2p}(x)$$
Ainsi $x \in \operatorname{Ker} v^{2p}$ et, selon la remarque préliminaire, $x \in \operatorname{Ker} v^p$ ce qui implique $y = 0$. Donc $\operatorname{Ker} v^p \cap \operatorname{Im} v^p = \{0\}$.
En outre la formule du rang donne $\dim(\operatorname{Ker} v^p \oplus \operatorname{Im} v^p) = \dim \operatorname{Ker} v^p + \operatorname{rg} v^p = \dim E$.
Par propriété de sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie, on en déduit
$$\boxed{E = \operatorname{Ker} v^p \oplus \operatorname{Im} v^p = E_\lambda^c(f) \oplus \operatorname{Im} v^p}$$
Comme noyau et image d'un polynôme de f, $E_\lambda^c(f)$ et $\operatorname{Im} v^p$ sont stables par f.

14. On a $\operatorname{Ker} v_{\operatorname{Im} v^p} = \operatorname{Ker} v \cap \operatorname{Im} v^p$ et ainsi (voir remarque finale de la question 12.)
$$\operatorname{Ker} v_{\operatorname{Im} v^p} \subset \operatorname{Ker} v^p \cap \operatorname{Im} v^p \qquad \text{ou encore} \qquad \operatorname{Ker} v_{\operatorname{Im} v^p} = \{0\}$$
Ainsi $v_{\operatorname{Im} v^p}$ est injectif, ce qui signifie que $f_{\operatorname{Im} v^p}$ n'a pas pour valeur propre λ.
On suppose $E_\lambda^c(f) \neq \{0\}$. Par définition de $E_\lambda^c(f)$, le polynôme $(X-\lambda)^p$ est un polynôme annulateur de $f_{E_\lambda^c(f)}$. Donc le polynôme minimal de $f_{E_\lambda^c(f)}$, qui est diviseur de $(X-\lambda)^p$, a pour seule racine λ. Comme les valeurs propres de $f_{E_\lambda^c(f)}$ sont exactement les racines de son polynôme minimal, λ est l'unique valeur propre de $f_{E_\lambda^c(f)}$.

15. Par hypothèse, les deux racines de χ_f dans $\mathbb{C}$ sont λ et μ. Comme $\operatorname{Im} v^p$ est stable par f, $\chi_{f_{\operatorname{Im} v^p}}$ divise χ_f dans $\mathbb{C}[X]$. En outre, selon la question précédente, λ n'est pas racine de $\chi_{f_{\operatorname{Im} v^p}}$. Par conséquent

$$\chi_{f_{\operatorname{Im} v^p}} = (X - \mu)^{\operatorname{rg} v^p}$$

Selon le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_{f_{\operatorname{Im} v^p}}$ est un polynôme annulateur de $f_{\operatorname{Im} v^p}$ et ainsi

$$\forall x \in \operatorname{Im} v^p,\ (f - \mu \operatorname{id}_E)^{\operatorname{rg} v^p}(x) = 0$$

Ainsi $\operatorname{Im} v^p \subset \operatorname{Ker}(f - \mu \operatorname{id}_E)^{\operatorname{rg} v^p}$ puis

$$\operatorname{Im} v^p \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \operatorname{Ker}(f - \mu \operatorname{id}_E)^k \qquad \text{ou encore} \qquad \boxed{\operatorname{Im} v^p \subset E_\mu^c(f)}$$

D'après la question 13., on a $E = E_\lambda^c(f) \oplus \operatorname{Im} v^p$; Par conséquent l'inclusion ci-dessus fournit $E = E_\lambda^c(f) + E_\mu^c(f)$.

Enfin, les deux polynômes $X - \lambda$ et $X - \mu$ étant premiers entre eux, il en est de même de toutes leurs puissances (car ils sont irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$) et le lemme des noyaux assure que $E_\lambda^c(f)$ et $E_\mu^c(f)$ sont en somme directe. Finalement, on a bien

$$\boxed{E = E_\lambda^c(f) \oplus E_\mu^c(f)}$$

16. Comme $a^2 = b^2 = 0$, le calcul donne

$$u^2 = (a+b)^2 = a^2 + a \circ b + b \circ a + b^2 = a \circ b + b \circ a$$

Par conséquent

$$a \circ u^2 = a^2 \circ b + a \circ b \circ a = a \circ b \circ a = u^2 \circ a$$

Donc u^2 et a commutent et, par symétrie, il en est de même de u^2 et b.

17. Comme p est pair, a et b commutent avec u^p. Par conséquent $\operatorname{Im} u^p$ est stable par a et b. En outre par propriété d'endomorphisme induit

$$(a_{\operatorname{Im} u^p})^2 = a^2_{\operatorname{Im} u^p} = 0 \qquad (b_{\operatorname{Im} u^p})^2 = b^2_{\operatorname{Im} u^p} = 0$$

18. En adaptant ce qui a été établi dans la partie D, on a

$$E = E_0^c(f) \oplus \operatorname{Im} u^p$$

Tout d'abord, u est non injectif et ainsi $\operatorname{Ker} u \neq \{0\}$. Comme cela a été vu dans la partie D, u induit un endomorphisme nilpotent de $E_0^c(f)$. Selon le résultat que l'énoncé demande d'admettre, $u_{E_0^c(f)}$ est un endomorphisme échangeur de $E_0^c(f)$. Ainsi il existe deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $E_0^c(f)$, F_0 et G_0 que l'on fixe, tels que

$$u_{E_0^c(f)}(F_0) \subset G_0 \qquad u_{E_0^c(f)}(G_0) \subset F_0 \qquad \text{ou encore} \qquad u(F_0) \subset G_0 \qquad u(G_0) \subset F_0$$

En outre, selon le résultat de la question 14., u induit un endomorphisme de $\operatorname{Im} u^p$ n'ayant pas pour valeur propre 0. Comme $\operatorname{Im} u^p$ est un espace vectoriel de dimension finie, cela signifie que $u_{\operatorname{Im} u^p}$ est un automorphisme de $\operatorname{Im} u^p$. Comme, d'après la question précédente, il vérifie la condition $(C2)$, le résultat final de la partie C assure que $u_{\operatorname{Im} u^p}$ est échangeur. Par conséquent il existe deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\operatorname{Im} u^p$, F_1 et G_1 que l'on fixe, tels que

$$u_{\operatorname{Im} u^p}(F_1) \subset G_1 \qquad u_{\operatorname{Im} u^p}(G_1) \subset F_1 \qquad \text{ou encore} \qquad u(F_1) \subset G_1 \qquad u(G_1) \subset F_1$$

On utilise la décomposition suivante de E en somme directe

$$E = E_0^c(f) \oplus \operatorname{Im} u^p = (F_0 \oplus F_1) \oplus (G_0 \oplus G_1)$$

pour conclure que u est échangeur.

19. Avec les notations de l'énoncé, le calcul donne
$$\varphi^2 \circ u = \varphi \circ \left(\varphi \circ u \circ \varphi^{-1}\right) \circ \varphi = \varphi \circ (-u) \circ \varphi = -\varphi \circ u \circ \varphi$$
ainsi que
$$u \circ \varphi^2 = -\left(-u \circ \varphi^2\right) = -\left(\varphi \circ u \circ \varphi^{-1}\right) \circ \varphi^2 = -\varphi \circ u \circ \varphi$$
Par conséquent $\boxed{\varphi^2 \text{ commute avec } u}$.

20. Comme endomorphisme d'un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension finie, φ^2 possède au moins une valeur propre complexe, que l'on note λ. On peut signaler que λ est non nul, car φ^2 est un automorphisme de E : notons α et $-\alpha$ les deux racines carrées de λ dans $\mathbb{C}$.
D'après la question 13., avec des notations similaires, il existe un entier naturel p non nul, que l'on fixe, tel que
$$E_c^{\lambda}\left(\varphi^2\right) = \operatorname{Ker}\left(\varphi^2 - \lambda \operatorname{id}_E\right)^p \qquad \text{et} \qquad E = E_c^{\lambda}\left(\varphi^2\right) \oplus \operatorname{Im}\left(\varphi^2 - \lambda \operatorname{id}_E\right)^p$$
Comme λ est valeur propre de φ^2, on a $E_c^{\lambda}\left(\varphi^2\right) \neq \{0\}$. Comme $\left(\varphi^2 - \lambda \operatorname{id}_E\right)^p$ est un polynôme en φ, $E_c^{\lambda}\left(\varphi^2\right)$ et $\operatorname{Im}\left(\varphi^2 - \lambda \operatorname{id}_E\right)^p$ sont deux sous-espaces vectoriels de E stables par φ.
De plus, $\left(\varphi^2 - \lambda \operatorname{id}_E\right)^p$ est un polynôme en φ^2 et, selon la question précédente, φ^2 commute avec u : ainsi $E_c^{\lambda}\left(\varphi^2\right)$ et $\operatorname{Im}\left(\varphi^2 - \lambda \operatorname{id}_E\right)^p$ sont deux sous-espaces vectoriels de E stables par u.
Notons $\varphi_0 = \varphi_{E_c^{\lambda}(\varphi^2)}$ et $\varphi_1 = \varphi_{\operatorname{Im}(\varphi^2 - \lambda \operatorname{id}_E)^p}$ ainsi que $u_0 = u_{E_c^{\lambda}(\varphi^2)}$ et $u_1 = u_{\operatorname{Im}(\varphi^2 - \lambda \operatorname{id}_E)^p}$. φ_0 et φ_1, endomorphismes induits par un endomorphisme injectif de E, sont des endomorphismes injectifs d'espaces vectoriels de dimension finie, et sont donc des automorphismes de ces espaces vectoriels.
Ayant $-u = \varphi \circ u \circ \varphi^{-1}$, par propriétés d'endomorphismes induits, on a
$$-u_0 = \varphi_0 \circ u_0 \circ \varphi_0^{-1} \qquad -u_1 = \varphi_1 \circ u_1 \circ \varphi_1^{-1}$$
Comme, par hypothèse, u est indécomposable, nécessairement $\operatorname{Im}\left(\varphi^2 - \lambda \operatorname{id}_E\right)^p = \{0\}$, ou encore $\left(\varphi^2 - \lambda \operatorname{id}_E\right)^p = 0$. Par conséquent $(X - \lambda)^p$ est un polynôme annulateur de φ^2, ce qui implique que λ est la seule valeur propre de φ^2.
Avec les notations introduites en début de question, $(X - \alpha)^p (X + \alpha)^p$ est un polynôme annulateur de φ. On en déduit $\boxed{\operatorname{Sp} \varphi \subset \{-\alpha, +\alpha\}}$.

21. D'après le résultat final de la question 15., application de lemme des noyaux, on a
$$E = E_{\alpha}^{c}(\varphi) \oplus E_{-\alpha}^{c}(\varphi)$$
Vérifions l'inclusion $u\left(E_{\alpha}^{c}(\varphi)\right) \subset E_{-\alpha}^{c}(\varphi)$ (l'inclusion $u\left(E_{-\alpha}^{c}(\varphi)\right) \subset E_{\alpha}^{c}(\varphi)$ s'en déduisant par symétrie).
Par hypothèse, on a $\varphi \circ u = -u \circ \varphi$. Une récurrence immédiate fournit alors
$$\forall k \in \mathbb{N}, \ \varphi^k \circ u = (-1)^k u \circ \varphi$$
Soit $x \in E_{\alpha}^{c}(\varphi)$: on a $(\varphi - \alpha \operatorname{id}_E)^p (x) = 0$. Comme φ et $\alpha \operatorname{id}_E$ commutent, la formule du binôme donne
$$\begin{aligned}(\varphi + \alpha \operatorname{id}_E)^p (u(x)) &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \alpha^{p-k} \varphi^k \circ u(x) = u\left(\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} \alpha^{p-k} \varphi^k (x)\right) \\ &= (-1)^p u\left(\sum_{k=0}^{p} (-\alpha)^{p-k} \varphi^k (x)\right) = (-1)^p u\left((\varphi - \alpha \operatorname{id}_E)^p (x)\right) = 0\end{aligned}$$
Par conséquent $u\left(E_{\alpha}^{c}(\varphi)\right) \subset E_{-\alpha}^{c}(\varphi)$. De même $u\left(E_{-\alpha}^{c}(\varphi)\right) \subset E_{\alpha}^{c}(\varphi)$.
En conclusion, u est échangeur.

22. Procédons par récurrence. A tout entier naturel non nul n, associons le prédicat
$\mathcal{P}(n)$: étant donné un espace vectoriel complexe E de dimension égale à n, tout endomorphisme de E vérifiant la condition $(C3)$ est échangeur.
Tout d'abord, $\mathcal{P}(1)$ est clairement vérifiée.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, tel que $\mathcal{P}(1), \ldots, \mathcal{P}(n)$ soient vraies. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$. Soit donc E un espace vectoriel complexe de dimension égale à $n+1$ et u un endomorphisme de E vérifiant $(C3)$.
Distinguons deux cas :
• si u est indécomposable, alors, selon les questions précédentes, il est échangeur.
• sinon, il existe deux sous-espaces vectoriels F et G non réduits à $\{0\}$ stables par u tels que $E = F \oplus G$ et u_F et u_G vérifient $(C3)$. Selon les deux propriétés $\mathcal{P}(\dim F)$ et $\mathcal{P}(\dim G)$, u_F et u_G sont échangeurs et le procédé déjà utilisé dans la question 18. permet de conclure que u est échangeur.
D'où $\mathcal{P}(n+1)$ puis $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}(n)$.

23. *Un cas particulier.* Le calcul des puissances successives de $\operatorname{mat}_e(u)$ permet de justifier que l'indice de nilpotence de u est égal à n.
Si E est une droite vectorielle, on a $u = 0$: il suffit d'écrire $E = E \oplus \{0\}$ pour constater que u est échangeur.
Si $n \geqslant 2$, ayant
$$\forall k \in [\![1, n-1]\!],\ u(e_k) = e_{k+1} \qquad u(e_n) = 0$$
il suffit de définir
$$F = \operatorname{vect}\left((e_{2k+1})_{0 \leqslant k \leqslant \lfloor (n-1)/2 \rfloor}\right) \qquad G = \operatorname{vect}\left((e_{2k})_{1 \leqslant k \leqslant \lfloor n/2 \rfloor}\right)$$
pour obtenir
$$E = F \oplus G \qquad u(F) \subset G \qquad u(G) \subset F$$
Donc dans le cadre de cet exemple, u est un endomorphisme échangeur de E.

24. Soit $x \in E \setminus \{0\}$.

(a) L'ensemble $\left\{k \in \mathbb{N}^* \mid u^k(x) = 0\right\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}^*$, puisque m en est un élément. Comme $\mathbb{N}$ est un ensemble bien ordonné, cet ensemble a un plus petit élément, que l'on note $\nu(x)$ dans ce qui suit.

(b) On note $F_u(x)$ le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $\left(u^k(x)\right)_{k \in \mathbb{N}}$, c'est-à-dire
$$F_u(x) = \operatorname{vect}\left(\left(u^k(x)\right)_{k \in \mathbb{N}}\right)$$
On a
$$\forall k \in \mathbb{N},\ u\left(u^k(x)\right) = u^{k+1}(x)$$
et ainsi les images par u des vecteurs d'une famille génératrice de $F_u(x)$ appartiennent à $F_u(x)$. Par conséquent $F_u(x)$ est un sous-espace vectoriel de E stable par u.
Par propriété d'endomorphisme induit, on a
$$\left(u_{F_u(x)}\right)^m = (u^m)_{F_u(x)} = 0$$
Ainsi $u_{F_u(x)}$ est nilpotent (d'indice de nilpotence majoré par m).
En outre
$$\forall k \in \mathbb{N},\ u^{\nu(x)}\left(u^k(x)\right) = u^k\left(u^{\nu(x)}(x)\right) = u^k(0) = 0 \qquad u^{\nu(x)-1}(x) \neq 0$$
ce qui implique que l'indice de nilpotence de $u_{F_u(x)}$ est égal à $\nu(x)$.

(c) On note $\mathcal{B}_u(x) = \left(x, u(x), \ldots, u^{\nu(x)-1}\right)$.

Comme on a

$$\forall k \in \mathbb{N},\ k \geqslant \nu(x) \Longrightarrow u^k(x) = 0$$

$\mathcal{B}_u(x)$ est une famille génératrice de $F_u(x)$. C'est un exercice classique de montrer que $\mathcal{B}_u(x)$ est libre. Supposons, par l'absurde, que $\mathcal{B}_u(x)$ est liée. Alors il existe des scalaires $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{\nu(x)-1}$ non tous nuls tels que

$$\sum_{k=0}^{\nu(x)-1} \alpha_k u^k(x) = 0$$

Notant $k_0 = \min\{k \in [\![0, \nu(x)-1]\!] \mid \alpha_k \neq 0\}$, ce qui a un sens d'après l'hypothèse faite, en appliquant $u^{\nu(x)-1-k_0}$ à l'égalité ci-dessus, on trouve $\alpha_{k_0} = 0$, ce qui fournit la contradiction voulue.

En conclusion $\mathcal{B}_u(x)$ est une base de $F_u(x)$.

La matrice (carrée d'ordre $\nu(x)$) de l'endomorphisme induit par u sur $F_u(x)$ dans la base $\mathcal{B}_u(x)$ est de la forme de celle de l'exemple étudié à la question 23..

25. Comme le suggère l'énoncé, procédons par récurrence sur l'indice de nilpotence de u. A tout entier naturel non nul m, associons le prédicat

$\mathcal{P}(m)$: étant donnés un espace vectoriel complexe E de dimension finie et u un endomorphisme nilpotent de E d'indice de nilpotence égal à m, si $\dim \operatorname{Ker} u = p$ alors il existe p vecteurs $x_1, x_2, \ldots, x_p$ de E tels que

$$E = \bigoplus_{k=1}^{p} F_u(x_k)$$

Etablissons $\mathcal{P}(1)$. Soit donc E un espace vectoriel complexe de dimension finie et u un endomorphisme nilpotent de E d'indice de nilpotence égal à 1 : cela signifie que l'on a $u = 0$. Dans ce cas $\dim \operatorname{Ker} u = \dim E$ et les n vecteurs d'une base quelconque de E conviennent. D'où $\mathcal{P}(1)$.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$, tel que $\mathcal{P}(m)$. Montrons $\mathcal{P}(m+1)$. Soit donc E un espace vectoriel complexe de dimension finie et u un endomorphisme nilpotent de E d'indice de nilpotence égal à $m+1$. $\operatorname{Im} u$ est un sous-espace vectoriel de E (de dimension finie) stable par u et $u_{\operatorname{Im} u}$ est nilpotent d'indice de nilpotence égal à m. En effet, ayant $u^{m+1} = 0$, on a

$$\forall x \in E,\ u^m(u(x)) = u^{m+1}(x) = 0$$

et comme $u^m \neq 0$, il existe un vecteur x de E tel que $u^m(x) \neq 0$ ou encore

$$u^{m-1}(u(x)) \neq 0$$

Notant $q = \dim \operatorname{Ker} u_{\operatorname{Im} u}$, selon $\mathcal{P}(m)$, il existe q vecteurs $y_1, y_2, \ldots, y_q$, que l'on fixe, appartenant à $\operatorname{Im} u$ tels que

$$\operatorname{Im} u = \bigoplus_{k=1}^{q} F_u(y_k)$$

En particulier $\displaystyle\bigsqcup_{k=1}^{q} \mathcal{B}_u(y_k)$ est une base de $\operatorname{Im} u$ (adaptée à la décomposition en somme directe précédente).

Pour tout k appartenant à $[\![1, q]\!]$, notons x_k un vecteur de E tel que $y_k = u(x_k)$. Par construction, on a notamment

$$\forall k \in [\![1, q]\!],\ \nu(x_k) = \nu(y_k) + 1$$

La famille $\left(u^{\nu(y_k)}(x_k)\right)_{1 \leqslant k \leqslant q}$ est une famille libre (sous-famille de la base de $\operatorname{Im} u$ mentionnée ci-dessus) de vecteurs de $\operatorname{Ker} u$. Selon le théorème de la base incomplète, il existe des vecteurs

$x_{q+1}, x_{q+2}, \ldots, x_p$ de $\operatorname{Ker} u$ permettant de la compléter en une base de $\operatorname{Ker} u$.
Alors la famille $\left(\bigsqcup_{k=1}^{q} \mathcal{B}_u(x_k)\right) \bigsqcup (x_{q+1}, x_{q+2}, \ldots, x_p)$ est une base de E (famille libre de E ayant le "bon" nombre d'éléments d'après la formule du rang), ce qui signifie

$$E = \bigoplus_{k=1}^{p} F_u(x_k)$$

(avec ces notations $\forall k \in [\![q+1, p]\!],\ F_u(x_k) = \mathbb{C}x_k$).
On obtient donc $\mathcal{P}(m+1)$, puis $\forall m \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}(m)$.

26. Soit E un espace vectoriel complexe de dimension finie et u un endomorphisme nilpotent de E.
Ou bien $u = 0$ et u est échangeur (voir l'initialisation de la récurrence de la question précédente).
Ou bien $u \neq 0$. Dans ce cas, selon la question précédente, E admet une décomposition en somme directe de sous-espaces stables par u tels que les endomorphismes induits par u soient échangeurs (question 23.). En généralisant le procédé utilisé à la question 18., on conclut que u est échangeur.

Eléments de correction : Mines MP1 2014

1) Avec $z = Re^{i\theta} = R\cos(\theta) + iR\sin(\theta)$, le complexe e^z a pour module $e^{\mathrm{Re}(z)} = e^{R\cos(\theta)}$ et argument $R\sin(\theta)$, donc ze^z a pour module $|z| \times |e^z| = Re^{R\cos(\theta)}$ et argument $\theta + R\sin(\theta)$. Ainsi par identification des modules et arguments, on obtient

$$\boxed{ze^z = w \Leftrightarrow \begin{cases} Re^{R\cos(\theta)} = r \\ \theta + R\sin(\theta) \equiv \alpha\ [2\pi] \text{ i.e. } R\sin(\theta) \equiv \alpha - \theta\ [2\pi] \end{cases}}$$

2) En posant $u(\theta) = \frac{\alpha-\theta}{\sin(\theta)}$, on obtient :

- d'une part, $\varphi(\theta) = u(\theta)\exp(u(\theta))\exp((\cos(\theta)-1)u(\theta))$

avec $u(\theta)$ qui tend vers $+\infty$ quand θ tend vers 0^+ (car $\alpha > 0$) et $(\cos(\theta)-1)\,u(\theta) \sim_0 -\dfrac{1}{2}\theta^2\dfrac{\alpha}{\theta} \sim_0 -\dfrac{1}{2}\theta\,\alpha$ qui tend vers 0. Donc par théorèmes opératoires, $\exp((\cos(\theta)-1)u(\theta))$ tend vers 1 quand θ tend vers 0 et $\boxed{\varphi \text{ tend vers } +\infty \text{ en } 0^+;}$

- d'autre part $\varphi(\theta) = u(\theta)\exp(-u(\theta))\exp((\cos(\theta)+1)u(\theta))$

avec $u(\theta)$ qui tend vers $+\infty$ quand θ tend vers π^- (car $\alpha - \pi > 0$) et $(\cos(\theta)+1)\ u(\theta) \sim_\pi (\alpha-\pi)\frac{1-\cos(\pi-\theta)}{\sin(\pi-\theta)} \sim_\pi \dfrac{1}{2}(\alpha-\pi)(\pi-\theta)$ (cf premier point). Donc par continuité de exp, le terme $\exp((\cos(\theta)+1)u(\theta))$ tend vers 1 quand θ tend vers π, et par croissances comparées, $\boxed{\varphi \text{ tend vers } 0 \text{ en } +\infty;}$

- Ainsi, comme φ tend vers $+\infty$ en 0^+, il existe $\varepsilon \in]0;\pi/2[$ tel que : $\forall\theta \in]0;\varepsilon[,\ \varphi(\theta) > r$ (car $r > 0$).

Et comme φ tend vers 0 en π, il existe $\varepsilon' \in]0;\pi/2[$ tel que : $\forall\theta \in]\pi-\varepsilon';\pi[,\ \varphi(\theta) < r$ (car $r > 0$)

Comme φ est continue sur l'intervalle $]0;\pi[$ comme quotient et composée de telles fonctions, par le théorème des valeurs intermédiaires (comme φ prend sur $]0;\varepsilon[\subset]0;\pi/2[$, une valeur strictement supérieure à r et sur $]\pi-\varepsilon';\pi[\subset]\pi/2;\pi[$ une valeur strictement inférieure à r), φ prend la valeur r donc

$\boxed{\text{pour tout } r > 0, \text{ l'équation } \varphi(\theta) = r \text{ admet au moins une solution.}}$

3) Soit w un complexe.

- Si $w = 0$ alors $0 \in D$ vérifie $g(0) = 0\,e^0 = 0 = w$ donc w est atteint par g.
- Sinon $w \neq 0$, on écrit $w = re^{i\alpha}$ avec $r > 0$ son module et α son unique argument dans $[2\pi;4\pi[$.

Via la question **2**, il existe θ dans $]0;\pi[$ avec $\varphi(\theta) = r$. On pose alors $R = \frac{\alpha-\theta}{\sin(\theta)}$, comme $\sin(\theta) > 0$ et $\alpha - \theta > 2\pi - \pi > 0$, ce réel est strictement positif.

Par définition de R et θ : $R\,e^{R\cos(\theta)} = \dfrac{\alpha-\theta}{\sin(\theta)}\exp\left(\dfrac{(\alpha-\theta)\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right) = \varphi(\theta) = r$ et $R\sin(\theta) = \alpha - \theta$

Ainsi via la question **1**, on obtient $z\,e^z = w$ avec $z = Re^{i\theta}$ qui est bien dans D, donc $w = g(z)$.

- Ainsi, tout complexe w est image par g d'un élément de D, autrement dit $\boxed{g : D \to \mathbb{C} \text{ est surjective .}}$

4) Par définition de l'indice de nilpotence, N^{n-1} n'est pas la matrice nulle donc

$\boxed{\text{il existe } X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \text{ avec } N^{n-1}X \neq 0.}$

Par l'absurde, supposons la famille $(N^kX)_{k=0\dots n-1}$ liée. Alors il existe une famille $(\lambda_k)_{k=0\dots n-1}$ non nulle de complexes vérifiant $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k N^k X = 0$. On considère k_0 le plus petit élément de l'ensemble fini non vide $\{k|\lambda_k \neq 0\}$. Alors $m = n-1-k_0$ est un entier naturel, et on obtient :

$$0 = N^m\,0 = N^m\left(\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k N^k X\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k N^{m+k}X = \sum_{k=k_0}^{n-1}\lambda_k N^{m+k}X = \lambda_{k_0}N^{n-1}X$$

car si $k < k_0$ alors $\lambda_k = 0$ par définition de k_0 et si $k > k_0$, alors $k - k_0 - 1$ est un entier naturel donc $N^{m+k}X = N^{k-k_0-1}\,N^nX = 0$.

Or $N^{n-1}X \neq 0$ par choix de k_0, donc $\lambda_{k_0} = 0$ ce qui contredit la définition de k_0.
Finalement, $\boxed{\text{la famille } (N^kX)_{k=0\dots n-1} \text{ est libre.}}$

5) Soit $\mathcal{N}$ l'endomorphisme canoniquement associé à N. Comme $(N^kX)_{k=0\dots n-1}$ est une famille libre à n éléments (question 4) de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ qui est de dimension n, c'est une base de cet espace. Dans cette base $B = (N^{n-1}X, \dots, NX, X)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, la matrice de $\mathcal{N}$ est $J_n(0)$ car $N(N^kX) = N^{k+1}X$ et $N^nX = 0$ (puisque $N^n = 0$). Ainsi les matrices de $\mathcal{N}$ dans les bases canonique et B autrement dit $\boxed{N \text{ et } J_n(0) \text{ sont semblables.}}$

6) • Comme $J_n(0)$ et $-J_n(0)$ commutent, on obtient $\mathrm{e}^{J_n(0)-J_n(0)} = \mathrm{e}^{J_n(0)}\,\mathrm{e}^{-J_n(0)}$ i.e. $\mathrm{e}^{J_n(0)}\,\mathrm{e}^{-J_n(0)} = \mathrm{e}^0 = I_n$.
Ainsi $\boxed{\mathrm{e}^{J_n(0)} \text{ est inversible d'inverse } \mathrm{e}^{-J_n(0)}.}$
• Pour toute matrice carrée A, par continuité du produit par A (application linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de dimension finie), on a :

$$A\mathrm{e}^A = A \lim_{N\longrightarrow\infty}\left(\sum_{k=0}^{N}\frac{A^k}{k!}\right) = \lim_{N\longrightarrow\infty}\left(A\sum_{k=0}^{N}\frac{A^k}{k!}\right) = \lim_{N\longrightarrow\infty}\left(\left(\sum_{k=0}^{N}\frac{A^k}{k!}\right)A\right) = \mathrm{e}^A A$$

Ainsi toute matrice commute avec son exponentielle.
On obtient donc pour tout entier naturel k: $\left(J_n(0)\mathrm{e}^{J_n(0)}\right)^k = (J_n(0))^k\,\left(\mathrm{e}^{J_n(0)}\right)^k$
et comme $e^{J_n(0)}$ est inversible donc tout $\left(\mathrm{e}^{J_n(0)}\right)^k$ avec $k \in \mathbb{N}$ aussi, on a :
$\left(J_n(0)\mathrm{e}^{J_n(0)}\right)^k = 0 \Leftrightarrow (J_n(0))^k = 0 \Leftrightarrow k \geqslant n$ (car $J_n(0)$ est nilpotente d'indice n).
Finalement, on a prouvé que $\boxed{J_n(0)\mathrm{e}^{J_n(0)} \text{ est nilpotente d'indice } n.}$
Remarque : le polynôme caractéristique de $J_n(0)$ est $\det(XI_n - J_n(0)) = X^n$ (déterminant d'une matrice triangulaire supérieure) donc via le théorème de Cayley-Hamilton, ce polynôme est annulateur de $J_n(0)$ donc on a $(J_n(0))^n = 0$.
Mais en notant $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, on a par définition de $J_n(0)$, $J_n(0)e_\ell = e_{\ell-1}$ pour tout $\ell = 2 \dots n$, donc $(J_n(0))^{n-1}e_n = e_{n-(n-1)} = e_1 \neq 0$ ce qui assure que $(J_n(0))^{n-1}$ n'est pas nulle.
Ainsi $(J_n(0))^{n-1} \neq 0$ et $(J_n(0))^n = 0$ donc $\boxed{J_n(0) \text{ est bien nilpotente d'indice } n}$.

7) • Par continuité de l'application linéaire $A \mapsto PAP^{-1}$ (définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de dimension finie, donc continue), on obtient pour tout A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$$P\,e^AP^{-1} = P\left(\lim_{N\longrightarrow\infty}\left(\sum_{k=0}^{N}\frac{A^k}{k!}\right)\right)P^{-1} = \lim_{N\longrightarrow\infty}\left(P\left(\sum_{k=0}^{N}\frac{A^k}{k!}\right)P^{-1}\right) = \lim_{N\longrightarrow\infty}\left(\sum_{k=0}^{N}\frac{P\,A^k\,P^{-1}}{k!}\right)$$

Or $PA^kP^{-1} = (PAP^{-1})^k$ par récurrence sur k. En effet, la propriété est vraie au rang $k = 0$ car $PP^{-1} = I_n$ et si elle est vraie au rang k, alors $PA^{k+1}P^{-1} = PA^kP^{-1}PAP^{-1} = (PAP^{-1})^k\,(PAP^{-1}) = (PAP^{-1})^{k+1}$.

$$\text{Donc } P\,e^AP^{-1} = \lim_{N\longrightarrow\infty}\left(\sum_{k=0}^{N}\frac{(PAP^{-1})^k}{k!}\right) = \mathrm{e}^{PAP^{-1}}.$$

En particulier $\boxed{\text{on a bien } P\,e^{J_n(0)}P^{-1} = \mathrm{e}^{PJ_n(0)P^{-1}}.}$

• Via la question **6**, $J_n(0)\mathrm{e}^{J_n(0)}$ est nilpotente d'indice n, donc semblable à $J_n(0)$ (question **5**) : ainsi il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ avec $J_n(0) = PJ_n(0)\mathrm{e}^{J_n(0)}P^{-1}$.
Avec $\widetilde{N} = PJ_n(0)P^{-1}$, via le début de la question,
$\widetilde{N}\,\mathrm{e}^{\widetilde{N}} = PJ_n(0)P^{-1}\,P\mathrm{e}^{J_n(0)}P^{-1} = PJ_n(0)\mathrm{e}^{J_n(0)}P^{-1} = J_n(0)$ donc $\boxed{\text{on a bien trouvé } \widetilde{N} \text{ avec } J_n(0) = \widetilde{N}\mathrm{e}^{\widetilde{N}}.}$

8) • Comme λ est un complexe, il existe $\mu \in D$ avec $g(\mu) = \lambda$ (question **3** : g est surjective). Comme λ est non nul, μ ne peut pas être nul (car $g(0) = 0$), donc μ est un élément non nul de D donc de partie

imaginaire strictement positive (ce qui exclut les réels). Ainsi $\boxed{\mu \neq -1 \text{ et } \mu \mathrm{e}^{\mu} = g(\mu) = \lambda.}$

• On observe $J_n(\mu) = \mu I_n + J_n(0)$. Donc comme μI_n commute avec $J_n(0)$, on a $\mathrm{e}^{J_n(\mu)} = e^{\mu I_n}\, e^{J_n(0)}$.

Or $\mathrm{e}^{\mu I_n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu I_n)^k}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^k}{k!}\right) I_n = \mathrm{e}^{\mu}\, I_n$

et $e^{J_n(0)} = I_n + J_n(0) + \displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} \frac{J_n(0)^k}{k!}$ (car $J_n(0)^k = 0$ pour tout $k \geqslant n$ puisque $J_n(0)$ est nilpotent d'indice n.

On peut donc écrire $e^{J_n(0)} = I_n + J_n(0) + J_n(0)^2 Q(J_n(0))$ avec Q le polynôme $Q = \displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} \frac{X^{k-2}}{k!}$.

$$\begin{aligned}\text{Ainsi } J_n(\mu)\mathrm{e}^{J_n(\mu)} &= (\mu I_n + J_n(0))\, \mathrm{e}^{\mu}\, (I_n + J_n(0) + J_n(0)^2\, Q(J_n(0)))\\ &= \mu \mathrm{e}^{\mu} I_n + \mu \mathrm{e}^{\mu} J_n(0) + J_n(0)^2\, (\mu \mathrm{e}^{\mu} Q)(J_n(0)) + \mathrm{e}^{\mu}\, J_n(0) + \mathrm{e}^{\mu}\, J_n(0)^2\, (I_n + J_n(0)\, Q(J_n(0)))\end{aligned}$$

donc comme $\mu \mathrm{e}^{\mu} = \lambda$, on a $\boxed{J_n(\mu)\mathrm{e}^{J_n(\mu)} = \lambda I_n + (\mu+1)\mathrm{e}^{\mu}\, J_n(0) + (J_n(0))^2\, p(J_n(0))}$ avec p le polynôme $p = \mathrm{e}^{\mu}(\mu Q + 1 + XQ)$

9) Observons qu'il est possible d'écrire $C = (\mu+1)\mathrm{e}^{\mu}\, J_n(0) + (J_n(0))^2 p(J_n(0)) = (XR)(J_n(0))$ avec R le polynôme $R = (\mu+1)\mathrm{e}^{\mu} + Xp$.
Donc comme l'évaluation est un morphisme d'algèbre,

• $C^n = ((XR)(J_n(0)))^n = (X^n R^n)(J_n(0)) = J_n(0)^n\, (R^n)(J_n(0)) = 0$ car $J_n(0)^n = 0$.

Donc C est bien nilpotente d'indice au plus n.

• et $C^{n-1} = ((XR)(J_n(0)))^{n-1} = (X^{n-1}R^{n-1})(J_n(0)) = S(J_n(0))$ où S est le reste de la division euclidienne de $X^{n-1}R^{n-1}$ par le polynôme X^n qui annule $J_n(0)$. Donc $S = \alpha X^{n-1}$ avec α le coefficient constant de R^{n-1}. Or $\alpha = R^{n-1}(0) = (R(0))^{n-1} = ((\mu+1)\mathrm{e}^{\mu})^{n+1} \neq 0$ car $\mu \neq -1$.

Ainsi $C^{n-1} = \alpha J_n(0)^{n-1}$ avec le complexe α non nul et la matrice $J_n(0)^{n-1}$ non nulle (car $J_n(0)$ est nilpotente d'indice n, cf remarque de la **question 6**). On en déduit $C^{n-1} \neq 0$.

Finalement $\boxed{C = (\mu+1)\mathrm{e}^{\mu}\, J_n(0) + (J_n(0))^2 p(J_n(0)) \text{ est bien nilpotente d'indice } n.}$

D'après la question **5**, C est semblable à $J_n(0)$; ainsi, il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $C = PJ_n(0)P^{-1}$. La relation de la question **8** s'écrit

$$J_n(\mu)\mathrm{e}^{J_n(\mu)} = \lambda I_n + C = \lambda I_n + PJ_n(0)P^{-1} = P(\lambda I_n + J_n(0))P^{-1} = PJ_n(\lambda)P^{-1}.$$

On termine comme à la question **7** : $\boxed{J_n(\lambda) = P^{-1}J_n(\mu)\mathrm{e}^{J_n(\mu)}P = M\mathrm{e}^{M} \text{ avec } M = P^{-1}J_n(\mu)P.}$

10) Comme N est nilpotente d'indice p, il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ avec $N^{p-1}X \neq 0$. Par le même raisonnement qu'à la question **4** (qui n'utilisait que l'indice de nilpotence de la matrice), la famille $(N^k X)_{k=0\ldots p-1}$ est libre. Le théorème de la base incomplète assure que l'on peut compléter cette famille en une base $(N^{p-1}X, \ldots, NX, X, X_1, \ldots X_{n-p})$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ (qui est de dimension n). Dans cette base, l'endomorphisme canoniquement associé à N a pour matrice, une matrice du type

$A = \left(\begin{array}{c|c} J_p(0) & B \\ \hline O & C \end{array}\right)$ car $N(N^{p-1}X) = N^p X = 0$ et $N(N^\ell X) = N^{\ell+1}X$ pour tout ℓ, $\ell \in [\![0, p-2]\!]$.

11) • Soit X et Y dans $\mathcal{M}_{p,n-p}$, en faisant des produits par blocs, on obtient $T_X T_Y = T_{X+Y}$.
Ainsi $T_X T_{-X} = T_0 = I_n = T_{-X} T_X$ ce qui prouve que $\boxed{T_X \text{ est inversible, d'inverse } T_{-X}.}$

• Ainsi, toujours à l'aide de produits par blocs :

$$A' = T_X A T_X^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} J_p(0) & B + XC \\ \hline O & C \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} I_p & -X \\ \hline O & I_{n-p} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} J_p(0) & -J_p(0)X + B + XC \\ \hline O & C \end{array}\right)$$

Donc avec les notations de l'énoncé, on a $\boxed{Z = C \text{ et } Y = B + XC - J_p(0)X.}$

12) En notant $A_{(i)}$ la i-ème ligne de la matrice A, la relation $Y = B + XC - J_p(0)X$ entre matrices à p lignes, s'écrit : $Y_{(i)} = B_{(i)} + X_{(i)}C - X_{(i+1)}$ pour tout $i \in [\![1, p-1]\!]$ et $Y_{(p)} = B_{(p)} + X_{(p)}C$.
Ainsi, on choisit la première ligne de X dans $\mathcal{M}_{1,n-p}(\mathbb{C})$, on peut prendre par exemple cette première ligne nulle. Puis on définit par récurrence limitée, $X_{(\ell+1)} = B_{(\ell)} + X_{(\ell)}C$ pour tout ℓ de 1 à $p-1$. Ainsi, on a défini $\boxed{\text{une matrice } X \text{ et par choix, toutes les lignes de } Y \text{ sauf peut-être la dernière, sont nulles.}}$

13) • Par choix de A', les matrices A et A' sont semblables et les matrices A et N aussi (question **10**) donc A' et N sont semblables et il existe P inversible avec $A' = PNP^{-1}$. Dans la question **7**, pour tout entier naturel k, on a obtenu $A'^k = PN^kP^{-1}$, donc comme P et P^{-1} sont inversibles, on obtient $A'^k = 0 \Longleftarrow N^k = 0$ ce qui prouve que $\boxed{A' \text{ est nilpotente d'indice } p}$ comme N.

• Faisons le choix de X de la question précédente donc toutes les lignes de Y sont nulles sauf peut-être la dernière. On a donc par récurrence, pour tout entier naturel k non nul :

$$A'^k = \left(\begin{array}{c|c} (J_p(0))^k & Y_k \\ \hline O & Z^k \end{array}\right) \text{ avec } Y_1 = Y \text{ et } Y_{k+1} = J_n(0)Y_k + YZ^k$$

Observons, pour toute matrice C : $J_n(0)\begin{pmatrix} C_{(1)} \\ \vdots \\ \vdots \\ C_{(p)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{(2)} \\ \vdots \\ C_{(p)} \\ 0 \end{pmatrix}$

Donc en notant L la dernière ligne de Y, on obtient successivement

$$Y_1 = Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ L \end{pmatrix} \text{ puis } Y_2 = J_n(0)Y + YZ = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ L \\ LZ \end{pmatrix} \text{ et } Y_3 = J_n(0)Y_2 + YZ^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ L \\ LZ \\ LZ^2 \end{pmatrix}$$

Pour tout k entre 1 et p, par récurrence, $Y_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ L \\ LZ \\ \vdots \\ LZ^{k-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{C})$. En particulier $Y_p = \begin{pmatrix} L \\ LZ \\ \vdots \\ LZ^{p-1} \end{pmatrix}$ est nul car $A'^p = 0$ comme A' est nilpotente d'indice p (première partie de la question). Donc $L = 0$ et finalement $\boxed{Y = 0.}$

14) Montrons par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété suivante : toute matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice diagonale par blocs de blocs diagonaux du type $J_{p_j}(0)$ avec pour $j = 1...r$, les p_j des entiers naturels non nuls (forme de l'énoncé).
Notons H_n le prédicat ainsi défini.
• Pour $n = 1$, la seule matrice nilpotente N est la matrice nulle, donc avec $r = 1$ et $p_1 = 1$, on a le résultat

$(N = J_1(0) = 0)$.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$ t.q.

H_ℓ soit vérifiée pour tout ℓ entre 1 et n.

Soit N une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ et p son indice de nilpotence.

Alors X^p est un polynôme annulateur de N, donc le polynôme minimal π_N de N divise X^p donc est de la forme X^ℓ avec $\ell \leqslant p$, mais par définition de p, aucun X^ℓ avec $\ell > p$ n'est annulateur de N donc $\pi_N = X^p$.

Or via le théorème de Cayley-Hamilton, π_N divise le polynôme caractéristique de N qui est de degré $n+1$. Donc $1 \leqslant p \leqslant n+1$.

☐ Si $p = n+1$, alors N est nilpotente d'indice maximum, donc via la question **5**, N est semblable à $J_{n+1}(0)$ donc $r = 1$ et $p_1 = n+1$ convient.

☐ Si $p = 1$ alors $N = \pi_N(N) = 0$ donc $r = n+1$ et $p_j = 1$ pour tout $j \in [\![1, n+1]\!]$ convient.

☐ Sinon $1 < p < n+1$.On peut appliquer les questions **10-11** ce qui montre que N est semblable à A' avec $Y = 0$ et Z nilpotente d'indice au plus p (question **13**).

Par hypothèse de récurrence, comme Z est dans $\mathcal{M}_{n+1-p}(\mathbb{C})$ avec $0 < n+1-p < n$ (car $1 < p < n+1$), Z est semblable à une matrice de type voulue. Plus précisément, il existe P inversible dans $\mathcal{M}_{n+1-p}(\mathbb{C})$, un entier naturel non nul r' et des entiers p'_j non nuls ($j = 1..r'$) avec

$$PZP^{-1} = \begin{pmatrix} J_{p'_1}(0) & & & (0) \\ & J_{p'_2}(0) & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & J_{p'_{r'}}(0) \end{pmatrix}$$

donc
$$A' = \left(\begin{array}{c|c} J_p(0) & (0) \\ \hline (0) & Z \end{array}\right) = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} I_p & (0) \\ \hline (0) & P^{-1} \end{array}\right)}_{=Q \in GL_{n+1}(\mathbb{C})} \left(\begin{array}{c|cccc} J_p(0) & (0) & (0) & (0) & (0) \\ \hline (0) & J_{p'_1}(0) & & & (0) \\ (0) & & J_{p'_2}(0) & & \\ (0) & & & \ddots & \\ (0) & (0) & & & J_{p'_{r'}}(0) \end{array}\right) \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} I_p & (0) \\ \hline (0) & P \end{array}\right)}_{=Q^{-1}}$$

En posant $r = r'+1$, $p_1 = p$ et $p_j = p'_{j-1}$ pour j dans $2..r'+1 = r$, on obtient bien que A' est semblable à une matrice de type voulu, donc N qui est semblable à A' aussi.

Tous les cas de figures ont été traités et on a bien prouvé que H_{n+1} est vraie (sous l'hypothèse que H_ℓ le soit pour tout ℓ appartenant à $[\![1, n]\!]$).

Donc par récurrence forte (comme H_1 est satisfaite), $\boxed{H_n \text{ est vraie pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*.}$

15) • Le polynôme caractéristique χ_A de A est scindé car dans $\mathbb{C}[X]$ et non constant. Ses racines sont exactement les valeurs propres de A, donc comme il est unitaire, on obtient : $\chi_A = \prod_{k=1}^{s} (X - \lambda_\ell)^{\alpha_\ell}$.

Les λ_ℓ étant 2 à 2 distincts, les polynômes $P_\ell = (X - \lambda_\ell)^{\alpha_\ell}$ sont 2 à 2 premiers entre eux et le lemme des noyaux assure donc

$$\ker(\chi_A(f)) = \bigoplus_{\ell=1}^{s} \ker(P_\ell(f)) \text{ i.e. } \boxed{\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\ell=1}^{s} F_\ell}$$

En effet, χ_A est aussi le polynôme caractéristique de f (sa matrice dans une base est A) donc est annulateur de f d'après le théorème de Cayley-Hamilton : $\chi_A(f) = 0$.

• Ainsi la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$ i.e. $\boxed{A \text{ est semblable à la matrice } A'}$ de f dans une base $B = (B_1, \cdots, B_s)$ de $\mathbb{C}^n$ adaptée à la décomposition précédente (chaque B_i est une base de F_i) en somme directe de $\mathbb{C}^n$.

Pour tout ℓ, l'endomorphisme $P_\ell(f)$ est un polynôme en f, donc commute avec f et donc f laisse stable $\mathrm{Ker}(P_\ell(f)) = F_\ell$. Ainsi la matrice A' de f dans B est diagonale par blocs et chaque bloc est la matrice M_ℓ dans la base B_ℓ de F_ℓ de l'endomorphisme f_ℓ induit par f sur F_ℓ:

$$\boxed{A' = \begin{pmatrix} M_1 & & & (0) \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & M_s \end{pmatrix}}$$

L'endomorphisme $(f_\ell - \lambda_\ell Id_{F_\ell})^{\alpha_\ell} = P_\ell(f_\ell)$ est donc l'endomorphisme induit par $P_\ell(f)$ sur F_ℓ, c'est donc l'endomorphisme nul. Donc $f_\ell - \lambda_\ell Id_{F_\ell}$ est nilpotent et sa matrice N_ℓ dans la base B_ℓ aussi.
Finalement $f_\ell = \lambda_\ell Id_{F_\ell} + (f_\ell - \lambda_\ell Id_{F_\ell})$ a pour matrice dans la base B_ℓ de F_ℓ la matrice $\boxed{M_\ell = \lambda_\ell I_{n_\ell} + N_\ell}$ où n_ℓ est la dimension de F_ℓ.
On a donc la forme voulue dès que l'on aura prouvé que $n_\ell = \alpha_\ell$ pour tout ℓ. Or par construction, le polynôme P_ℓ est annulateur de f_ℓ donc de sa matrice M_ℓ dans la base B_ℓ. Ainsi les valeurs propres de M_ℓ i.e. les racines de son polynôme caractéristique χ_{M_ℓ} sont à chercher parmi les racines de P_ℓ qui n'en admet qu'une λ_ℓ. Comme χ_{M_ℓ} est scindé (car dans $C[X]$), unitaire et de degré $n_\ell = \dim(F_\ell)$, on a pour tout ℓ, $\chi_{M_\ell} = (X - \lambda_\ell)^{n_\ell}$. Ainsi par déterminant diagonal par blocs, on obtient $\chi_A = \chi_{A'} = \prod_{\ell=1}^{s} \chi_{M_\ell}$ i.e. $\prod_{\ell=1}^{s}(X - \lambda_\ell)^{\alpha_\ell} = \prod_{\ell=1}^{s}(X - \lambda_\ell)^{n_\ell}$ donc par unicité de la décomposition en facteurs irréductibles, on a bien $\boxed{n_\ell = \alpha_\ell}$ pour tout ℓ, ce qui termine la preuve demandée.

16) Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
La question **15** assure que A est semblable à une matrice diagonale par blocs D avec des blocs diagonaux de type $D_\ell = \lambda_\ell I_{\alpha_\ell} + N_\ell$ avec N_ℓ nilpotente. Il existe donc P inversible avec $A = PDP^{-1}$.
Fixons ℓ.
Comme N_ℓ est nilpotente, via la question 14, N_ℓ est semblable à une matrice $D'_\ell = \mathrm{diag}(J_{p_1}(0), \ldots, J_{p_r}(0))$. Il existe donc une matrice inversible Q_ℓ avec $N_\ell = Q_\ell^{-1} D'_\ell Q_\ell$ ainsi $D_\ell = \lambda_\ell I_{\alpha_\ell} + N_\ell = Q_\ell^{-1}(\lambda_\ell I_{\alpha_\ell} + D'_\ell)Q_\ell$ est semblable à $\lambda_\ell I_{\alpha_\ell} + D'_\ell = \mathrm{diag}(J_{p_1}(\lambda_\ell), \ldots, J_{p_r}(\lambda_\ell))$.
Suivant la valeur de λ_ℓ (nul ou pas), la question **7** ou **9** permet de trouver des matrices M'_j avec $M'_j e^{M'_j} = J_{p_j}(\lambda_\ell)$, donc avec $M_\ell = \begin{pmatrix} M'_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & M'_r \end{pmatrix}$, un calcul matriciel par blocs donne :

$$M_\ell e^{M_\ell} = \begin{pmatrix} M'_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & M'_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{M'_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & e^{M'_r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{p_1}(\lambda_\ell) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & J_{p_r}(\lambda_\ell) \end{pmatrix} = Q_\ell D_\ell Q_\ell^{-1}$$

Comme à la question **7**, on a donc aussi en notant $\widetilde{M_\ell} = Q_\ell^{-1} M_\ell Q_\ell$, l'égalité $\widetilde{M_\ell} e^{\widetilde{M_\ell}} = Q_\ell^{-1} M_\ell e^{M_\ell} Q_\ell = D_\ell$.
Un calcul par blocs, en tout point similaire au précédent, assure qu'en notant $\widetilde{M}$ la matrice diagonale par blocs $\widetilde{M} = \mathrm{diag}(\widetilde{M_1}, \cdots, \widetilde{M_s})$, on a $\widetilde{M} e^{\widetilde{M}} = D$ et donc avec $B = P\widetilde{M}P^{-1}$, on obtient :
$Be^B = P\widetilde{M} e^{\widetilde{M}} P^{-1} = PDP^{-1} = A$
Finalement, on a écrit toute matrice A sous la forme Be^B ce qui prouve que
$\boxed{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto Ae^A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ est surjective.}}$

MP 21-22

CENTRALE PSI 2001 PREMIERE EPREUVE

Eléments de correction

Partie I - Généralités sur les suites orthonormales

I.A

D'une part $(C_0 \mid C_0) = \int_0^1 1dt = 1$ ainsi que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (C_0 \mid C_n) = \sqrt{2}\int_0^1 \cos(n\pi t)\, dt = \left[\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi t)\right]_0^1 = 0$$

D'autre part, étant donnés deux entiers naturels non nuls distincts n et p, on a

$$(C_n \mid C_n) = 2\int_0^1 \cos^2(n\pi t)\, dt = \int_0^1 (1+\cos(2n\pi t))\, dt = \left[t + \frac{1}{2n\pi}\sin(2n\pi t)\right]_0^1 = 1$$

$$\begin{aligned}(C_n \mid C_p) &= 2\int_0^1 \cos(n\pi t)\cos(p\pi t)\, dt = \int_0^1 (\cos((n+p)\pi t) + \cos((n-p)\pi t))\, dt \\ &= \left[\frac{\sin((n+p)\pi t)}{(n+p)\pi} + \frac{\sin((n-p)\pi t)}{(n-p)\pi}\right]_0^1 = 0\end{aligned}$$

Ainsi la suite C est orthonormale.

De la même manière, étant donnés deux entiers naturels distincts n et p, on a

$$(S_n \mid S_n) = 2\int_0^1 \sin^2((n+1)\pi t)\, dt = \int_0^1 (1-\cos(2(n+1)\pi t))\, dt = \left[t - \frac{\sin(2(n+1)\pi t)}{2(n+1)\pi}\right]_0^1 = 1$$

$$\begin{aligned}(S_n \mid S_p) &= 2\int_0^1 \sin((n+1)\pi t)\sin((p+1)\pi t)\, dt = \int_0^1 (\cos((n-p)\pi t) - \cos((n+p+2)\pi t))\, dt \\ &= \left[\frac{\sin((n-p)\pi t)}{(n-p)\pi} - \frac{\sin((n+p+2)\pi t)}{(n+p+2)\pi}\right]_0^1 = 0\end{aligned}$$

Donc la suite S est également orthonormale.

I.B

I.B.1) Selon la caractérisation métrique du projeté orthogonal vue en classe, on a $d_\Phi^n(f) = \|f - \prod_\Phi^n(f)\|$.
Ayant $f = \prod_\Phi^n(f) + (f - \prod_\Phi^n(f))$ et $\prod_\Phi^n(f) \perp (f - \prod_\Phi^n(f))$, le théorème de Pythagore donne

$$\|f\|^2 = \|\textstyle\prod_\Phi^n(f)\|^2 + \|f - \prod_\Phi^n(f)\|^2 = \|\prod_\Phi^n(f)\|^2 + d_\Phi^n(f)^2$$

I.B.2) D'après la question précédente, on a

$$\forall f \in E,\ \|\textstyle\prod_\Phi^n(f)\| \leqslant \|f\|$$

et ainsi $\sup\limits_{\|f\|=1} \|\prod_\Phi^n(f)\| \leqslant 1$.

Par ailleurs $\prod_\Phi^n(\Phi_0) = \Phi_0$ et ainsi $\|\prod_\Phi^n(\Phi_0)\| = \|\Phi_0\| = 1$, ce qui entraîne $\boxed{\sup\limits_{\|f\|=1} \|\prod_\Phi^n(f)\| = 1}$.

I.B.3) Comme la famille $(\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ est une base orthonormée de V_Φ^n (famille génératrice orthonormée donc libre), d'après le cours, on a

$$\textstyle\prod_\Phi^n(f) = \sum\limits_{k=0}^{n} (\Phi_k \mid f)\, \Phi_k$$

Par conséquent, pour tout entier naturel n, on a

$$\|\prod_\Phi^n(f)\|^2 \leqslant \|f\|^2 \qquad \text{ou encore} \qquad \sum_{k=0}^{n}(\Phi_k \mid f)^2 \leqslant \|f\|^2$$

Ainsi la suite des sommes partielles de la série $\sum(\Phi_k \mid f)^2$, à termes positifs, est majorée, ce qui assure la convergence de la série $\sum(\Phi_k \mid f)^2$ et, par passage à la limite, la majoration

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(\Phi_k \mid f)^2 \leqslant \|f\|^2$$

(inégalité de Bessel).

I.C

I.C.1)

a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Notons N un entier naturel tel que $f_k \in V_\Phi^N$: alors, la suite $(V_\Phi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante, on a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Longrightarrow f_k \in V_\Phi^n$$

et ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Longrightarrow \prod_\Phi^n(f_k) = f_k$$

ce qui conduit à

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Longrightarrow (f - \prod_\Phi^n(f) = f - f_k + \prod_\Phi^n(f_k - f))$$

b) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Comme la suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans E, c'est-à-dire $\|f - f_k\| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, il existe un entier naturel k, que l'on fixe, tel que $\|f - f_k\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. En choisissant N comme dans la question précédente, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à N, le projecteur orthogonal $\prod_\Phi^n$ est $1-$lipschitzien, et ce qui précède donne

$$\|f - \prod_\Phi^n(f)\| \leqslant \|f - f_k\| + \|\prod_\Phi^n(f_k - f)\| \leqslant 2\|f - f_k\| \leqslant \varepsilon$$

En conclusion, on a $\|f - \prod_\Phi^n(f)\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

I.C.2) D'une part, si la suite orthonormale Φ est totale, étant donné f appartenant à E, f est limite d'une suite d'éléments de V_Φ et, selon la question précédente, on a $\|f - \prod_\Phi^n(f)\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Réciproquement, supposant (ii), pour tout élément f de E la suite $(\prod_\Phi^n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de V_Φ converge vers f dans E, ce qui assure que la suite orthonormale Φ est totale.

I.C.3) Supposons la suite orthonormale Φ totale. Soit $f \in E$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|f\|^2 = \|\prod_\Phi^n(f)\|^2 + \|f - \prod_\Phi^n(f)\|^2 = \|\prod_\Phi^n(f)\|^2 + d_\Phi^n(f)^2 = \sum_{k=0}^{n}(\Phi_k \mid f)^2 + d_\Phi^n(f)^2$$

Par passage à la limite, ayant $\|f - \prod_\Phi^n(f)\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty}(\Phi_k \mid f)^2 = \|f\|^2}$$

et ensuite

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ d_\Phi^n(f)^2 = \sum_{k=n+1}^{+\infty}(\Phi_k \mid f)^2}$$

Partie II - Fonctions lipschitziennes

II.A - Propriétés élémentaires.

II.A.1) D'une part $Lip\,(I, \mathbf{R})$ est une partie (toute fonction lipschitzienne est continue) non vide (la fonction nulle sur I est lipschitzienne) de $C^0\,(I, \mathbf{R})$.

D'autre part soit $(f, g, \alpha) \in Lip\,(I, \mathbf{R})^2 \times \mathbf{R}$. Si f, resp. g, est lipschitzienne de rapport C, resp. D, alors

$$\forall\,(x, y) \in I^2,\ |(\alpha f + g)\,(x) - (\alpha f + g)\,(y)| \leqslant (|\alpha|\,C + D)\,|x - y|$$

ce qui signifie que $\alpha f + g$ est lipschitzienne de rapport $|\alpha|\,C + D$.

Par caractérisation, $Lip\,(I, \mathbf{R})$ est un sous-espace vectoriel de $C^0\,(I, \mathbf{R})$.

En général, le produit de deux fonctions lipschitziennes f et g n'est pas une fonction lipschitzienne, comme la prouve l'exemple défini par

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f\,(x) = g\,(x) = x$$

Soit $f \in Lip\,(I, \mathbf{R})$. Par définition, l'ensemble $\left\{\left|\dfrac{f\,(x) - f\,(y)}{x - y}\right| \mid (x, y) \in I^2, x \neq y\right\}$ est non vide et majoré. D'après l'axiome de la borne supérieure dans $\mathbf{R}$, le réel noté $k\,(f)$ dans l'énoncé est bien défini.

II.A.2) Supposons l'intervalle I compact. D'une part, la fonction constante égale à 1 (élément unité de l'algèbre $C^0\,(I, \mathbf{R})$) appartient à $Lip\,(I, \mathbf{R})$.

De plus, soit $(f, g) \in Lip\,(I, \mathbf{R})^2$: étant continues sur un compact, les fonctions f et g sont bornées. Soit $(x, y) \in I^2$. Avec les notations de la question précédente, on peut écrire

$$f\,(x)\,g\,(x) - f\,(y)\,g\,(y) = f\,(x)\,(g\,(x) - g\,(y)) + (f\,(x) - f\,(y))\,g\,(y)$$

puis

$$|f\,(x)\,g\,(x) - f\,(y)\,g\,(y)| \leqslant |f\,(x)\,(g\,(x) - g\,(y))| + |(f\,(x) - f\,(y))\,g\,(y)| \leqslant (\|f\|_\infty D + \|g\|_\infty C)\,|x - y|$$

ce qui prouve que fg est lipschitzienne sur I.

Par conséquent $Lip\,(I, \mathbf{R})$ est une sous-algèbre de $C^0\,(I, \mathbf{R})$.

La fonction $\begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$ est continue, non lipschitzienne sur $[0, 1]$, car $\dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$.

II.B

Soit $f \in C^1\,(I, \mathbf{R})$.

Supposons f lipschitzienne. Soit $x \in I$. Par définition, on a

$$\forall y \in I \setminus \{x\},\ \left|\frac{f\,(y) - f\,(x)}{y - x}\right| \leqslant k\,(f)$$

Par passage à la limite, on en déduit $|f'\,(x)| \leqslant k\,(f)$, et ainsi f' est bornée.

Réciproquement, supposant f' bornée, l'inégalité des accroissements finis fournit

$$\forall\,(x, y) \in I^2,\ |f\,(x) - f\,(y)| \leqslant \|f'\|_\infty\,|x - y|$$

et ainsi f est lipschitzienne. D'où l'équivalence demandée.

La première implication donne $\forall x \in I,\ |f'\,(x)| \leqslant k\,(f)$ puis (par définition de la borne supérieure) $\|f'\|_\infty \leqslant k\,(f)$.

La seconde implication (par définition de la borne supérieure) donne $k\,(f) \leqslant \|f'\|_\infty$.

En conclusion $\boxed{k\,(f) = \|f'\|_\infty = \sup_I |f'|}$.

II.C
Avec les notations et hypothèses de l'énoncé, il existe un réel K, que l'on fixe, tel que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ k(f_n) \leqslant K$$
Soit $(x,y) \in I^2$. Ayant
$$\forall n \in \mathbb{N},\ |f_n(x) - f_n(y)| \leqslant k(f_n)|x-y| \leqslant K|x-y|$$
un passage à la limite fournit
$$|f(x) - f(y)| \leqslant K|x-y|$$
ce qui prouve que f est lipschitzienne de rapport K.

II.D Soit $g \in Lip([0,1], \mathbb{R})$ telle que $k(g) \leqslant 1$.

II.D.1) Pour répondre à la question posée, il suffit de considérer la fonction $\widehat{g}$ obtenue en "prolongeant g par des constantes", c'est-à-dire
$$\widehat{g}_{|[0,1]} = g \qquad \forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ \widehat{g}(x) = g(0) \qquad \forall x \in]1,+\infty[,\ \widehat{g}(x) = g(1)$$
II.D.2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme la fonction $\widehat{g}$ est continue sur $\mathbb{R}$, le "théorème fondamental" de l'analyse assure que g_n est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall x \in \mathbb{R},\ g_n'(x) = n\left(\widehat{g}\left(x + \frac{1}{n}\right) - \widehat{g}(x)\right)$$
Comme $\widehat{g}$ est lipschitzienne de rapport 1, on en déduit
$$\forall x \in \mathbb{R},\ |g_n'(x)| \leqslant 1$$
En outre
$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R},\ |g_n(x) - \widehat{g}(x)| = n\left|\int_x^{x+1/n} (\widehat{g}(t) - \widehat{g}(x))\,dt\right|$$
ce qui conduit à
$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R},\ |g_n(x) - \widehat{g}(x)| \leqslant n\int_x^{x+1/n} |\widehat{g}(t) - \widehat{g}(x)|\,dt \leqslant n\int_x^{x+1/n} (t-x)\,dt$$
et finalement à
$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R},\ |g_n(x) - \widehat{g}(x)| \leqslant \frac{1}{2n}$$
Ce qui précède assure la convergence uniforme de la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers $\widehat{g}$ sur $\mathbb{R}$.

II.E Soit $f \in C^1([0,1], \mathbb{R})$.

II.E.1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une intégration par parties donne
$$(f \mid C_n) = \sqrt{2}\int_0^1 f(t)\cos(n\pi t)\,dt = \sqrt{2}\left(\left[f(t)\frac{\sin(n\pi t)}{n\pi}\right]_0^1 - \int_0^1 f'(t)\frac{\sin(n\pi t)}{n\pi}dt\right)$$
c'est-à-dire
$$\boxed{(f \mid C_n) = -\frac{1}{n\pi}(f' \mid S_{n-1})}$$
II.E.2) Comme la suite S est orthonormale, d'après la question I.B.3) (inégalité de Bessel), la série $\sum_{n\geqslant 1}(f' \mid S_{n-1})^2$ est convergente et de somme majorée par $\|f'\|^2$. Compte tenu du résultat de la question précédente, on en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 1} n^2 (f \mid C_n)^2$ est convergente et de somme majorée par $\dfrac{1}{\pi^2}\|f'\|^2$.

II.F Soit $f \in Lip([0,1], \mathbb{R})$.

II.F.1) Si la fonction f est constante, les propriétés demandées se vérifient aisément.

Supposons donc f non constante, de sorte que $k(f) \neq 0$. Posons $g = \dfrac{f}{k(f)}$: la fonction g est lipschitzienne de rapport 1. Selon la question II.D, g est la limite uniforme d'une suite $(g_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions de classe C^1 sur $[0,1]$ et de dérivées bornées par 1.

Selon la question II.E, pour tout entier naturel non nul p, la série $\sum_{n\geqslant 1} n^2 (g_p \mid C_n)^2$ est convergente et de somme majorée par $\dfrac{1}{\pi^2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{k=1}^{n} k^2 (g_p \mid C_k)^2 \leqslant \frac{1}{\pi^2} \tag{1}$$

L'inégalité de Schwarz et la domination de $\| \ \|$ par $\| \ \|_\infty$ donnent

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \ \forall k \in [\![1,n]\!], \ |(g_p \mid C_k) - (g \mid C_k)| \leqslant \|g_p - g\| \, \|C_k\| \leqslant \|g_p - g\|_\infty$$

Par conséquent, par passage à la limite (quand p tend vers l'infini) dans la relation (1), on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 (g \mid C_k)^2 \leqslant \frac{1}{\pi^2}$$

Ainsi la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n\geqslant 1} n^2 (g \mid C_n)^2$, de terme général positif, est majoré, ce qui prouve la convergence de cette série ainsi que l'inégalité

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 (g \mid C_n)^2 \leqslant \frac{1}{\pi^2}$$

Le report de la valeur de g donne finalement

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 (f \mid C_n)^2 \leqslant \frac{1}{\pi^2} k(f)^2}$$

II.F.2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après le résultat admis par l'énoncé après la question I.C.3), la famille C est totale dans E et ainsi on a $d_C^{n-1}(f)^2 = \sum_{k=n}^{+\infty} (f \mid C_k)^2$ puis

$$d_C^{n-1}(f)^2 \leqslant \frac{1}{n^2} \sum_{k=n}^{+\infty} k^2 (f \mid C_k)^2 \leqslant \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 (f \mid C_k)^2 \leqslant \frac{1}{n^2} \frac{1}{\pi^2} k(f)^2$$

On a donc bien

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ d_C^{n-1}(f) \leqslant \frac{1}{n\pi} k(f)}$$

Partie III - Constantes de Lipschitz d'une suite orthonormale

III.A

Soient Φ et Ψ deux suites orthonormales de E. Soit $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.

D'après la question I.B.1), on a

$$\forall j \in [\![0,m]\!],\ d_\Phi^{n-1}(\psi_j)^2 = \|\psi_j\|^2 - \sum_{k=0}^{n-1} (\Phi_k \mid \psi_j)^2 = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} (\Phi_k \mid \psi_j)^2$$

et ainsi, par sommation, on en tire

$$\sum_{j=0}^{m} d_\Phi^{n-1}(\psi_j)^2 = m+1-\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n-1} (\Phi_k \mid \psi_j)^2 = m+1-\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m} (\Phi_k \mid \psi_j)^2 = m+1-\sum_{k=0}^{n-1} \|\prod\nolimits_\Psi^m (\Phi_k)\|^2$$

Or, d'après la question I.B.3), on a

$$\forall k \in [\![0,n-1]\!],\ \|\prod\nolimits_\Psi^m (\Phi_k)\|^2 \leqslant \|\Phi_k\|^2\ (=1)$$

Finalement

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ n + \sum_{j=0}^{m} d_\Phi^{n-1}(\psi_j)^2 \geqslant m+1}$$

Notamment, en remplaçant m par $2n-1$ dans la relation ci-dessus, on trouve

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{j=0}^{2n-1} d_\Phi^{n-1}(\psi_j)^2 \geqslant n}$$

III.B

Soit Ψ une suite orthonormale de E. On suppose $\forall n \in \mathbb{N},\ \psi_n \in Lip([0,1],\mathbb{R})$.

III.B.1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Selon la question II.F.2), en remplaçant Φ par C, on a

$$\forall j \in [\![0,2n-1]\!],\ k(\psi_j) \geqslant n\pi d_C^{n-1}(\psi_j)$$

Par conséquent

$$\sum_{j=0}^{2n-1} k(\psi_j)^2 \geqslant (n\pi)^2 \sum_{j=0}^{2n-1} d_C^{n-1}(\psi_j)^2$$

ce qui, selon le résultat de III.A, permet de conclure

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{j=0}^{2n-1} k(\psi_j)^2 \geqslant n^3\pi^2}$$

III.B.2) Si la suite $(k(\psi_n))_{n\in\mathbb{N}}$ était bornée par un réel M, on aurait notamment

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{j=0}^{2n-1} k(\psi_j)^2 \leqslant 2nM^2$$

ce qu'interdit le résultat de la question III.B.1). Par conséquent la suite $(k(\psi_n))_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée.

III.B.3) Si la suite $(k(\psi_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tendait pas vers $+\infty$, on pourrait en extraire une sous-suite $\left(k\left(\psi_{\varkappa(n)}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée. Mais la suite $\left(\psi_{\varkappa(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ serait, elle aussi, une suite orthonormale de fonctions lipschitziennes sur $[0,1]$, ce qui contredirait la propriété obtenue à la question III.B.2).

En conclusion $\boxed{k(\psi_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty}$.

III.B.4) D'après la question II.B, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ k(C_n) = \sup\limits_{[0,1]} |C_n'|$. Par conséquent

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ k(C_n) = n\pi\sqrt{2}}$$

III.B.5) Supposons, de plus, que la suite $(k(\psi_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
Le résultat de la question III.B.1) donne

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n^3\pi^2 \leqslant \sum_{j=0}^{2n-1} k(\psi_j)^2 \leqslant 2nk(\psi_{2n-1})^2$$

et ainsi $k(\psi_{2n-1}) \geqslant \dfrac{n\pi}{\sqrt{2}} \geqslant \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}(2n-1)$.

En outre $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ k(\psi_{2n}) \geqslant k(\psi_{2n-1}) \geqslant \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}2n$.

Finalement, en posant $\boxed{\Gamma = \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}}$, on a bien $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ k(\psi_n) \geqslant \Gamma n$.

Partie IV - Constantes de Lipschitz des polynômes de Legendre

IV.A

Avec les notations de l'énoncé, étant donnés deux entiers naturels m et n, le résultat que l'énoncé demande d'admettre fournit

$$\begin{aligned}
(L_n(2X-1) \mid L_m(2X-1)) &= \frac{1}{2^n n!}\frac{1}{2^m m!}\int_0^1 P_n(2x-1)P_m(2x-1)\,dx \\
&\underset{t=2x-1}{=} \frac{1}{2^n n!}\frac{1}{2^m m!}\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} P_n(t)P_m(t)\,dt \\
&= \frac{1}{2n+1}\delta_{m,n}
\end{aligned}$$

Par conséquent il existe une unique suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ répondant à la question posée et elle est donnée par

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_n = \sqrt{2n+1}}$$

IV.B

IV.B.1) Soit $f \in E$. D'après les questions I.B.1) et I.B.3), on a

$$d_Q^n(f)^2 - d_Q^{n+1}(f)^2 = \left(\|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n-1}(Q_k \mid f)^2\right) - \left(\|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n}(Q_k \mid f)^2\right) = (Q_n \mid f)^2$$

Par conséquent la suite $\left(d_Q^n(f)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

IV.B.2) Utilisons la caractérisation de la question I.C.2) pour montrer que la suite Q est totale dans E.

Soit $f \in E$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Selon le théorème de Weierstraß, il existe un polynôme P, que l'on fixe, tel que $\|f-P\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

Il existe un entier naturel n_0, que l'on fixe, tel que $P \in V_Q^{n_0}$: alors, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0, $P \in V_Q^n$. Par conséquent

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Longrightarrow d_Q^n(f) \leqslant d_Q^{n_0}(f) \leqslant \|f-P\| \leqslant \|f-P\|_\infty \leqslant \varepsilon$$

Par conséquent $d_Q^n(f) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ ou encore $\left\|\prod_Q^n(f) - f\right\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Ceci étant vrai pour tout élément f de E, la caractérisation de la question I.C.2) assure que la suite Q est totale.

IV.B.3) Soit $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite orthonormale de E vérifiant : pour tout entier naturel n, Φ_n est une fonction polynomiale de degré n.

Commençons par remarquer que l'on a

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \deg Q_k = k$$

On en déduit $\forall n \in \mathbb{N},\ V_Q^n = \text{vect}\left((Q_k)_{0\leqslant k\leqslant n}\right) = \mathbb{R}_n[X]$.

A tout entier naturel n, on associe le prédicat $\mathcal{P}(n)$: $\Phi_n = Q_n$ ou $\Phi_n = -Q_n$.

Tout d'abord $Q_0 = 1$ et, comme Φ_0 est normé, on doit avoir $\Phi_0 = 1$ ou $\Phi_0 = -1$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

Φ_{n+1} appartient à V_Q^{n+1}, plus précisément Φ_{n+1} appartient à l'orthogonal de V_Q^n dans V_Q^{n+1}, qui est la droite engendrée par Q_{n+1}. Les deux vecteurs Φ_{n+1} et Q_{n+1} sont donc colinéaires, et étant normés, nécessairement $\Phi_{n+1} = Q_{n+1}$ ou $\Phi_{n+1} = -Q_{n+1}$, ce qui prouve $\mathcal{P}(n+1)$.

En conclusion $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$, c'est-à-dire

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \Phi_n = Q_n \text{ ou } \Phi_n = -Q_n}$$

IV.C

Soit $n \in \mathbb{N}$. La formule de Leibniz donne

$$\begin{aligned} P_n &= U_n^{(n)} = \left((X-1)^n (X+1)^n\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left((X-1)^n\right)^{(n-k)} \left((X+1)^n\right)^{(k)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathcal{A}_n^{n-k} (X-1)^k \mathcal{A}_n^k (X+1)^{n-k} = n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (X-1)^k (X+1)^{n-k} \end{aligned}$$

IV.D Soit $n \in \mathbb{N}$.

IV.D.1) Soit $(x,\theta) \in [-1,+1] \times [-\pi,+\pi]$. Le calcul donne

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{\frac{1+x}{2}} + i\sqrt{\frac{1-x}{2}}e^{i\theta}\right)\left(\sqrt{\frac{1+x}{2}} + i\sqrt{\frac{1-x}{2}}e^{-i\theta}\right) &= \frac{1+x}{2} + i\sqrt{\frac{1-x^2}{4}}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right) - \frac{1-x}{2} \\ &= x + i\sqrt{1-x^2}\cos\theta \end{aligned}$$

En reportant cette expression, on peut écrire

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \left(x + i\sqrt{1-x^2}\cos\theta\right)^n d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \left(\sqrt{\frac{1+x}{2}} + i\sqrt{\frac{1-x}{2}}e^{i\theta}\right)^n \left(\sqrt{\frac{1+x}{2}} + i\sqrt{\frac{1-x}{2}}e^{-i\theta}\right)^n d\theta$$

Or on a $\forall k \in \mathbb{Z},\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} e^{ik\theta} d\theta = \delta_{k,0}$.

Par conséquent

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \left(x + i\sqrt{1-x^2}\cos\theta\right)^n d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{\ell} \left(\sqrt{\frac{1+x}{2}}\right)^{2n-k-\ell} i^{k+\ell} \left(\sqrt{\frac{1-x}{2}}\right)^{k+\ell} e^{i(k-\ell)\theta} d\theta \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \left(\sqrt{\frac{1+x}{2}}\right)^{2n-2k} i^{2k} \left(\sqrt{\frac{1-x}{2}}\right)^{2k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \frac{1}{2^n} (1+x)^{n-k} (x-1)^k = \frac{1}{2^n n!} P_n(x) = L_n(x) \end{aligned}$$

IV.D.2) D'une part
$$\forall (x,\theta) \in [-1,+1] \times [-\pi,+\pi]\,,\ \left|x + i\sqrt{1-x^2}\cos\theta\right|^2 = x^2 + \left(1-x^2\right)\cos^2\theta$$
et ainsi $\forall (x,\theta) \in [-1,+1] \times [-\pi,+\pi]$, $\left|x + i\sqrt{1-x^2}\cos\theta\right|^2 \leqslant 1$. Ainsi, selon l'expression de L_n obtenue à la question précédente, on en déduit
$$\forall x \in [-1,+1]\,,\ |L_n(x)| \leqslant 1$$
Cependant on remarque que l'on a $L_n(1) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} d\theta = 1$. De la même façon, on a $L_n(-1) = (-1)^n$.

Par conséquent $\boxed{\max\limits_{[-1,+1]} |L_n| = 1}$.

Soit $x \in \left]-1,+1\right[$. Dans ce cas
$$|L_n(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \left|x + i\sqrt{1-x^2}\cos\theta\right|^n d\theta$$
et ainsi
$$1 - |L_n(x)| \geqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \left(1 - \left(\cos^2\theta + x^2\sin^2\theta\right)^{n/2}\right) d\theta > 0$$
car la dernière intégrale contient une fonction continue, positive sur le segment $[-\pi,+\pi]$ et qui n'est pas la fonction nulle car $x \in \left]-1,+1\right[$. En conclusion les éléments de $[-1,+1]$ y réalisant le maximum de $|L_n|$ sont -1 et $+1$.

IV.E Soit $n \in \mathbb{N}$.

IV.E.1) Ainsi que le fait constater l'énoncé, on a $\left(X^2-1\right)U_n' = 2nXU_n$. En dérivant $n+1$ fois cette égalité, on trouve
$$\left(X^2-1\right)U_n^{(n+2)} + 2(n+1)XU_n^{(n+1)} + n(n+1)U_n^{(n)} = 2nXU_n^{(n+1)} + 2n(n+1)U_n^{(n)}$$
ou encore
$$\left(X^2-1\right)P_n'' + 2(n+1)XP_n' + n(n+1)P_n = 2nXP_n' + 2n(n+1)P_n$$
c'est-à-dire
$$\boxed{\left(1-X^2\right)P_n'' - 2XP_n' + n(n+1)P_n = 0}$$
IV.E.2) A partir de la définition de L_n, la relation précédente fournit
$$\left(1-X^2\right)L_n'' - 2XL_n' + n(n+1)L_n = 0$$
Par ailleurs, tenant compte de l'égalité de IV.E.1), on trouve
$$\begin{aligned}
2^{n+1}(n+1)!\,L_{n+1}' &= P_{n+1}' = U_{n+1}^{(n+2)} = \left(\left(X^2-1\right)U_n\right)^{(n+2)} \\
&= \left(X^2-1\right)U_n^{(n+2)} + 2(n+2)XU_n^{(n+1)} + (n+1)(n+2)U_n^{(n)} \\
&= \left(X^2-1\right)P_n'' + 2(n+2)XP_n' + (n+1)(n+2)P_n \\
&= 2(n+1)XP_n' + 2(n+1)^2P_n
\end{aligned}$$
En divisant par $2^{n+1}(n+1)!$, on aboutit à
$$\boxed{L_{n+1}' = XL_n' + (n+1)L_n} \tag{2}$$
IV.F

A la question IV.D.2), on a établi la propriété $\forall n \in \mathbb{N}$, $\max\limits_{[-1,+1]} L_n = L_n(1) = 1$.

A tout entier naturel n, associons le prédicat $\mathcal{P}(n)$: $L_n'(1) = \max\limits_{[-1,+1]} L_n'$.

D'une part, $L_0 = 1$ et $L_0' = 0$: la propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$. Alors, d'après la relation (2), on a $\forall x \in [0,1]$, $L'_{n+1}(x) = xL'_n(x)+(n+1)L_n(x)$ puis, selon $\mathcal{P}(n)$,

$$\forall x \in [0,1]\,,\ L'_{n+1}(x) \leqslant \max_{[-1,+1]} L'_n + (n+1) \max_{[-1,+1]} L_n$$

ou encore $\forall x \in [0,1]$, $L'_{n+1}(x) \leqslant L'_{n+1}(1)$. Par conséquent $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Puis $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$.

En outre, la relation (2) donne $\forall n \in \mathbb{N},\ L'_{n+1}(1) = L'_n(1) + (n+1)L_n(1)$ et une récurrence immédiate donne

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \max_{[-1,+1]} L'_n = L'_n(1) = \frac{n(n+1)}{2}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme U_n est pair, le polynôme L'_n est pair ou impair selon la parité de n.

Ayant $Q_n = \alpha_n L_n(2X-1)$ on a $Q'_n = 2\alpha_n L'_n(2X-1)$ et ainsi

$$\max_{[0,+1]} |Q'_n| = 2\alpha_n \max_{[-1,+1]} |L'_n| = 2\alpha_n L'_n(1) = \alpha_n n(n+1)$$

Finalement (voir IV.A)

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ k(Q_n) = \max_{[0,+1]} |Q'_n| = n(n+1)\sqrt{2n+1}}$$

MP 21-22

CENTRALE MP 2011 DEUXIEME EPREUVE

Eléments de correction

Partie I - Caractérisation des matrices symétriques définies positives

On notera $(\,|\,)$ le produit scalaire usuel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\|\ \|$ la norme associée.

I.A 1) $*$ On suppose A positive, soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$. Comme $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on a $\lambda \in \mathbb{R}$.
Soit alors $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre associé ; on a

$$^tXAX = \lambda\,^tXX = \lambda\|X\|^2$$

On a $\|X\|^2 > 0$, car X, vecteur propre de A, n'est pas nul et $^tXAX \geq 0$, car A est positive. On a donc $\lambda \geq 0$. Par suite $\boxed{\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+}$.

$*$ Réciproquement supposons $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$. Selon le théorème spectral, il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que $P^{-1}AP = D$. Fixons P et D et posons $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, avec donc, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i \in \mathbb{R}_+$.

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Posons $Y = P^{-1}X = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. On a, car $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$:

$$^tXAX = {}^tYPAP^{-1}Y = {}^tY\,^t\left(P^{-1}\right)AP^{-1}Y = {}^tYDY = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$$

Par suite $^tXAX \geq 0$, et ceci pour tout X appartenant à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Donc $\boxed{A \text{ est positive}}$.

2) $*$ On prouve, comme dans la question précédente, que si A est définie positive, alors $\boxed{\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*}$.

$*$ Réciproquement si $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$, on procède comme dans la question précédente, en prenant cette fois $X \neq 0$. Avec les mêmes notations, on a $^tXAX > 0$, car pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i > 0$ et $P^{-1}X \neq 0$, puisque P^{-1} est inversible et $X \neq 0$.
Comme c'est vrai pour tout X non nul, on conclut que $\boxed{A \text{ est définie positive}}$.

I.B 1) Soit $i \in [\![1, n]\!]$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \end{pmatrix}$ une colonne non nulle.

En notant $Y = \begin{pmatrix} X \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $^tYAY = {}^tXA^{(i)}X$. Comme A est définie positive et $Y \neq 0$, on a $^tXA^{(i)}X > 0$, et ceci pour toute colonne X non nulle. Donc $A^{(i)}$ est symétrique définie positive. D'après la question IA1, on en déduit $\mathrm{Sp}\left(A^{(i)}\right) \subset \mathbb{R}_+^*$. D'après le théorème spectral, $\chi_{A^{(i)}}$ est scindé sur $\mathbb{R}$, ainsi $\det\left(A^{(i)}\right)$ est égal au produit des valeurs propres de $A^{(i)}$ et donc $\boxed{\det\left(A^{(i)}\right) > 0}$.

2) Le résultat est clair pour $n = 1$.
Soit $A \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $\mathcal{P}_2$. Comme $\det(A) > 0$, on a $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$ (c'est-à-dire A définie positive) ou $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_-^*$ (c'est-à-dire A définie négative). Or $a_{1,1} > 0$, car $a_{1,1} = {}^t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, et l'on est donc dans le premier cas : A est définie positive.

3) a) Soit $(X_1, \ldots, X_{n+1})$ une base orthonormale de $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A (une telle base existe, d'après le théorème spectral) pour les valeurs propres respectives $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1})$. Comme A vérifie $\mathcal{P}_{n+1}$, on a $\det(A) > 0$ puisque $\det(A) = \prod_{k=1}^{n+1} \lambda_i$.
Comme A n'est pas définie positive, il existe i tel que $\lambda_i < 0$: par suite, il existe j différent de i tel que $\lambda_j < 0$ (sinon $\det(A) < 0$).
Les vecteurs X_i et X_j sont linéairement indépendants et vecteurs propres de A associés à des valeurs propres strictement négatives.

b) Notons x_i la dernière composante de X_i et x_j celle de X_j.
- Si $x_i = 0$, le vecteur X_i convient.
- Sinon, posons $X = x_j X_i - x_i X_j$. On a $X \neq 0$, car (X_i, X_j) est libre. Comme la famille (X_i, X_j) est orthonormale, il vient :

$$ {}^tXAX = {}^t(x_jX_i - x_iX_j)\, A\, (x_jX_i - x_iX_j) = {}^t(x_jX_i - x_iX_j)\,(x_j\lambda_iX_i - x_i\lambda_jX_j) = \lambda_i x_j^2 + \lambda_j x_i^2 $$

Comme $\lambda_i < 0$, $\lambda_j < 0$ et $x_i \neq 0$, on a $\boxed{{}^tXAX < 0}$.

c) Si $X = \begin{pmatrix} Y \\ 0 \end{pmatrix}$, avec $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a ${}^tYA^{(n)}Y < 0$ puisque ${}^tYA^{(n)}Y = {}^tXAX$, ce qui contredit l'hypothèse de récurrence. D'où la conclusion voulue.

I.C L'équivalence est vraie pour $n = 1$ et fausse dès que $n \geqslant 2$. En effet, la matrice $A = \mathrm{diag}(0, \ldots, 0, -1)$, appartenant à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, vérifie $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\det\left(A^{(i)}\right) = 0$, mais elle n'est pas positive, puisqu'elle admet -1 pour valeur propre.

Partie II - Etude d'une suite de polynômes

II.A – $<\,,\,>$ est symétrique.

– $<\,,\,>$ est une forme bilinéaire, par linéarité de l'intégrale.

– Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On a $\langle P, P\rangle \geq 0$, et si $\langle P, P\rangle = 0$, la fonction P^2 continue, positive, d'intégrale nulle sur $[0, 1]$ est nulle sur ce segment. Par suite P a une infinité de racines, donc est nul.
En conclusion $<\,,\,>$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

II.B – Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $\deg(P_n) = 2n$, on a $\boxed{\deg\left(P_n^{(n)}\right) = n}$.

– En appliquant la formule de Leibniz, on obtient : $P_n^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} ((X-1)^n)^{(k)} (X^n)^{(n-k)}$.

Lorsqu'on évalue en 1, seul le terme fourni par $k = n$ est non nul, car 1 est racine de multiplicité égale à n de $(X-1)^n$.
D'où $\boxed{P_n^{(n)}(1) = n!}$.

II.C Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons que 1 et 0 sont racines d'ordre n de P_n. Soit $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. A l'aide d'une intégration par parties répétée, on obtient, par une récurrence facile (il faudrait la rédiger) :

$$\langle Q, P_n^{(n)} \rangle = \left[Q P_n^{(n-1)} \right]_0^1 - \langle Q^{(1)}, P_n^{(n-1)} \rangle = -\langle Q^{(1)}, P_n^{(n-1)} \rangle$$

puis

$$\forall p \in [\![1, n]\!],\ \langle Q, P_n^{(n)} \rangle = (-1)^p \langle Q^{(p)}, P_n^{(n-p)} \rangle$$

et finalement $\langle Q, P_n^{(n)} \rangle = (-1)^n \langle Q^{(n)}, P_n \rangle$. Comme $\deg(Q) \leq n-1$, on a $Q^{(n)} = 0$, d'où $\langle Q, P_n^{(n)} \rangle = 0$ et $\boxed{\langle Q, L_n \rangle = 0}$.

II.D 1) Soit $n \in \mathbb{N}$. A tout entier naturel p appartenant $[\![0, n]\!]$ on associe le prédicat :

$$\mathcal{P}(p) : I_n = \frac{(-1)^p (n!)^2}{(n-p)!(n+p)!} \int_0^1 x^{n+p}(x-1)^{n-p} dx$$

- $*$ La propriété $\mathcal{P}(0)$ est clairement vérifiée.
- $*$ Soit $p \in [\![0, n-1]\!]$, tel que $\mathcal{P}(p)$ soit vraie. Montrons $\mathcal{P}(p+1)$. Pour cela intégrons par parties dans l'égalité fournie par $\mathcal{P}(p)$:

$$I_n = \frac{(-1)^p (n!)^2}{(n-p)!(n+p)!} \left[\frac{x^{n+p+1}}{n+p+1} (x-1)^{n-p} \right]_0^1 + \frac{(-1)^{p+1} (n!)^2 (n-p)}{(n-p)!(n+p+1)!} \int_0^1 x^{n+p+1}(x-1)^{n-p-1} dx$$

$$= \frac{(-1)^{p+1} (n!)^2}{(n-p-1)!(n+p+1)!} \int_0^1 x^{n+p+1}(x-1)^{n-p-1} dx$$

D'où $\mathcal{P}(p+1)$ puis $\forall p \in [\![0, n]\!],\ \mathcal{P}(p)$.

Notamment, remplaçant p par n, on obtient $\boxed{I_n = \dfrac{(-1)^n (n!)^2}{(2n+1)!}}$.

2) Le principe du calcul de la question IIC s'applique avec un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$. On en déduit :

$$\langle P_n^{(n)}, P_n^{(n)} \rangle = (-1)^n \langle P_n^{(2n)}, P_n \rangle = (-1)^n (2n)! I_n = \frac{(n!)^2}{2n+1}$$

Comme $P_n^{(n)}(1) = n!$, on en tire $\boxed{\langle L_n, L_n \rangle = \dfrac{1}{2n+1}}$.

II.E Prouvons l'existence et l'unicité de la famille de polynômes $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par récurrence sur N.

- On doit poser $K_0 = 1$ et ce polynôme répond à la question posée.
- Soit $N \in \mathbb{N}$. Supposons l'existence et l'unicité de $(K_n)_{0 \leq n \leq N}$ répondant au problème. On cherche K_{N+1} engendrant l'orthogonal dans $\mathbb{R}_{N+1}[X]$ de $\mathbb{R}_N[X]$, qui est une droite vectorielle. K_{N+1} est l'unique vecteur unitaire de cette droite, dont le coefficient dominant est strictement positif.

Tenant compte des propriétés de la famille de polynômes $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ obtenues précédemment, l'unicité justifiée ci-dessus fournit la relation : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ K_n = \sqrt{2n+1} L_n}$.

II.F Le calcul donne alors : $\boxed{K_0 = 1 \qquad K_1 = \sqrt{3}(2X-1) \qquad K_2 = \sqrt{5}(6X^2 - 6X + 1)}$.

Partie III - Matrices de Hilbert

III.A 1) On a $H_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $H_3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$.

Par toute méthode, on vérifie que ces matrices sont inversibles et l'on obtient :

$$H_2^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix} \qquad H_3^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{pmatrix}$$

2) Suivant l'indication de l'énoncé, en soustrayant la dernière colonne de Δ_{n+1} à toutes les autres, on obtient un déterminant dont le coefficient (i,j), avec $j \leq n$, est $\dfrac{1}{i+j-1} - \dfrac{1}{i+n}$ c'est-à-dire $\dfrac{n+1-j}{(i+j-1)(n+i)}$ et dont le coefficient $(i,n+1)$ est $\dfrac{1}{n+i}$.

On peut donc mettre en facteur $\dfrac{1}{n+i}$ dans la ligne i et $n+1-j$ dans la colonne j, avec $j \leq n$.

Par suite :

$$\Delta_{n+1} = \frac{\prod_{j=1}^{n} (n+1-j)}{\prod_{i=1}^{n+1} (n+i)} D_{n+1} = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} D_{n+1}$$

où D_{n+1} est le déterminant dont le coefficient (i,j), avec $j \leq n$, est $\dfrac{1}{i+j-1}$ et dont la dernière colonne est composée de 1.

En soustrayant la dernière ligne de D_{n+1} aux autres lignes, on obtient, par développement suivant la dernière colonne, $D_{n+1} = \widetilde{D_n}$, où $\widetilde{D_n}$ est le déterminant d'ordre n dont le coefficient (i,j) est $\dfrac{1}{i+j-1} - \dfrac{1}{n+j}$ c'est-à-dire $\dfrac{n+1-i}{(i+j-1)(n+j)}$.

On peut donc mettre en facteur $n+1-i$ dans la ligne i et $\dfrac{1}{n+j}$ dans la colonne j.

On en déduit $\widetilde{D_n} = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}\Delta_n$. En conclusion, on a $\boxed{\Delta_{n+1} = \dfrac{(n!)^4}{(2n)!\,(2n+1)!}\Delta_n}$.

3) Précisons la "convention" $c_1 = 1$. A tout entier naturel non nul n, on associe le prédicat :

$$\mathcal{P}(n) : \Delta_n = \frac{c_n^4}{c_{2n}}$$

* Tout d'abord $\mathcal{P}(1)$ est vraie puisque, pour $n = 1$, $\Delta_1 = 1$ et $c_1 = c_2 = 1$.
* Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$.
  En utilisant l'hypothèse de récurrence et le résultat de la question précédente, on obtient immédiatement $\Delta_{n+1} = \dfrac{c_{n+1}^4}{c_{2n+2}}$, ce qui signifie que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$. En conclusion, on a $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Delta_n = \dfrac{c_n^4}{c_{2n}}}$.

4) $*$ On a, par définition, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\det(H_n) = \Delta_n$ puis, selon la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\det(H_n) > 0$. Donc pour tout n, $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{H_n \text{ est inversible}}$.

$*$ A tout entier naturel non nul n, associons le prédicat $\mathcal{P}(n)$: $\Delta_n^{-1} \in \mathbb{N}^*$.

· D'une part $\mathcal{P}(1)$ est vraie puisque $\Delta_1^{-1} = 1$.

· De plus soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$. On a :

$$\Delta_{n+1}^{-1} = (2n+1)\left(\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right)^2 \Delta_n^{-1} = (2n+1)\binom{2n}{n}^2 \Delta_n^{-1}$$

Comme le coefficient du binôme $\binom{2n}{n}$ est entier, on en déduit que Δ_{n+1}^{-1} est entier, c'est-à-dire $\mathcal{P}(n+1)$. On a donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ ou encore pour tout entier naturel non nul n, $\boxed{\det\left(H_n^{-1}\right) \text{ est entier}}$.

5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$*$ Comme H_n est symétrique réelle, selon le théorème spectral, son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$. Notamment H_n possède n valeurs propres réelles.

$*$ On a vu que, pour tout p, $p \in [\![1, n]\!]$, $\Delta_p > 0$. On déduit des questions IB et IA que $\boxed{\operatorname{Sp}(H_n) \subset \mathbb{R}_+^*}$.

III.B 1) Comme $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie, on sait, d'après le cours, qu'il existe un unique polynôme Π_n de degré inférieur ou égal à n, projeté orthogonal de f sur $\mathbb{R}_n[X]$, qui vérifie $\|\Pi_n - f\| = \min_{Q \in \mathbb{R}_n[X]} \|Q - f\|$.

2) $*$ Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $\Pi_n \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$, on a, d'après la question précédente : $\|\Pi_{n+1} - f\| \leq \|\Pi_n - f\|$.
La suite $(\|\Pi_n - f\|)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante et, comme elle est positive, elle converge.

$*$ Soit $\varepsilon > 0$. D'après le théorème de Weierstrass, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\|P - f\|_{\infty,[0,1]} \leq \varepsilon$, puis $\|P - f\| \leq \varepsilon$. Fixons un tel polynôme P. Soit $k_0 \in \mathbb{N}$, $k_0 \geq \deg(P)$. Par définition de Π_{k_0}, on a $\|\Pi_{k_0} - f\| \leq \|P - f\| \leq \varepsilon$ et, par décroissance de la suite $(\|\Pi_n - f\|)_{n \in \mathbb{N}}$, on en déduit

$$\forall k \in \mathbb{N},\ k \geqslant k_0 \Longrightarrow \|\Pi_k - f\| \leq \varepsilon$$

Ceci signifie que la suite $(\|\Pi_n - f\|)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0. En conclusion $\boxed{\lim_{n \to +\infty} \|\Pi_n - f\| = 0}$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Etant donné (i,j), $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, le coefficient (i,j) de H_n est égal à :

$$\frac{1}{i+j-1} = \int_0^1 t^{i+j-2}\,dt = \langle X^{i-1}, X^{j-1} \rangle$$

4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le polynôme Π_n, $\Pi_n = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, est l'unique polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $f - \Pi_n \in \mathbb{R}_n[X]^\perp$, c'est-à-dire tel que

$$\forall i \in [\![0, n]\!],\ \langle \Pi_n - f, X^i \rangle = 0$$

ou encore

$$\forall i \in [\![0,n]\!]\,,\ \sum_{k=0}^{n} a_k\langle X^k, X^i\rangle = \langle f, X^i\rangle$$

D'après la question précédente, cela équivaut à :

$$H_{n+1}\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle f, X^0\rangle \\ \vdots \\ \langle f, X^n\rangle \end{pmatrix}$$

En conclusion $\boxed{\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = H_{n+1}^{-1}\begin{pmatrix} \langle f, X^0\rangle \\ \vdots \\ \langle f, X^n\rangle \end{pmatrix}}$.

5) On a :

* $\langle f, X^0\rangle = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$.
* $\langle f, X^1\rangle = \displaystyle\int_0^1 \frac{t\,dt}{1+t^2} = \frac{\ln(2)}{2}$.
* $\langle f, X^2\rangle = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^2dt}{1+t^2} = 1 - \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = 1 - \frac{\pi}{4}$.

Avec IIIA1, on en déduit

$$\boxed{a_0 = 30 - \frac{21}{4}\pi - 18\ln 2 \qquad a_1 = -180 + 36\pi + 96\ln 2 \qquad a_2 = 180 - \frac{75}{2}\pi - 90\ln 2}$$

Partie IV - Propriétés des coefficients de H_n^{-1}

IV.A Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) En utilisant la question IIIA1, on obtient :

$$\boxed{s_1 = 1 \qquad s_2 = 4 \qquad s_3 = 9}$$

"The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences" suggère la propriété :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ s_n = n^2}$$

2) a) Le système proposé s'écrit matriciellement $H_n\begin{pmatrix} a_0^{(n)} \\ \vdots \\ a_{n-1}^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Comme H_n est inversible, il admet pour unique solution :

$$\begin{pmatrix} a_0^{(n)} \\ \vdots \\ a_{n-1}^{(n)} \end{pmatrix} = H_n^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) On a donc, pour tout p, $p \in [\![0, n-1]\!]$, $a_p^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} h_{p+1,j}^{(-1,n)}$. Après changement d'indice $i = p+1$, on en déduit

$$\boxed{\sum_{p=0}^{n-1} a_p^{(n)} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_{i,j}^{(-1,n)} = s_n}$$

3) En utilisant la question IIIB3, on voit que le système de IVA2a s'écrit aussi :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} a_{j-1}^{(n)} \langle X^{j-1}, X^{i-1}\rangle = 1$$

c'est-à-dire :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \langle S_n, X^{i-1}\rangle = 1$$

Par combinaison linéaire de ces relations, on en déduit la relation demandée par l'énoncé qui s'écrit aussi

$$\forall \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ < S_n, Q >= Q(1)$$

4) On a $s_n = S_n(1)$ et, d'après la question précédente, $S_n(1) = \|S_n\|^2$. En exprimant les coordonnées du polynômes S_n dans la base orthonormale $(K_0, \ldots, K_{n-1})$ de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, il vient :

$$S_n = \sum_{p=0}^{n-1} \langle S_n, K_p\rangle K_p$$

et donc (question précédente) :

$$\boxed{s_n = \|S_n\|^2 = \sum_{p=0}^{n-1} \langle S_n, K_p\rangle^2 = \sum_{p=0}^{n-1} K_p(1)^2}$$

5) D'après la partie II, on a :

$$\forall p \in [\![0, n-1]\!],\ L_p(1) = 1,\ K_p = \sqrt{2p+1} L_p$$

d'où $\boxed{\forall p \in [\![0, n-1]\!],\ K_p(1) = \sqrt{2p+1}}$.

6) On a donc $s_n = \sum_{p=0}^{n-1} (2p+1) = 2\dfrac{n(n-1)}{2} + n$, ou encore $\boxed{s_n = n^2}$.

Un coup de chapeau à "The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences" ;-)

IV.B Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. La formule de Pascal permet d'écrire

$$\binom{2p}{p} = \binom{2p-1}{p} + \binom{2p-1}{p-1} = 2\binom{2p-1}{p}$$

ce qui prouve que $\binom{2p}{p}$ est pair.

Ensuite les égalités

$$\binom{n+p}{p}\binom{n}{p} = \frac{(n+p)!}{n!\,p!}\frac{n!}{p!\,(n-p)!} = \frac{(n+p)!}{(2p)!\,(n-p)!}\frac{(2p)!}{(p!)^2} = \binom{n+p}{2p}\binom{2p}{p}$$

prouvent que $\begin{pmatrix} n+p \\ p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$ est un entier pair.

2) Comme cela a été vu dans la partie II, on a $K_n = \sqrt{2n+1} L_n$ avec $L_n = \dfrac{1}{n!}\left((X(X-1))^n\right)^{(n)}$.

Or $(X(X-1))^n = \sum\limits_{p=0}^{n} (-1)^{n-p} \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} X^{n+p}$ et ainsi

$$L_n = \frac{1}{n!}\sum_{p=0}^{n} (-1)^{n-p} \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} \mathcal{A}_{n+p}^{n} X^p = \sum_{p=0}^{n} (-1)^{n-p} \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n+p \\ p \end{pmatrix} X^p$$

Selon la question précédente, le polynôme L_n est à coefficients entiers. Plus précisément son terme constant est égal à $(-1)^n$ et les coefficients des monômes de degré appartenant à $[\![1, n]\!]$ sont pairs.

3) Soit P_n, $P_n = (p_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ à la base $(K_0, \dots K_{n-1})$ orthonormée pour le produit scalaire $< \,,\, >$. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. Grâce à la relation vue en IIIB3) et à la bilinéarité du produit scalaire, la règle usuelle de calcul de produit matriciel donne

$$\begin{aligned} \left({}^t P_n H_n P_n\right)_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} p_{k,i} (H_n)_{k,\ell}\, p_{\ell,j} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} p_{k,i} p_{\ell,j} < X^{k-1}, X^{\ell-1} > \\ &= \left\langle \sum_{k=1}^{n} p_{k,i} X^{k-1}, \sum_{\ell=1}^{n} p_{\ell,j} X^{\ell-1} \right\rangle = < K_i, K_j > = \delta_{i,j} \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient ${}^t P_n H_n P_n = I_n$.

a) L'égalité qui vient d'être justifiée s'écrit aussi $H_n^{-1} = P_n {}^t P_n$. Or, selon la question précédente,

$$\forall j \in [\![0, n-1]\!],\ K_j = \sqrt{2j+1} \sum_{k=0}^{j} (-1)^{j-k} \begin{pmatrix} j \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j+k \\ k \end{pmatrix} X^k$$

et ainsi la matrice P_n est triangulaire supérieure et en outre

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!]^2,\ i \leqslant j \Longrightarrow p_{i,j} = \sqrt{2j-1}\,(-1)^{j-i} \begin{pmatrix} j-1 \\ i-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j+i-2 \\ i-1 \end{pmatrix}$$

Par conséquent

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ h_{i,i}^{(-1,n)} = \sum_{j=1}^{n} p_{i,j}^2 = \sum_{j=1}^{n} (2j-1) \begin{pmatrix} j-1 \\ i-1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} j+i-2 \\ i-1 \end{pmatrix}^2$$

Notamment

$$\boxed{h_{1,1}^{(-1,n)} = \sum_{j=1}^{n} (2j-1) = n^2 \qquad h_{n,n}^{(-1,n)} = (2n-1) \begin{pmatrix} 2n-2 \\ n-1 \end{pmatrix}^2}$$

b) De même, pour tout couple (i, j) d'éléments de $[\![1, n]\!]$, on peut écrire

$$h_{i,j}^{(-1,n)} = (-1)^{i+j} \sum_{k=\max(i,j)}^{n} (2k-1) \begin{pmatrix} k-1 \\ i-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k+i-2 \\ i-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k-1 \\ j-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k+j-2 \\ j-1 \end{pmatrix}$$

et les coefficients de la matrice H_n^{-1} sont bien des entiers relatifs.

c) Etant donné un couple (i, j) d'éléments de $[\![2, n]\!]$, tout élément k de $[\![\max(i, j), n]\!]$ est supérieur ou égal à 1 et ainsi, selon la question IV-B.1), $\begin{pmatrix} k-1 \\ i-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k+i-2 \\ i-1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} k-1 \\ j-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k+j-2 \\ j-1 \end{pmatrix}$ sont tous deux des entiers pairs et leur produit est donc un multiple de 4. Par addition on en conclut

$$\boxed{\forall (i,j) \in [\![2,n]\!]^2,\ h_{i,j}^{(-1,n)} \in 4\mathbb{Z}}$$

MP 21-22

CCP MP 2004 DEUXIEME EPREUVE

Eléments de correction

1. Soit $(M, X) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Avec des notations explicites, on a

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \left|\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} x_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |m_{i,j}|\,|x_j| \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{||M||}{n} ||X||_\infty$$

ce qui donne immédiatement

$$||MX||_\infty \leqslant ||M||\,||X||_\infty$$

2. (a) Notons $(c_1, c_2, \ldots, c_d)$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$ et φ l'isomorphisme de $\mathcal{M}$ sur $\mathbb{R}^d$ défini par

$$\forall i \in [\![1, d]\!],\ \varphi(B_i) = c_i$$

Avec les notations de l'énoncé, on a $\mathcal{N} = ||\ ||_\infty \circ \varphi$: donc, d'après un résultat de cours que l'on peut aisément justifier, $\mathcal{N}$ est une norme sur $\mathcal{M}$.

(b) $\mathcal{N}$ et la restriction de $||\ ||$ à $\mathcal{M}$ sont deux normes équivalentes sur $\mathcal{M}$ (deux normes sur un espace de dimension finie sont équivalentes) : il existe donc a et b réels strictement positifs tels que

$$\forall M \in \mathcal{M},\ a||M|| \leq \mathcal{N}(M) \leq b||M||$$

(c) Il s'agit d'un résultat de cours. Avec les notations de l'énoncé, on a

$$\begin{aligned}
(M_p)_{p\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0 \text{ dans } (\mathcal{M}, ||\ ||) &\Leftrightarrow ||M_p|| \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \\
&\Leftrightarrow \mathcal{N}(M_p) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \\
&\Leftrightarrow \forall k \in [\![1, d]\!],\ |x_p(k)| \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \\
&\Leftrightarrow \forall k \in [\![1, d]\!],\ x_p(k) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

3. (a) Soit $x \in I$. Comme f est notamment de classe C^ℓ sur I, on peut lui appliquer le théorème de Taylor avec reste intégrale :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{f^{(k)}(\lambda)}{k!}(x-\lambda)^k + \int_\lambda^x \frac{(x-u)^{\ell-1}}{(\ell-1)!} f^{(\ell)}(u)\,du$$

ce qui est l'égalité demandée puisque, par hypothèse, $\forall k \in [\![0, \ell-1]\!],\ f^{(k)}(\lambda) = 0$.

(b) En posant $\forall x \in I,\ h(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-t)^{\ell-1}}{(\ell-1)!} f^{(\ell)}((1-t)\lambda + tx)\,dt$, le changement de variable défini par $u = (1-t)\lambda + tx$ dans l'intégrale précédente donne

$$\forall x \in I,\ f(x) = \int_0^1 \frac{(1-t)^{\ell-1}(x-\lambda)^{\ell-1}}{(\ell-1)!} f^{(\ell)}((1-t)\lambda + tx)(x-\lambda)\,dt = (x-\lambda)^\ell h(x)$$

La fonction h est définie par une intégrale à paramètre. Soit $n \in \mathbb{N}^*$: montrons que la fonction h est de classe C^n sur I.

Pour cela, considérons la fonction $g : \begin{array}{ccc} I \times [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & \dfrac{(1-t)^{\ell-1}}{(\ell-1)!} f^{(\ell)}((1-t)\lambda + tx) \end{array}$. On a :

- pour tout t appartenant à $[0,1]$, la fonction $g(\cdot,t)$ est de classe C^n sur I (car $f \in C_I^\infty$) et
$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ \forall (x,t) \in I \times [0,1],\ \frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t) = \frac{(1-t)^{\ell-1}}{(\ell-1)!} t^k f^{(\ell+k)}((1-t)\lambda + tx)$$
- $\forall k \in [\![0,n-1]\!],\ \forall x \in I,\ \dfrac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,\cdot) \in \mathcal{L}^1([0,1])$ (continuité d'une fonction sur un segment)
- $\forall x \in I,\ \dfrac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,\cdot) \in \mathcal{CM}([0,1])$ (continuité d'une fonction sur un segment)
- (domination locale) soit S un segment inclus dans I : alors $\dfrac{\partial^n g}{\partial x^n}$, continue sur le compact $S \times [0,1]$, est bornée sur $S \times [0,1]$, ce qui assure l'hypothèse de domination locale puisqu'une fonction constante sur un segment y est intégrable

Le théorème au programme permet de conclure que h est de classe C^n sur I et
$$\forall x \in I,\ h^{(n)}(x) = \int_0^1 \frac{\partial^n g}{\partial x^n}(x,t)\,dt = \int_0^1 t^n \frac{(1-t)^{\ell-1}}{(\ell-1)!} f^{(\ell+n)}((1-t)\lambda + tx)dt$$
Ceci étant vrai pour tout entier naturel non nul n, la fonction h est de classe C^∞ sur I.

4. Soit $(f,g) \in (C_I^\infty)^2$.

   (a) On suppose $\exists h \in C_I^\infty : f = g + h\prod_A$. Soit $k \in \mathbb{N}$. La formule de Leibniz permet d'écrire
$$(f-g)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \Pi_A^{(i)} h^{(k-i)}$$
   Ainsi
$$\forall j \in [\![1,r]\!],\ \forall k \in [\![0,m_j-1]\!],\ f^{(k)}(\lambda_j) - g^{(k)}(\lambda_j) = (f-g)^{(k)}(\lambda_j) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \underbrace{\Pi_A^{(i)}(\lambda_j)}_{\substack{=0 \text{ car} \\ i \le k \le m_j - 1}} h^{(k-i)}(\lambda_j) = 0$$
   ou encore $f \underset{A}{=} g$.

   (b) Il s'agit d'étudier la réciproque. A tout entier naturel r, associons le prédicat :
   $\mathcal{P}(r)$: pour tout élément f de C_I^∞, si $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sont r éléments distincts de I et si $m_1, \ldots, m_r$ sont des entiers naturels non nuls tels que
$$\forall j \in [\![1,r]\!],\ \forall k \in [\![0,m_j-1]\!],\ f^{(k)}(\lambda_j) = 0$$
   alors il existe h appartenant à C_I^∞ tel que
$$\forall x \in I,\ f(x) = \prod_{j=1}^{r} (x-\lambda_j)^{m_j} h(x)$$
   Commençons par montrer $\mathcal{P}(0)$: si f est un élément de C_I^∞ vérifiant les hypothèses de $\mathcal{P}(0)$, un produit indexé par l'ensemble vide étant égal à 1, il suffit de choisir $h = f$.
   Soit r un entier naturel tel que $\mathcal{P}(r)$ soit vraie. Montrons $\mathcal{P}(r+1)$. Soit $f \in C_I^\infty$. On suppose que $\lambda_1, \ldots, \lambda_r, \lambda_{r+1}, m_1, \ldots, m_r, m_{r+1}$ sont donnés, vérifiant les hypothèses de la propriété

$\mathcal{P}(r+1)$. En appliquant $\mathcal{P}(r)$, on sait qu'il existe h_1 appartenant à C_I^∞ tel que

$$\forall x \in I,\ f(x) = \underbrace{\prod_{j=1}^{r}(x-\lambda_j)^{m_j}}_{=P(x)}\ h_1(x)$$

En posant $\lambda = \lambda_{r+1}$ et $\ell = m_{r+1}$, la formule de Leibniz donne

$$\forall k \in [\![0, \ell-1]\!],\ 0 = f^{(k)}(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} P^{(k-i)}(\lambda) h_1^{(i)}(\lambda)$$

ce qui s'écrit sous la forme du système linéaire suivant :

$$\begin{cases} P(\lambda)h_1(\lambda) = 0 \\ P'(\lambda)h_1(\lambda) + P(\lambda)h_1'(\lambda) = 0 \\ P''(\lambda)h_1(\lambda) + 2P'(\lambda)h_1'(\lambda) + P(\lambda)h_1''(\lambda) = 0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \ddots \\ P^{(\ell-1)}(\lambda)h_1(\lambda) + \cdots + \binom{\ell-1}{\ell-2} P'(\lambda)h_1^{(\ell-2)}(\lambda) + P(\lambda)h_1^{(\ell-1)}(\lambda) = 0 \end{cases}$$

Comme λ n'appartient pas à $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$, $P(\lambda) \neq 0$: en résolvant ce système triangulaire "en descendant", nous obtenons donc $h_1(\lambda) = h_1'(\lambda) = \ldots = h_1^{(\ell-1)}(\lambda) = 0$. La question 3. assure alors l'existence de h dans C_I^∞ tel que $\forall x \in I,\ h_1(x) = (x-\lambda)^\ell h(x)$, ce qui donne la décomposition cherchée, à savoir

$$\forall x \in I,\ f(x) = \left(\prod_{j=1}^{r+1}(x-\lambda_j)^{m_j}\right) h(x)$$

Ainsi $\mathcal{P}(r+1)$ est vraie, puis $\forall r \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(r)$.
Supposant $f \underset{A}{=} g$, avec les notations de l'énoncé, il suffit d'appliquer la propriété $\mathcal{P}(r)$ à la fonction $f-g$: il existe h dans C_I^∞ tel que $f = g + h\Pi_A$.

5. Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$. D'après le cours sur les polynômes, les assertions suivantes sont équivalentes :
   - $P \underset{A}{=} Q$
   - pour tout j appartenant à $[\![1, r]\!]$, λ_j est racine de $P-Q$ de multiplicité supérieure ou égale à m_j
   - $\displaystyle\prod_{j=1}^{r}(X-\lambda_j)^{m_j}$ divise $P-Q$
   - $\exists H \in \mathbb{R}[X] : P = Q + H\Pi_A$

6. L'application φ est clairement linéaire.
Etablissons son injectivité. Soit $P \in \operatorname{Ker}(\varphi)$: on a $P \underset{A}{=} 0$. Le résultat de la question 5. prouve donc que Π_A divise P dans $\mathbb{R}[X]$, ce qui impose $P = 0$ car P est de degré strictement plus petit que celui de Π_A. Ainsi, φ est injective. Comme $\mathbb{R}_{m-1}[X]$ et $\mathbb{R}^m$ ont même dimension <u>finie</u>, φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels de $\mathbb{R}_{m-1}[X]$ sur $\mathbb{R}^m$.

7. Soit $f \in C_I^\infty$. Par définition, on a

$$\forall P \in \mathbf{R}_{m-1}[X],\ f \underset{A}{=} P \Longleftrightarrow \varphi(P) = \left(\left(f^{(k_1)}(\lambda_1)\right)_{0\leq k_1\leq m_1-1}, \dots, \left(f^{(k_r)}(\lambda_r)\right)_{0\leq k_r\leq m_r-1}\right)$$

Comme φ est bijective, il existe donc un unique polynôme P_f appartenant à $\mathbf{R}_{m-1}[X]$ tel que $f \underset{A}{=} P$: ce polynôme est donné par $P_f = \varphi^{-1}\left(\left(f^{(k_1)}(\lambda_1)\right)_{0\leq k_1\leq m_1-1}, \dots, \left(f^{ik_r)}(\lambda_r)\right)_{0\leq k_r\leq m_r-1}\right)$.

8. Dans cette question, comme f et P_f sont deux polynômes (identifiés à leurs fonctions polynômes associées) tels que $f \underset{A}{=} P_f$, d'après la question 5., il existe un polynôme H, que l'on fixe, tel que $f = P_f + H\Pi_A$. Le calcul polynomial habituel donne alors

$$\sum_{k=0}^{N} a_k A^k = P_f(A) + H(A)\Pi_A(A) = P_f(A) = f(A)$$

puisque $\Pi_A(A) = 0$.

9. Ici $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$, $A \in M_2(\mathbf{R})$, $I = \mathbf{R}$.

(a) Commençons par calculer le polynôme caractéristique de A :

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-5 & 4 \\ -4 & X+3 \end{vmatrix} = (X-1)^2$$

Comme Π_A divise χ_A et $A - I_2 \neq 0$, alors $\boxed{\Pi_A = \chi_A = (X-1)^2}$. Pour cet exemple, on a $m = 2$, $r = 1$ et $\lambda_1 = 1$.

(b) Soit $f \in C_{\mathbf{R}}^\infty$. Le polynôme P_f est de degré inférieur ou égal à 1 et vérifie

$$f(1) = P_f(1) \qquad f'(1) = P_f'(1)$$

Par conséquent $P_f = f(1) + f'(1)(X-1)$. Nous obtenons donc :

(i) Avec $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = ax + b$: $P_f = f$ donc $f(A) = aA + bI_2 = \begin{pmatrix} 5a+b & -4a \\ 4a & -3a+b \end{pmatrix}$.

(ii) Avec $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = \sin(\pi x)$, $f(1) = 0$ et $f'(1) = -\pi$ donc $f(A) = -\pi(A - I_2) = 4\pi \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(iii) Avec $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = (x-1)^2 g(x)$, $f(1) = f'(1) = 0$ donc $f(A) = (0)$.

10. Soit $f \in C_I^\infty$. D'après la question II 7., on a

$$P_f = \varphi^{-1}\left(f(\lambda_1), f'(\lambda_1), \dots, f^{(m_1-1)}(\lambda_1), \dots, f(\lambda_r), f'(\lambda_r), \dots, f^{(m_r-1)}(\lambda_r)\right)$$

Par linéarité de φ^{-1}, et en notant $(c_1, \dots, c_m)$ la base canonique de $\mathbf{R}^m$, nous avons donc

$$\begin{aligned} P_f \;=\; & f(\lambda_1)\varphi^{-1}(c_1) + \dots + f^{(m_1-1)}(\lambda_1)\varphi^{-1}(c_{m_1}) \\ & + f(\lambda_2)\varphi^{-1}(c_{m_1+1}) + \dots + f^{(m_2-1)}(\lambda_2)\varphi^{-1}(c_{m_1+m_2}) \\ & \vdots \\ & + f(\lambda_r)\varphi^{-1}(c_{m_1+\dots+m_{r-1}+1}) + \dots + f^{(m_r-1)}(\lambda_r)\varphi^{-1}(c_{m_1+\dots+m_r}) \end{aligned}$$

Nous obtenons la décomposition demandée en posant :

$$\boxed{\forall j \in [\![1, r]\!],\ \forall k \in [\![0, m_j - 1]\!],\ Q_{j,k} = \varphi^{-1}\left(c_{m_1+\dots+m_{j-1}+k+1}\right)}$$

Supposons trouvée une autre famille $(R_{j,k})_{\substack{1\leqslant j\leqslant r\\0\leqslant k\leqslant m_j-1}}$ de polynômes répondant à la question posée.
Soient $j_0 \in [\![1,r]\!]$ et $k_0 \in [\![0,m_{j_0}-1]\!]$. Appliquons la propriété en remplaçant f par Q_{j_0,k_0} : il s'agit d'un polynôme de degré inférieur ou égal à m et ainsi, selon la question II 7, on a $P_{Q_{j_0,k_0}} = Q_{j_0,k_0}$.
On en déduit

$$Q_{j_0,k_0} = P_{Q_{j_0,k_0}} = \sum_{j=0}^{r}\sum_{k=0}^{m_j-1} Q_{j_0,k_0}^{(k)}(\lambda_j)\, R_{j,k} = R_{j_0,k_0}$$

car

$$\forall j \in [\![1,r]\!],\ \forall k \in [\![0,m_j-1]\!],\ Q_{j_0,k_0}^{(k)}(\lambda_j) = \delta_{j,j_0}\delta_{k,k_0}$$

En conclusion il existe une unique famille $(Q_{j,k})_{\substack{1\leqslant j\leqslant r\\0\leqslant k\leqslant m_j-1}}$ de polynômes vérifiant

$$\forall f \in C_I^\infty,\ P_f = \sum_{j=0}^{r}\sum_{k=0}^{m_j-1} f^{(k)}(\lambda_j)\, Q_{j,k}$$

11. Considérons $\mathbf{R}[A] = \{P(A) \mid P \in \mathbf{R}[X]\}$: par propriété de cours, il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de dimension égale au degré de Π_A, à savoir m. Avec les notations de l'énoncé, nous pouvons écrire :

$$\forall P \in \mathbf{R}[X],\ P(A) = P_P(A) = \left(\sum_{j=0}^{r}\sum_{k=0}^{m_j-1} P^{(k)}(\lambda_j)Q_{j,k}\right)(A) = \sum_{j=0}^{r}\sum_{k=0}^{m_j-1} P^{(k)}(\lambda_j)Z_{j,k}$$

Ceci prouve que la famille $(Z_{j,k})_{\substack{1\leqslant j\leqslant r\\0\leqslant k\leqslant m_j-1}}$ engendre $\mathbf{R}[A]$: comme son cardinal est égal à la dimension de $\mathbf{R}[A]$, cette famille est une base de $\mathbf{R}[A]$ et est notamment une famille libre de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
D'autre part, pour tout f élément de C_I^∞, on obtient

$$f(A) = P_f(A) = \left(\sum_{j=0}^{r}\sum_{k=0}^{m_j-1} f^{(k)}(\lambda_j)Q_{j,k}\right)(A) = \sum_{j=0}^{r}\sum_{k=0}^{m_j-1} f^{(k)}(\lambda_j)Z_{j,k}$$

12. Ici $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ et $I = \mathbf{R}_+^*$.
   (a) Dans cet exemple, nous avons $r = 1$ et $m_1 = 2$: le résultat découle donc de la question 11., avec $Z_1 = Z_{1,0}$ et $Z_2 = Z_{1,1}$.
   (b) En replaçant f par la fonction constante égale à 1, nous obtenons $I_2 = f(A) = Z_1$. Ensuite, en remplaçant f par $\mathrm{id}_{\mathbf{R}_+^*}$, nous avons $A = f(A) = Z_1 + Z_2$. Par conséquent

$$\boxed{Z_1 = I_2 \qquad Z_2 = A - I_2 = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}}$$

   (c) Nous obtenons donc :
      (i) Avec $\forall x \in \mathbf{R}_+^*,\ f(x) = x^{2004}$:

$$A^{2004} = f(A) = f(1)Z_1 + f'(1)Z_2 = Z_1 + 2004Z_2 = \begin{pmatrix} 8017 & -8016 \\ 8016 & -8015 \end{pmatrix}$$

      (ii) Avec $\forall x \in \mathbf{R}_+^*,\ f(x) = \sqrt{x}$:

$$\sqrt{A} = f(1)Z_1 + f'(1)Z_2 = Z_1 + \frac{1}{2}Z_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

(iii) Avec $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = x^\alpha$:

$$\sqrt{A} = f(1)Z_1 + f'(1)Z_2 = Z_1 + \alpha Z_2 = \begin{pmatrix} 1+4\alpha & -4\alpha \\ 4\alpha & 1-4\alpha \end{pmatrix}$$

13. Ici $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A \in M_3(\mathbb{R})$ et $I = \mathbb{R}$.

   (a) Le calcul du polynôme caractéristique de A donne : $\chi_A = X^2(X+1)$. Si Π_A, qui est un diviseur de χ_A dans $\mathbb{R}[X]$ (théorème de Cayley-Hamilton), était égal à $X(X+1)$ (scindé simple), la matrice A serait diagonalisable. Or $\operatorname{rg} A = 2$ et ainsi $\dim \operatorname{Ker} A = 1$, ce qui implique que A n'est pas diagonalisable.
   En conclusion $\Pi_A = \chi_A = X^2(X+1)$ et A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

   (b) Dans cet exemple, $r = 2$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$, $m_1 = 2$ et $m_2 = 1$. On en déduit donc
   $$\forall f \in C^\infty_{\mathbb{R}},\ f(A) = f(0)Z_{1,0} + f'(0)Z_{1,1} + f(-1)Z_{2,0}$$
   En utilisant une base bien choisie de $\mathbb{R}_2[X]$ (ce pourrait être la base canonique), on obtient

   (i) Avec $f = X^2$, on obtient $Z_{2,0} = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

   (ii) Avec $f = X(X+1)$, on obtient $Z_{1,1} = A(A+I_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   (iii) Avec $f = X+1$, on obtient $Z_{1,0} + Z_{1,1} = A + I_2$ puis $Z_{1,0} = I_2 - A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

14. Soit $(f, g, \alpha) \in C_I^\infty \times C_I^\infty \times \mathbb{R}$.

   (a) Comme $\mathbb{R}_{m-1}[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$, on a $(\alpha P_f, P_f + P_g) \in \mathbb{R}_{m-1}[X]^2$ et
   $$\forall j \in [\![1, r]\!],\ \forall k \in [\![0, m_j - 1]\!],\ (\alpha f)^{(k)}(\lambda_j) = \alpha f^{(k)}(\lambda_j) = \alpha P_f^{(k)}(\lambda_j) = (\alpha P_f)^{(k)}(\lambda_j)$$
   $$(f+g)^{(k)}(\lambda_j) = f^{(k)}(\lambda_j) + g^{(k)}(\lambda_j) = P_f^{(k)}(\lambda_j) + P_g^{(k)}(\lambda_j) = (P_f + P_g)^{(k)}(\lambda_j)$$
   ce qui permet de conclure : $\boxed{P_{\alpha f} = \alpha P_f \text{ et } P_{f+g} = P_f + P_g}$.

   (b) On peut utiliser la caractérisation de la question I 4.. Il existe h_1 et h_2, que l'on fixe, appartenant à C_I^∞ telles que
   $$f = P_f + h_1 \Pi_A \qquad g = P_g + h_2 \Pi_A$$
   Alors
   $$fg = P_f P_g + (P_f h_2 + h_1 P_g + h_1 h_2 \Pi_A)\, \Pi_A$$
   Comme $P_f h_2 + h_1 P_g + h_1 h_2 \Pi_A$ appartient à C_I^∞, on en déduit $fg \underset{A}{=} P_f P_g$. Comme, par définition, $fg \underset{A}{=} P_{fg}$ la transitivité de (la relation d'équivalence) $\underset{A}{=}$ permet d'écrire $P_{fg} \underset{A}{=} P_f P_g$. Enfin, d'après la question 5, on obtient bien
   $$\boxed{\exists H \in \mathbb{R}[X] : P_{fg} = P_f P_g + H \Pi_A}$$

15. On considère l'application $S : \begin{array}{ccc} C_I^\infty & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f(A) \end{array}$.

(a) Tout d'abord, on a bien $S(1) = 1(A) = I_2$. Ensuite, selon la question précédente, étant donnés f et g dans C_I^∞ et un réel α, on a :
- $S(\alpha f) = P_{\alpha f}(A) = \alpha P_f(A) = \alpha S(f)$
- $S(f+g) = P_{f+g}(A) = P_f(A) + P_g(A) = S(f) + S(g)$
- $S(fg) = P_{fg}(A) = (P_f P_g)(A) = P_f(A)P_g(A) = S(f)S(g)$

En conclusion S est un morphisme d'algèbres.

(b) Soit $f \in C_I^\infty$. Les assertions suivantes sont équivalentes :
- $f \in \operatorname{Ker} S$
- $P_f(A) = f(A) = 0$
- P_f est un multiple de Π_A dans $\mathbb{R}[X]$
- $P_f = 0$ (car P_f est de degré strictement plus petit que Π_A).

Finalement les éléments du noyau de S sont les éléments f de C_I^∞ tels que $f \underset{A}{=} 0$, ou encore $\boxed{\operatorname{Ker} S = \Pi_A C_I^\infty}$.

16. (a) Comme S est un morphisme d'algèbres, on a
$$(\cos A)^2 + (\sin A)^2 = (S(\cos))^2 + (S(\sin))^2 = S(\cos^2 + \sin^2) = S(1) = 1(A) = I_n$$

(b) De même, on a $\left(\sqrt{A}\right)^2 = S(f_1)S(f_1) = S(f_1^2) = S(\mathrm{id}_I) = X(A) = A$.
En outre $\frac{1}{A} A = S(f_2)S(\mathrm{id}_I) = S(f_2\,\mathrm{id}_I) = S(1) = 1(A) = I_n$ donc $\frac{1}{A} = A^{-1}$.

17. Avec les notations de l'énoncé, $\mathcal{M}_A$ est l'image du morphisme d'algèbre S : $\mathcal{M}_A$ est donc une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. D'autre part, C_I^∞ étant commutative, $\mathcal{M}_A$ l'est également. Comme on l'a vu à la question II 11., cette algèbre est de dimension égale à m et la famille $(Z_{j,k})_{\substack{1\leqslant j\leqslant r\\ 0\leqslant k\leqslant m_j-1}}$ en est une base.

18. Soit $B \in \mathcal{M}_A \cap GL_n(\mathbb{R})$. L'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_A & \longrightarrow & \mathcal{M}_A \\ M & \longmapsto & BM \end{array}$ est linéaire et injective (car B est inversible, donc simplifiable). $\mathcal{M}_A$ étant de dimension finie, cet endomorphisme est également surjectif. Comme la matrice identité est un élément de $\mathcal{M}_A$, il existe C appartenant à $\mathcal{M}_A$ telle que $BC = I_n$. Par conséquent $B^{-1} = C$ et B est donc inversible dans $\mathcal{M}_A$.

19. Soit $f \in C_I^\infty$.
Si $f(A)$ est inversible dans $M_n(\mathbb{R})$, d'après la question précédente, son inverse est un élément de $\mathcal{M}_A$. Il existe donc g appartenant à C_I^∞ telle que $f(A)g(A) = I_n$, ce que l'on peut écrire $S(fg-1) = 0$. On en déduit que $fg - 1$ appartient au noyau de S, c'est-à-dire que $fg \underset{A}{=} 1$.
Notamment $\forall j \in [\![1,r]\!],\ f(\lambda_j)\, g(\lambda_j) = 1$ ce qui implique
$$\forall j \in [\![1,r]\!],\ f(\lambda_j) \neq 0$$
Réciproquement, supposons que l'on a $\forall j \in [\![1,r]\!],\ f(\lambda_j) \neq 0$, ou encore $\forall j \in [\![1,r]\!],\ P_f(\lambda_j) \neq 0$. Par conséquent Π_A et P_f sont premiers entre eux et, selon l'identité de Bézout, on a
$$\exists (U,V) \in \mathbb{R}[X]^2 : P_f U + \Pi_A V = 1$$
On fixe U et V : en remplaçant X par A dans cette identité, il vient: $I_n = U(A)P_f(A)$ car $\Pi_A(A) = 0$ et par suite $f(A)$ est inversible.

20. Soit $f \in C_I^\infty$. Avec les notations de l'énoncé $\Lambda_A = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$.

Etant donné un réel λ, les assertions suivantes sont équivalentes :

- $\lambda \in \Lambda_{f(A)}$
- $f(A) - \lambda I_n \notin GL_n(\mathbb{R})$
- $(f-\lambda)(A) \notin GL_n(\mathbb{R})$
- $\exists j \in [\![1, r]\!] : (f-\lambda)(\lambda_j) = 0$ (voir le résultat de la question précédente)
- $\lambda \in \{f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_r)\}$

En conclusion $\boxed{\Lambda_{f(A)} = f(\Lambda_A)}$.

21. Il s'agit d'appliquer un résultat de cours dont la démonstration a été demandée à la question 2. (c). On a vu, à la question III 11., que $(Z_{j,k})_{\substack{1 \leqslant j \leqslant r \\ 0 \leqslant k \leqslant m_j - 1}}$ est une base de $\mathcal{M}_A$. On a

$$\forall p \in \mathbb{N},\ f_p(A) = \sum_{j=0}^{r} \sum_{k=0}^{m_j-1} f_p^{(k)}(\lambda_j) Z_{j,k} \qquad f(A) = \sum_{j=0}^{r} \sum_{k=0}^{m_j-1} f^{(k)}(\lambda_j) Z_{j,k}$$

D'après le résultat de la question 2., une condition nécessaire et suffisante pour que la suite de matrices $(f_p(A))_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(A)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est que pour tout j appartenant à $[\![1, r]\!]$ et tout k appartenant à $[\![0, m_j - 1]\!]$, la suite $\left(f_p^{(k)}(\lambda_j)\right)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers $f^{(k)}(\lambda_j)$.

22. Soit $t \in \mathbb{R}$. Considérons la fonction f_t définie par l'énoncé et posons

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ F_{t,p}(x) = \sum_{\ell=0}^{p} \frac{t^\ell}{\ell!} x^\ell$$

D'après le cours sur les séries entières, on a $\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ F_{t,p}^{(k)}(x) \underset{p \to \infty}{\longrightarrow} f_t^{(k)}(x)$. Notamment, pour tout j appartenant à $[\![1, r]\!]$ et tout k appartenant à $[\![0, m_j - 1]\!]$, la suite $\left(F_{t,p}^{(k)}(\lambda_j)\right)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers $f_t^{(k)}(\lambda_j)$. Selon la question précédente, cela signifie que la suite de matrices $(F_{t,p}(A))_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers $f_t(A)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ce qui s'écrit $f_t(A) = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{t^\ell}{\ell!} A^\ell$.

23. Matriciellement le système proposé s'écrit : $X' = AX$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ (matrice de l'exemple de la question III 13.). D'après le cours, la solution générale du système différentiel est donnée par $\forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = \exp(tA) X_0,\ X_0 \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
D'après la question III 13., on peut écrire :

$$\exp(tA) = f_t(0) Z_{1,0} + f_t'(0) Z_{1,1} + f_t(-1) Z_{2,0} = Z_{1,0} + t Z_{1,1} + e^{-t} Z_{2,0} = \begin{pmatrix} 1+t & -t & t \\ 1+t-e^{-t} & e^{-t}-t & t \\ 1-e^{-t} & -1+e^{-t} & 1 \end{pmatrix}$$

Finalement la solution générale du système différentiel proposé est donnée par

$$\begin{cases} x(t) = a(1+t) - bt + ct \\ y(t) = a\left(1+t-e^{-t}\right) + b\left(e^{-t}-t\right) + ct \quad , \ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \\ z(t) = a\left(1-e^{-t}\right) + b\left(-1+e^{-t}\right) + c \end{cases}$$

MP 21-22

MINES MP 2009 DEUXIEME EPREUVE

Eléments de correction

1. Pour tout réel λ positif ou nul, la fonction Φ_λ vérifie : $\forall x \in]0,1]\,,\ x\,\Phi'_\lambda(x) = \lambda\,\Phi_\lambda(x)$.
Ainsi en considérant l'endomorphisme T de $C^\infty(]0,1])$ défini par
$$\forall f \in C^\infty(]0,1])\,,\ \forall x \in]0,1]\,,\ T(f)(x) = x\,f'(x)$$
la famille $(\Phi_{\lambda_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est ainsi une famille de vecteurs propres de T associés à des valeurs propres deux à deux distinctes. On peut donc affirmer que cette famille est libre.

Pour le calcul des déterminants de Cauchy, l'énoncé comporte une coquille : il faut bien entendu supposer $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_i + b_j \neq 0$.

2. Utilisant le caractère $n-$linéaire alterné du déterminant, multiplions la dernière colonne de D_n par A_n et ajoutons lui la combinaison linéaire $\sum\limits_{k=1}^{n-1} A_k\,C_k$ des $n-1$ premières colonnes pour obtenir
$$A_n\,D_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & R(a_1) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_{n-1}} & R(a_n) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & 0 \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_{n-1}} & R(a_n) \end{vmatrix}$$
car $a_1, \dots, a_{n-1}$ sont les racines de la fraction rationnelle R (celle-ci est irréductible selon l'hypothèse rajoutée ci-dessus).
Enfin le développement de ce déterminant par rapport à la dernière colonne fournit $\boxed{A_n\,D_n = R(a_n)\ D_{n-1}}$.

3. Si deux des nombres $b_1, \dots, b_n$ sont égaux, le déterminant D_n qui comporte deux colonnes égales est nul, et la relation proposée par l'énoncé est correcte.
Montrons le résultat par récurrence sur l'entier naturel n dans l'autre cas. A tout entier naturel non nul n, on associe le prédicat :
$\mathcal{P}(n)$: pour toutes suites finies $(a_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ et $(b_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ de nombres réels telles que $b_1, \dots, b_n$ soient deux à deux distincts et $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_i + b_j \neq 0$, on a (notations de l'énoncé)
$$D_n = \frac{\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} (a_i + b_j)}.$$
Tout d'abord $\mathcal{P}(1)$ est vraie (un produit indexé par $\emptyset$ est égal à 1).
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 tel que $\mathcal{P}(n-1)$ soit vraie. Montrons $\mathcal{P}(n)$. Soient donc $(a_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ et $(b_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ deux suites de nombres réels telles que $b_1, \dots, b_n$ soient deux à deux distincts et $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_i + b_j \neq 0$. Avec les notations de la question précédente, $-b_n$ est un

pole simple de la fraction rationnelle R et

$$A_n = ((X + b_n)\ R)(-b_n) = \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (a_k + b_n)}{\prod_{k=1}^{n-1} (b_n - b_k)} \qquad R(a_n) = \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (a_n - a_k)}{\prod_{k=1}^{n-1} (a_n + b_k)}$$

Ensuite la relation de la question précédente ainsi que l'assertion $\mathcal{P}(n-1)$ fournit bien $\mathcal{P}(n)$.
On a donc bien : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}(n)$.

4. Soit $x \in E$. On a l'équivalence demandée grâce à la caractérisation de la borne inférieure et la définition de point adhérent. En effet : $\begin{aligned} d(x,A) = 0 &\iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A : \|x - a\| < \varepsilon \\ &\iff \forall \varepsilon > 0,\ \mathcal{B}(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset \end{aligned}$.

5. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de parties de E : on note $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.
La suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante, la suite numérique $(d(x,A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de réels minorée (par 0) donc convergente et $\lim_{n\to+\infty} d(x,A_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} d(x,A_n)$.
Ayant de plus $\forall n \in \mathbb{N},\ A_n \subset A$ on a $\forall n \in \mathbb{N},\ d(x,A_n) \geqslant d(x,A)$ et ainsi $\lim_{n\to+\infty} d(x,A_n) \geqslant d(x,A)$.
Enfin soit $a \in A$: par définition il existe un entier naturel n_0 tel que $a \in A_{n_0}$. On fixe n_0 et on alors $\|x-a\| \geqslant d(x,A_{n_0}) \geqslant \inf_{n\in\mathbb{N}} d(x,A_n)$. On en déduit $\forall a \in A,\ \|x-a\| \geqslant \lim_{n\to+\infty} d(x,A_n)$ et par définition de la borne inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$, qui en est le plus grand des minorants, on obtient $d(x,A) \geqslant \lim_{n\to+\infty} d(x,A_n)$.
En conclusion on obtient bien l'égalité $\boxed{d(x,A) = \lim_{n\to+\infty} d(x,A_n)}$.

6. Tout d'abord $B \cap V$ est une boule fermée de l'espace vectoriel normé V pour la norme induite par celle de E. Comme V est de dimension finie, $B \cap V$ est un compact de V, donc de E.
Ensuite ayant $B \cap V \subset V$, on a $d(x,V) \leqslant d(x, B\cap V)$.
Enfin étant donné un élément v de V,
ou bien $v \in B$ et alors $\|x - v\| \geqslant d(x, B\cap V)$
ou bien $v \notin B$ et alors $\|x - v\| > \|x\| \geqslant d(x, B \cap V)$ (car 0 appartient à $B \cap V$).
Par conséquent $\forall v \in V,\ \|x-v\| \geqslant d(x, B\cap V)$ et ainsi $d(x,V) \geqslant d(x, B\cap V)$.
En conclusion on obtient bien l'égalité $\boxed{d(x,V) = d(x, B\cap V)}$.

7. L'application $\begin{array}{ccc} B\cap V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ v & \longmapsto & \|x-v\| \end{array}$ est continue (car 1− lipschitzienne) sur le compact $B \cap V$, donc est bornée et atteint ses bornes notamment la borne inférieure qui est ainsi un minimum.
Par conséquent, tenant compte de la question 6., ceci assure l'existence d'un élément y de V tel que $d(x,V) = \|x-y\|$.

8. Supposant V sous-espace vectoriel de dimension finie de l'espace préhilbertien réel E, la projection orthogonale p_V sur V est bien définie (propriété de cours). De plus selon le théorème de Pythagore, on a
$$\forall v \in V,\ \|x-v\|^2 = \|x - p_V(x)\|^2 + \|p_V(x) - v\|^2$$
ce qui prouve que $p_V(x)$ est l'unique élément de V vérifiant $d(x,V) = \|x - p_V(x)\|$.
Soient n un entier naturel non nul et $x_1, \ldots, x_n$ appartenant à E.

9. Si la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est liée, l'un des vecteurs de cette famille s'écrit comme combinaison linéaire des autres : il existe j, $j \in [\![1, n]\!]$, tel que $x_j \in \operatorname{vect}\left((x_i)_{i \in [\![1,n]\!] \setminus \{j\}}\right)$. On fixe un tel j. En notant $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de la matrice $M(x_1, \ldots, x_n)$, C_j s'écrit comme combinaison linéaire des autres colonnes de cette matrice et ainsi son déterminant est nul.

   Réciproquement supposons la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ libre. En notant $V = \operatorname{vect}(x_1, \ldots, x_n)$, $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de V et $C = \operatorname{mat}_{(e_1, e_2, \ldots, e_n)}(x_1, \ldots, x_n)$, on peut écrire $M(x_1, \ldots, x_n) = {}^tCC$. On a alors $G(x_1, \ldots, x_n) = (\det C)^2$ et donc $G(x_1, \ldots, x_n) > 0$.
   En conclusion $G(x_1, \ldots, x_n) = 0$ si, et seulement si, $(x_1, \ldots, x_n)$ est liée. Dans le cas contraire $G(x_1, \ldots, x_n) > 0$.

10. On suppose la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ libre et on note $V = \operatorname{vect}(x_1, \ldots, x_n)$. Soit $x \in E$. On a
$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ (x \mid x_i) = (x - p_V(x) \mid x_i) + (p_V(x) \mid x_i) = (p_V(x) \mid x_i)$$
   En outre $\|x\|^2 = \|x - p_V(x)\|^2 + \|p_V(x)\|^2$. Par linéarité du déterminant par rapport à la dernière colonne, on peut écrire
$$\begin{aligned} G(x_1, \ldots, x_n, x) &= \begin{vmatrix} (x_1 \mid x_1) & \cdots & (x_1 \mid x_n) & (x_1 \mid p_V(x)) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (x_n \mid x_1) & \cdots & (x_n \mid x_n) & (x_n \mid p_V(x)) \\ (p_V(x) \mid x_1) & \cdots & (p_V(x) \mid x_n) & \|x - p_V(x)\|^2 + \|p_V(x)\|^2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} (x_1 \mid x_1) & \cdots & (x_1 \mid x_n) & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (x_n \mid x_1) & \cdots & (x_n \mid x_n) & 0 \\ (p_V(x) \mid x_1) & \cdots & (p_V(x) \mid x_n) & \|x - p_V(x)\|^2 \end{vmatrix} + G(x_1, \ldots, x_n, p_V(x)) \end{aligned}$$
   Les vecteurs $x_1, \ldots, x_n, p_V(x)$ étant liés, la question précédente donne $G(x_1, \ldots, x_n, p_V(x)) = 0$. Puis, développant le premier déterminant ci-dessus par rapport à la dernière colonne, on obtient
$$G(x_1, \ldots, x_n, x) = \|x - p_V(x)\|^2 G(x_1, \ldots, x_n)$$
   En conclusion $\boxed{\forall x \in E,\ d(x, V)^2 = \dfrac{G(x_1, \ldots, x_n, x)}{G(x_1, \ldots, x_n)}}$.

11. Etant donné un élément f de $C([0,1])$ la propriété de croissance de l'intégrale sur $[0,1]$ fournit
   $N_2(f) \leqslant \left(\int_{[0,1]} N_\infty(f)^2\right)^{1/2}$ c'est-à-dire $N_2(f) \leqslant N_\infty(f)$. Ainsi $\boxed{N_2 \leqslant N_\infty}$.
   Si f est un élément de $\overline{A}^\infty$ il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $C([0,1])$ telle que $N_\infty(u_n - f) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. L'inégalité précédente entraîne alors $N_2(u_n - f) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, c'est-à-dire $f \in \overline{A}^2$. Par conséquent $\boxed{\overline{A}^\infty \subset \overline{A}^2}$.

12. Pour tout entier naturel n définissons la fonction f_n sur $[0,1]$ par $\forall x \in [0,1]$, $f_n(x) = 1 - (1-x)^n$. On définit ainsi une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de V_0 convergeant vers Φ_0 pour la norme N_2 puisque
$$\forall n \in \mathbb{N},\ N_2(f_n - \Phi_0)^2 = \int_0^1 (1-t)^{2n}\, dt = \frac{1}{2n+1}$$
   et $N_2(f_n - \Phi_0) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Par conséquent on a bien $\Phi_0 \in \overline{V_0}^2$.

13. Soit g un élément de $C([0,1])$. Montrons que g est adhérent à V_0 pour la norme N_2. Pour cela utilisons la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie dans la question 12. et considérons la suite $(g\, f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de V_0. On a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ N_2(g\, f_n - g)^2 = \int_0^1 g(t)^2 (f_n(t) - \Phi_0(t))^2\, dt$$

puis $\forall n \in \mathbb{N},\ N_2(g\, f_n - g) \leqslant N_\infty(g)\, N_2(f_n - \Phi_0)$, ce qui implique $N_2(g\, f_n - g) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par conséquent g adhérent à V_0 pour la norme N_2, ceci étant vrai pour tout élément g de $C([0,1])$, V_0 est donc dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_2.
La convergence uniforme d'une suite de fonctions sur $[0,1]$ entraînant sa convergence simple sur $[0,1]$, tout élément de $C([0,1])$ adhérent à V_0 pour la norme N_∞ doit s'annuler en 0 : V_0 n'est donc pas dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_∞.

14. Soit V un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel normé $(E, \|\ \|)$.
Tout d'abord $\overline{V}$ est non vide car $0 \in \overline{V}$ (car $0 \in V$).
De plus soient x, y éléments de $\overline{V}$ et α, β deux réels. Selon la caractérisation séquentielle de $\overline{V}$, il existe deux suites u et v d'éléments de V telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y$. Les théorèmes généraux sur les limites prouvent que l'on a $\alpha\, u_n + \beta\, v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha\, x + \beta\, y$. Comme on a $\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha\, u_n + \beta\, v_n \in V$ le vecteur $\alpha\, x + \beta\, y$ est bien adhérent à V.
En conclusion $\overline{V}$ est un sous-espace vectoriel de E.

15. Si V est un sous-espace vectoriel de $C([0,1])$ dense pour la norme N_∞, notamment les fonctions Φ_m, $m \in \mathbb{N}$, appartiennent à $\overline{V}^\infty$.
Réciproquement supposant que les fonctions Φ_m, $m \in \mathbb{N}$, appartiennent à $\overline{V}^\infty$, puisque $\overline{V}^\infty$ est un espace vectoriel (question 14.) toutes les fonctions polynômes sur $[0,1]$ appartiennent à $\overline{V}^\infty$.
Or, selon le théorème de Weierstraß, l'ensemble des fonctions polynômes sur $[0,1]$ est dense dans $C([0,1])$ pour N_∞ : par conséquent V est dense dans $C([0,1])$ pour N_∞.
D'où la condition nécessaire et suffisante souhaitée.

16. Si V est un sous-espace vectoriel de $C([0,1])$ dense pour la norme N_2, notamment les fonctions Φ_m, $m \in \mathbb{N}$, appartiennent à $\overline{V}^2$.
Réciproquement, supposant que les fonctions Φ_m, $m \in \mathbb{N}$, appartiennent à $\overline{V}^2$, puisque $\overline{V}^2$ est un espace vectoriel (question 14.) toutes les fonctions polynômes sur $[0,1]$ appartiennent à $\overline{V}^2$. Le théorème de Weierstraß et l'inclusion $\overline{V}^\infty \subset \overline{V}^2$ (question 11.) entraînent l'égalité $\overline{V}^2 = C([0,1])$.
D'où la caractérisation demandée.

17. La suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de parties de $C([0,1])$ dont l'union est égale à W. Selon la question 5., pour tout élément f de $C([0,1])$, on peut écrire $d(f, W_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} d(f, W)$.
D'une part si W est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_2, notamment pour tout entier naturel m la fonction Φ_m vérifie $d(\Phi_m, W) = 0$ ou encore $\lim\limits_{n\to+\infty} d(\Phi_m, W_n) = 0$.
Réciproquement supposant $\forall m \in \mathbb{N},\ \lim\limits_{n\to+\infty} d(\Phi_m, W_n) = 0$ cela signifie $\forall m \in \mathbb{N},\ d(\Phi_m, W) = 0$ ou encore $\forall m \in \mathbb{N},\ \Phi_m \in \overline{W}^2$. Selon la caractérisation de la question 16. cela signifie que W est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_2.
D'où la condition nécessaire et suffisante souhaitée.

18. Soit $(\mu, n) \in \mathbb{N}^2$. Utilisant le résultat de la question 10., sans oublier de mentionner celui de la question 1., on peut écrire

$$d(\Phi_\mu, W_n)^2 = \frac{G(\Phi_{\lambda_0}, \ldots, \Phi_{\lambda_n}, \Phi_\mu)}{G(\Phi_{\lambda_0}, \ldots, \Phi_{\lambda_n})}$$

Ayant pour tout couple (α, β) de réels positifs ou nuls

$$(\Phi_\alpha \mid \Phi_\beta) = \int_{[0,1]} \Phi_\alpha \Phi_\beta = \frac{1}{\alpha + \beta + 1}$$

on reconnaît des déterminants de Cauchy (question 3.) dans chacun des déterminants de Gram apparaissant dans l'expression de $d(\Phi_\mu, W_n)^2$: on aura posé pour cela

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ a_k = \lambda_k,\ b_k = \lambda_k + 1 \qquad a_{n+1} = \mu,\ b_{n+1} = \mu + 1$$

On obtient ainsi (décalage d'indice)

$$d(\Phi_\mu, W_n)^2 = \frac{\prod\limits_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i)^2 \prod\limits_{i=0}^{n} (\mu - \lambda_i)^2}{\prod\limits_{0 \leqslant i,j \leqslant n} (\lambda_i + \lambda_j + 1) \times (2\mu + 1) \prod\limits_{i=0}^{n} (\mu + \lambda_i + 1)^2} \times \frac{\prod\limits_{0 \leqslant i,j \leqslant n} (\lambda_i + \lambda_j + 1)}{\prod\limits_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i)^2}$$

Finalement après simplification, il reste

$$\boxed{d(\Phi_\mu, W_n) = \frac{1}{\sqrt{2\mu + 1}} \frac{\prod\limits_{i=0}^{n} |\mu - \lambda_i|}{\prod\limits_{i=0}^{n} (\mu + \lambda_i + 1)}}$$

19. Soit $\mu \in \mathbb{R}_+$.

Si la suite $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ on constate aisément que l'on a : $\dfrac{|\mu - \lambda_k|}{\mu + \lambda_k + 1} \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 1$.

Réciproquement supposons que la suite $\left(\dfrac{|\mu - \lambda_k|}{\mu + \lambda_k + 1}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers 1. On remarque (les réels manipulés sont positifs ou nuls) $\forall k \in N,\ \dfrac{|\mu - \lambda_k|}{\mu + \lambda_k + 1} \leqslant \dfrac{\lambda_k + \mu}{\mu + \lambda_k + 1}$ puis

$$\forall k \in N,\ 0 \leqslant \frac{1}{\mu + \lambda_k + 1} \leqslant 1 - \frac{|\mu - \lambda_k|}{\mu + \lambda_k + 1}$$

L'hypothèse faite (aidée du théorème "des gendarmes") donne $\dfrac{1}{\mu + \lambda_k + 1} \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ puis $\lambda_k \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

D'où la condition nécessaire et suffisante demandée.

20. D'après les questions 16. et 17. l'espace vectoriel W est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_2 si, et seulement si, pour tout entier naturel μ on a $d(\Phi_\mu, W_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, ou encore $\prod\limits_{i=0}^{n} \dfrac{|\mu - \lambda_i|}{(\mu + \lambda_i + 1)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, ou encore $\sum\limits_{i=0}^{n} \ln\left(\dfrac{|\mu - \lambda_i|}{(\mu + \lambda_i + 1)}\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$. Posons $\forall \mu \geqslant 0,\ \forall k \in \mathbb{N},\ v_k(\mu) = \ln\left(\dfrac{|\mu - \lambda_k|}{(\mu + \lambda_k + 1)}\right)$.

Ainsi une condition nécessaire et suffisante pour que l'espace vectoriel W soit dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_2 est que pour tout entier naturel μ la série $\sum v_k(\mu)$ soit divergente.

Procédons alors par disjonction des cas :

• la suite $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers $+\infty$: la série $\sum \frac{1}{\lambda_k}$ est grossièrement divergente, et (question précédente) il existe un entier naturel μ tel que la suite $(v_k(\mu))_{k\in\mathbb{N}}$ ne tende pas 0. La série $\sum v_k(\mu)$ est alors grossièrement divergente et dans ce cas W est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_2.

• la suite $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$: étant donné un entier naturel μ on a

$$v_k(\mu) \sim -\frac{1+2\mu}{\lambda_k}$$

les règles de comparaison de séries de termes de signe constant à partir d'un certain rang prouvent que les deux séries $\sum \frac{1}{\lambda_k}$ et $\sum v_k(\mu)$ sont de même nature. Dans ce cas W est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_2 si, et seulement si, la série $\sum \frac{1}{\lambda_k}$ est divergente.

En conclusion, après cette disjonction de cas, W est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_2 si, et seulement si, la série $\sum \frac{1}{\lambda_k}$ est divergente.

21. Supposant W dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_∞, la question 11. prouve que W est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_2 et, selon la question 20., la série $\sum \frac{1}{\lambda_k}$ est divergente.

22. Supposant $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\lambda_k \geqslant 1$, pour tout élément k de $[\![0,n]\!]$ la fonction Φ_{λ_k} est de classe C^1 sur $[0,1]$ et $\Phi'_{\lambda_k} = \lambda_k \Phi_{\lambda_k-1}$.
Soit $\mu \geqslant 1$. Avec les notations de l'énoncé, on peut écrire

$$\forall x \in [0,1]\,,\ (\Phi_\mu - \psi)(x) = \int_0^x (\Phi_\mu - \psi)'(t)\,dt = \int_0^x \left(\mu\Phi_{\mu-1} - \sum_{k=0}^n a_k\lambda_k\Phi_{\lambda_k-1}\right)(t)\,dt$$

Etant donné une fonction f continue sur $[0,1]$ l'inégalité de Schwarz permet d'écrire

$$\forall x \in [0,1]\,,\ \left|\int_0^x f(t)\,dt\right| \leqslant \int_0^x 1\,|f(t)|\,dt \leqslant \left(\int_0^x 1^2 dt\right)^{1/2} \left(\int_0^x f(t)^2\,dt\right)^{1/2} \leqslant N_2(f)$$

Remplaçant f par $(\Phi_\mu - \psi)'$ on aboutit à (par définition de la borne supérieure)

$$\boxed{N_\infty(\Phi_\mu - \psi) \leqslant N_2\left(\mu\Phi_{\mu-1} - \sum_{k=0}^n a_k\lambda_k\Phi_{\lambda_k-1}\right)}$$

23. Supposons que la suite $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifie les deux conditions (i) et (ii) et que la série $\sum \frac{1}{\lambda_k}$ soit divergente. Les termes de la suite $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ étant deux à deux distincts, ils sont différents de 1 à partir d'un certain rang et on peut considérer la série $\sum \frac{1}{\lambda_k - 1}$.
Cette série est divergente. En effet si la suite $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers $+\infty$ elle est grossièrement divergente, et si la suite $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ la relation $\frac{1}{\lambda_k - 1} \sim \frac{1}{\lambda_k}$ (comparaison entre séries de termes positifs à partir d'un certain rang) assure sa divergence.
Selon la question 20., le sous-espace vectoriel de $C([0,1])$ engendré par les fonctions Φ_{λ_k-1}, $k \in \mathbb{N}^*$, est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_2.

Soit $\mu \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon > 0$. Il existe ainsi un entier naturel n et une suite de réels $(\alpha_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ tels que $N_2\left(\mu\Phi_{\mu-1} - \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\Phi_{\lambda_k-1}\right) \leqslant \varepsilon$. Fixons les. Posons $\psi = \sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k}{\lambda_k}\Phi_{\lambda_k}$. Selon la question 22. on a

$$N_\infty\left(\Phi_\mu - \psi\right) \leqslant \varepsilon$$

Ainsi toutes les fonction Φ_μ, $\mu \in \mathbb{N}^*$, appartiennent à l'adhérence de W pour la norme N_∞ ainsi que la fonction Φ_0 selon l'hypothèse (i) de l'énoncé.
Il résulte de ceci, d'après la question 15., que W est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_∞.

24. Remplaçons la condition (ii) par la condition (ii'). Notons $r = \inf\limits_{k\in\mathbb{N}^*}\lambda_k$ ainsi que $\forall k \in \mathbb{N},\ \lambda'_k = \frac{\lambda_k}{r}$.
La suite $(\lambda'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ satisfait les conditions (i) et (ii) de la question 23. et la série $\sum\frac{1}{\lambda'_k}$ est divergente.
Selon la question 23., le sous-espace vectoriel de $C([0,1])$ engendré par la famille $(\Phi_{\lambda'_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_∞.
Soient alors $f \in C([0,1])$ et $\varepsilon > 0$. La fonction $f\circ\Phi_{1/r}$ est un élément de $C([0,1])$: il existe alors un entier naturel non nul n et une suite de réels $(\alpha_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$, que l'on fixe pour la suite, tels que

$$N_\infty\left(f\circ\Phi_{1/r} - \sum_{k=0}^{n}\alpha_k\Phi_{\lambda'_k}\right) \leqslant \varepsilon$$

ou encore

$$\forall x \in [0,1],\ \left|f\left(x^{1/r}\right) - \sum_{k=0}^{n}\alpha_k\Phi_{\lambda_k}\left(x^{1/r}\right)\right| \leqslant \varepsilon$$

Comme la fonction $\Phi_{1/r}$ est une permutation de $[0,1]$ ceci s'écrit aussi

$$\forall x \in [0,1],\ \left|f(x) - \sum_{k=0}^{n}\alpha_k\Phi_{\lambda_k}(x)\right| \leqslant \varepsilon$$

La fonction f appartient donc à l'adhérence de W dans $C([0,1])$ pour la norme N_∞. Ceci étant vrai pour tout élément f de $C([0,1])$ on obtient donc encore $\overline{W}^\infty = C([0,1])$.

CORRIGÉ

A. Une intégrale à paramètre

1. La fonction ψ est évidemment continue sur I.

• Au voisinage de 0, on a $\psi(t) \sim t^{-1/2}$ avec $-\dfrac{1}{2} > -1$, donc ψ est intégrable sur $]0,1]$.

• Au voisinage de $+\infty$, on a $\psi(t) = o(t^{-2})$ par croissances comparées, et donc ψ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Ainsi, ψ est intégrable sur I.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$.

• Si $x < 0$, alors $-x$ est intérieur à l'intervalle I et $u \mapsto \dfrac{e^{u}}{\sqrt{u}\,(u+x)}$ n'est pas définie en $-x$, donc $F(x)$ n'est pas définie.

• Si $x > 0$, alors on observe que $\forall u \in I$, $\left|\dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}\,(u+x)}\right| \leqslant \dfrac{\psi(u)}{x}$, ce qui prouve l'existence de $F(x)$ grâce à la continuité (par morceaux) sur I de la fonction $u \mapsto \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}\,(u+x)}$ et à **1**.

Supposons enfin $x = 0$. La fonction $u \mapsto \dfrac{e^{-u}}{u^{3/2}}$ est équivalente en 0^+ à $u \mapsto u^{-3/2}$, qui n'est pas intégrable sur $]0,1]$, car $-\dfrac{3}{2} \leqslant -1$; elle n'est donc pas intégrable sur $]0,1]$, et donc pas non plus d'intégrale convergente, car elle est positive. Ainsi, $F(0)$ n'est pas défini.

En conclusion, I est l'ensemble des réels x pour lesquels $F(x)$ est défini.

3. Appliquons le théorème de dérivation sous l'intégrale, en posant

$$f : (x,u) \in I^2 \mapsto \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}\,(u+x)}.$$

• Pour tout $x \in I$, on a vu en **2** que $\displaystyle\int_I f(x,u)\,du$ est définie au sens de l'intégrabilité.

• Pour tout $u \in I$, la fonction $f(-,u)$ est évidemment de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et de dérivée $x \mapsto -\dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}\,(u+x)^2} =: g(x,u)$.

• Pour tout $x \in I$, la fonction $g(x,-)$ est continue par morceaux sur I.

On a enfin la domination locale suivante : pour tout $a > 0$,

$$\forall (x,u) \in [a, +\infty[\times I, \quad |g(x,u)| \leqslant a^{-2}\, \psi(u),$$

et la fonction dominante $a^{-2}\,\psi$ est intégrable sur I, en vertu de **1**.

Par le théorème de dérivation sous l'intégrale, il vient que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = \int_I g(x,u)\,\mathrm{d}u = -\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}\,(u+x)^2}\,\mathrm{d}u.$$

4. Fixons $x \in I$. D'abord,

$$xF(x) - K = -\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,\frac{u}{u+x}\,\mathrm{d}u = \int_I (-e^{-u})\,\frac{\sqrt{u}}{u+x}\,\mathrm{d}u.$$

Intégrons alors par parties : on trouve

$$\begin{aligned} xF(x) - K &= \Big[e^{-u}\frac{\sqrt{u}}{u+x}\Big]_0^{+\infty} - \int_I e^{-u}\Big(\frac{1}{2\sqrt{u}\,(u+x)} - \frac{\sqrt{u}}{(u+x)^2}\Big)\mathrm{d}u \\ &= -\int_I e^{-u}\Big(\frac{1}{2\sqrt{u}\,(u+x)} - \frac{\sqrt{u}}{(u+x)^2}\Big)\mathrm{d}u, \end{aligned}$$

formules justifiées par le fait que

$$e^{-u}\frac{\sqrt{u}}{u+x} \underset{u\to 0}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad e^{-u}\frac{\sqrt{u}}{u+x} \underset{u\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi,

$$xF(x) - K = -\frac{1}{2}F(x) + \int_I e^{-u}\frac{\sqrt{u}}{(u+x)^2}\,\mathrm{d}u.$$

Enfin, grâce à la question précédente,

$$xF'(x) + F(x) = \int_I e^{-u}\frac{u}{\sqrt{u}\,(u+x)^2}\,\mathrm{d}u = \int_I e^{-u}\frac{\sqrt{u}}{(u+x)^2}\,\mathrm{d}u.$$

En combinant les deux identités précédentes, on conclut que

$$x\,F'(x) - \big(x - \frac{1}{2}\big)F(x) = -K.$$

5. Comme F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$, la fonction G l'est également. Puis, pour tout $x \in I$, par dérivation d'un produit,

$$\begin{aligned} G'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-x}F(x) - \sqrt{x}\,e^{-x}F(x) + \sqrt{x}\,e^{-x}F'(x) \\ &= x^{-1/2}\,e^{-x}\Big(\frac{F(x)}{2} - xF(x) + xF'(x)\Big) \\ &= -Kx^{-1/2}\,e^{-x} \qquad \text{(d'après 4).} \end{aligned}$$

Ainsi, G est une primitive de $x \mapsto -K \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$. Comme cette dernière est d'intégrale convergente sur I, la fonction $x \mapsto -K \displaystyle\int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt$ en est une autre primitive, si bien qu'il existe une constante réelle C telle que

$$\forall x \in I,\ G(x) = C - K \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$$

6. D'abord, compte tenu de la démonstration vue en **2**, on a $|F(x)| \leqslant \dfrac{K}{x}$ pour tout $x \in I$, et donc, par croissances comparées,

$$G(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ensuite, fixons $x > 0$ et réalisons le changement de variable $u = tx$: on trouve

$$G(x) = \sqrt{x}\,e^{-x}\,F(x) = e^{-x} \int_I \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}\,(1+t)}\,\mathrm{d}t.$$

Appliquons le théorème de continuité sous l'intégrale à

$$h : (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times I \mapsto \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}\,(1+t)}.$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $h(x,-)$ est évidemment continue (par morceaux) sur I.
- Pour tout $t \in I$, la fonction $h(-,t)$ est évidemment continue sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}_+ \times I$, nous avons la domination

$$|h(x,t)| \leqslant h(0,t) = \frac{1}{\sqrt{t}\,(1+t)}$$

et $t \mapsto h(0,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, car équivalente à $t \mapsto t^{-1/2}$ au voisinage de 0^+ et à $t \mapsto t^{-3/2}$ au voisinage de $+\infty$.

Par continuité sous l'intégrale, il vient

$$\int_I h(x,t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to 0+}{\longrightarrow} \int_I h(0,t)\,\mathrm{d}t.$$

Enfin, par le changement de variable $t = u^2$ (de dérivée $u \mapsto 2u$),

$$\int_I h(0,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{2u\,\mathrm{d}u}{u(1+u^2)} = 2\big[\arctan u\big]_0^{+\infty} = \pi.$$

Ainsi,

$$G(x) \underset{x\to 0+}{\longrightarrow} \pi.$$

Grâce à **5**, il vient $C - K^2 = 0$ (limite de G en $+\infty$), et $C = \pi$ (limite de G en 0^+). Comme évidemment $K \geqslant 0$,

$$K = \sqrt{\pi}.$$

B. Étude de deux séries de fonctions

7. Ce sont des sommes de séries entières déguisées ! Pour tout réel $\rho \in [0,1[$, la suite $(\rho^n \sqrt{n})$ tend vers 0, donc le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} \sqrt{n}\, z^n$ est $\geqslant 1$. Il en est de même pour la série $\sum_{n\geqslant 1} n^{-1/2} z^n$, car $n^{-1/2} = O(n^{1/2})$.

La somme S de la première série entière est donc définie et continue sur $]-1,1[$. Pour tout $x \in I$, nous avons alors que $f(x) = S(e^{-x})$ est défini, et ensuite f est continue comme composée de deux fonctions continues. On prouve de même que g est définie et continue sur I.

8. On utilise la méthode classique de comparaison série-intégrale. Fixons à cet effet $x > 0$. La fonction $h : u \mapsto \dfrac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}$ est clairement continue (par morceaux) et décroissante sur l'intervalle I. On prouve qu'elle est intégrable sur I avec la même méthode qui a servi à prouver l'existence de K (question **1**). Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, par intégration des deux inégalités $\forall t \in\,]n-1,n[\,,\ h(n) \leqslant h(t)$ et $\forall t \in\,]n,n+1[\,,\ h(t) \leqslant h(n)$, on trouve

$$\int_n^{n+1} h \leqslant h(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} h.$$

En sommant sur n et en utilisant la relation de Chasles, il vient

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}\, du \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}\, du.$$

Puis, par changement de variable $u = \dfrac{t}{x}$ dans les intégrales encadrantes,

$$x^{-1/2} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt \leqslant f(x) \leqslant x^{-1/2} K$$

et donc

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt \leqslant \sqrt{x}\, f(x) \leqslant K.$$

Le terme minorant tend vers K lorsque x tend vers 0, donc par encadrement $\sqrt{x}\, f(x)$ tend vers $K = \sqrt{\pi}$ lorsque x tend vers 0. Cette limite étant non nulle, on conclut que

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}}.$$

9. Appliquons le théorème de comparaison série-intégrale à la fonction

$$h : t \in [1, +\infty[\mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

Celle-ci est bien continue par morceaux, décroissante et positive. On en déduit que la série de terme général $h(n) - \int_{n-1}^{n} h$ (définie à partir du rang 2) converge. Pour tout $n \geqslant 2$, la somme partielle d'ordre n de cette dernière s'écrit

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - (2\sqrt{n} - 2) - 1.$$

On en déduit la convergence de la suite de terme général $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$.

10. Considérons les séries entières $\sum_{n \geqslant 0} z^n$ et $\sum_{n \geqslant 1} \frac{z^n}{\sqrt{n}}$. On sait qu'elles ont toutes deux un rayon de convergence supérieur ou égal à 1 (cela relève du cours pour la première, et de **7** pour la seconde). Par produit de Cauchy, on a donc, pour tout z dans $\mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$,

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right) \times \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n}}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) z^n.$$

En particulier, en fixant $x \in I$ et en appliquant ce résultat à $z = e^{-x}$,

$$h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) e^{-nx} = \frac{f(x)}{1 - e^{-x}}.$$

11. Au voisinage de 0, on a $1 - e^{-x} \sim -(-x) = x$, donc

$$h(x) \sim \frac{f(x)}{x} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{x^{3/2}}.$$

D'après **9**, il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\forall n \geqslant 1, \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} \right| \leqslant M.$$

Fixons $x \in I$. En sommant et en appliquant l'inégalité triangulaire, il vient

$$|h(x) - 2g(x)| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} M e^{-nx} = \frac{M\, e^{-x}}{1 - e^{-x}} \leqslant \frac{M}{1 - e^{-x}}.$$

Or, au voisinage de 0^+, $\frac{1}{1 - e^{-x}} \sim \frac{1}{x}$, donc

$$g(x) = \frac{h(x)}{2} + O(x^{-1})$$

puis, grâce à l'équivalent précédent,

$$x^{3/2}g(x) \underset{x\to 0+}{\longrightarrow} \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

si bien que

$$g(x) \underset{x\to 0+}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\,x^{3/2}}.$$

C. Séries de fonctions associées à des ensembles d'entiers

12. Si A est fini, alors $a_n = 0$ à partir d'un certain rang, et donc $\sum_n a_n e^{-nx}$ converge pour tout réel x. Dans ce cas, $I_A = \mathbb{R}_+$.

Supposons A infini. Comme A est une partie infinie de $\mathbb{N}$, il existe, d'après le cours sur les ensembles dénombrables, une bijection strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to A$. Ainsi, $b := \big(a_{\varphi(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite de a et $b_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par suite :

- pour tout $x \in \mathbb{R}_-$, la suite $(a_n e^{-nx})_{n\geqslant 0}$ ne converge pas vers 0 (elle a une infinité de termes supérieurs ou égaux à 1), donc $\sum a_n e^{-nx}$ diverge ;
- pour tout x strictement positif, on a $|a_n e^{-nx}| \leqslant (e^{-x})^n$, et la série géométrique $\sum (e^{-x})^n$ converge, car $e^{-x} \in [0,1[$.

Ainsi, dans ce cas, $I_A = I$.

13. Comme la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est supérieur ou égal à 1. On remarque que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{Card}\big(A(n)\big) = \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Comme en **10**, on en déduit, par produit de Cauchy de deux séries entières,

$$\forall x > 0, \quad \frac{f_A(x)}{1-e^{-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Card}\big(A(n)\big)\, e^{-nx}.$$

14. Soit $x > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a, par injectivité de $k \mapsto k^2$ sur $\mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{Card}\big(A_1(n)\big) = \mathrm{Card}\{k\in\mathbb{N}^* : k^2 \leqslant n\} = \mathrm{Card}\Big\{k\in\mathbb{N}^* : k \leqslant \sqrt{n}\Big\} = \lfloor\sqrt{n}\rfloor.$$

D'après **13**, il vient

$$\frac{f_{A_1}(x)}{1-e^{-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lfloor\sqrt{n}\rfloor e^{-nx}.$$

Par inégalité triangulaire, on en déduit

$$\left| g(x) - \frac{f_{A_1}(x)}{1-e^{-x}} \right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \big|\sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor\big|\, e^{-nx} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx} = \frac{1}{1-e^{-x}}.$$

Ainsi,

$$f_{A_1}(x) = (1 - e^{-x})\, g(x) + O_{x\to 0^+}(1).$$

D'après **11**,

$$(1 - e^{-x})\, g(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}},$$

et comme cet équivalent tend vers $+\infty$ en 0, on en déduit

$$f_{A_1}(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}.$$

Par suite,

$$x f_{A_1}(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi, $A_1 \in S$ et $\Phi(A_1) = 0$.

15. On note ici $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite associée à l'ensemble A_2, et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ celle associée à A_1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en posant

$$\Lambda_n := \{(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2 : i^2 + j^2 = n\},$$

on trouve

$$\sum_{k=0}^{n} b_{n-k}\, b_k = \sum_{\substack{(i,j)\in\mathbb{N}^2 \text{ tel que} \\ b_i=b_j=1, i+j=n}} 1 = \sum_{(i,j)\in\Lambda_n} 1 = \nu(n).$$

Ainsi, pour tout réel $x > 0$, on trouve, par produit de Cauchy de deux séries entières évaluées en e^{-x},

$$f_{A_1}(x)^2 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\, e^{-nx}\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\, e^{-nx}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \nu(n)\, e^{-nx}.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a évidemment $0 \leqslant a_n \leqslant \nu(n)$ par définition de A_2, et donc

$$\forall x > 0, \quad f_{A_2}(x) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \nu(n)\, e^{-nx} = f_{A_1}(x)^2.$$

Il vient donc

$$\forall x > 0, \quad x\, f_{A_2}(x) \leqslant \left(\sqrt{x}\, f_{A_1}(x)\right)^2.$$

Compte tenu d'un résultat obtenu en **14**, le terme majorant tend vers $\frac{\pi}{4}$ lorsque x tend vers 0. Or, on a admis l'existence de $\Phi(A_2)$. Par passage à la limite, il vient donc

$$\Phi(A_2) \leqslant \frac{\pi}{4}.$$

D. Un théorème taubérien

Par souci de légèreté, nous noterons, dans la mesure du possible, $L\psi$ plutôt que $L(\psi)$.

16. Soit $\psi \in E$. Soit $x \in I$. Comme α est à termes positifs, on trouve

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left|\alpha_n e^{-nx}\psi(e^{-nx})\right| \leqslant \|\psi\|_\infty\, \alpha_n e^{-nx},$$

et par hypothèse la série $\sum \alpha_n e^{-nx}$ converge. Ainsi, $L\psi$ est définie en x. Si en outre $\psi \geqslant 0$, on note que $L\psi \geqslant 0$ (somme d'une série à terme général positif).

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et ψ_1 et ψ_2 dans E. Alors, par linéarité de l'opérateur de sommation des séries convergentes, pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned}\big(L(\lambda\psi_1 + \psi_2)\big)(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx}\big(\lambda\psi_1(e^{-nx}) + \psi_2(e^{-nx})\big)\\ &= \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx}\psi_1(x) + \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx}\psi_2(x)\\ &= \lambda\,\big(L\psi_1\big)(x) + \big(L\psi_2\big)(x).\end{aligned}$$

Donc, $L(\lambda\psi_1 + \psi_2) = \lambda\, L(\psi_1) + L(\psi_2)$. Ainsi, L est linéaire.

Soit enfin ψ_1 et ψ_2 dans E tels que $\psi_1 \leqslant \psi_2$. Alors, $\psi_2 - \psi_1 \geqslant 0$, et donc

$$L\psi_2 - L\psi_1 = L(\psi_2 - \psi_1) \geqslant 0.$$

Ainsi, L est croissante.

17. Par définition, $E_1 \subset E$.
Pour $\psi = 0$, on a $L\psi = 0$, donc $x\,(L\psi)(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, et ainsi $\psi \in E_1$.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et ψ_1 et ψ_2 dans E_1. Par linéarité de L, on a donc

$$x\,\big(L(\lambda\psi_1 + \psi_2)\big)(x) = \lambda\, x\,(L\psi_1)(x) + x\,(L\psi_2)(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \lambda\,\Delta(\psi_1) + \Delta(\psi_2).$$

On en déduit simultanément que E_1 est un sous-espace vectoriel de E et que Δ est une forme linéaire sur E_1.

Soit enfin $\psi \in E_1$. Pour tout $x \in I$, on trouve par inégalité triangulaire

$$\left|x\big(L\psi\big)(x)\right| \leqslant \|\psi\|_\infty\, x \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx}$$

et donc, en passant à la limite en 0^+,

$$\left|\Delta(\psi)\right| \leqslant \ell\, \|\psi\|_\infty.$$

Ainsi, la forme linéaire Δ est continue.

18. Soit $p \in \mathbb{N}$. La fonction e_p est évidemment continue (par morceaux). Pour tout $x \in I$,

$$x\,(Le_p)(x) = x\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx(p+1)} = \frac{1}{p+1}\,(p+1)x\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-n(x(p+1))}$$

et donc

$$x(Le_p)(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{\ell}{p+1}.$$

Ainsi, $e_p \in E_1$ et $\Delta(e_p) = \dfrac{\ell}{p+1} = \ell \displaystyle\int_0^1 e_p$.

Comme E_1 est un sous-espace vectoriel de E, il vient que toute fonction polynomiale P appartient à E_1 et, par linéarité des opérateurs Δ et $\ell \displaystyle\int_0^1$,

$$\Delta(P) = \ell\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t.$$

Soit maintenant $f \in E_0$. Le théorème de densité de Weierstrass donne une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales de E convergeant vers f pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. Montrons alors que la suite de fonctions de terme général $F_n : x \mapsto x\,(LP_n)(x)$ converge uniformément vers $F : x \mapsto x\,(Lf)(x)$ au voisinage de 0^+.

- Par hypothèses sur $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$, il existe un voisinage V de 0 dans $\mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \cap V, \quad x\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx} \leqslant \ell + 1.$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a ensuite, par inégalité triangulaire, avec la même méthode qu'en **17**,

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}_+^* \cap V, \quad \big|x\,(LP_n)(x) - x\,(Lf)(x)\big| &\leqslant x\,\|P_n - f\|_\infty \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n\, e^{-nx}\\ &\leqslant (\ell+1)\,\|P_n - f\|_\infty,\end{aligned}$$

et le terme majorant tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Par ailleurs, par convergence uniforme d'une suite de fonctions continues sur un segment,

$$\ell\int_0^1 P_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell\int_0^1 f.$$

On a donc le schéma d'interversion de limites qui apparaît sur la page suivante, et où la variable x est prise dans $V \cap \mathbb{R}_+^*$.

Dans ce schéma, la convergence interrogative est conséquence des autres.

$$
\begin{tikzcd}
x\,(LP_n)(x) \arrow[r, "\mathrm{CVU}", "n\to+\infty"'] \arrow[d, "x\to 0^+"'] & x\,(Lf)(x) \arrow[d, "x\to 0^+"', "?"] \\
\ell\int_0^1 P_n \arrow[r, "n\to+\infty"'] & \ell\int_0^1 f.
\end{tikzcd}
$$

Ainsi,

$$f \in E_1 \quad \text{et} \quad \Delta(f) = \ell \int_0^1 f.$$

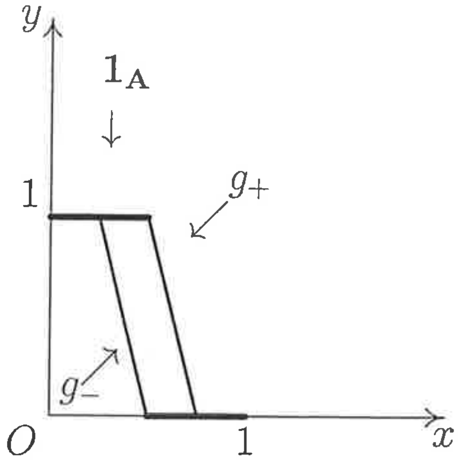
19. Son expression montre que g_- est polynomiale au voisinage de tout point de $[0,1] \setminus \{a-\varepsilon,a\}$ — donc continue en chacun de ces points — et qu'elle est continue à gauche en $a-\varepsilon$ et à droite en a. Ensuite, on remarque que l'expression

$$\forall x \in [a-\varepsilon,a], \quad g_-(x) = \frac{a-x}{\varepsilon}$$

est valable y compris aux bornes de l'intervalle, et donc g_- est continue à droite en $a-\varepsilon$ et à gauche en a. Par suite, g est continue en $a-\varepsilon$ et en a, puis continue sur $[0,1]$.

On procède de la même manière pour établir la continuité de g_+, en utilisant cette fois-ci l'identité

$$\forall x \in [a,a+\varepsilon], \quad g_+(x) = \frac{a+\varepsilon-x}{\varepsilon}.$$



Posons $f := \mathbf{1}_{[0,a]}$ et remarquons que $f \in E$ et $g_- \leqslant f \leqslant g_+$. Vu le dernier résultat établi en **16**, il vient

$$\forall x > 0, \quad x\,(Lg_-)(x) \leqslant x\,(Lf)(x) \leqslant x\,(Lg_+)(x).$$

Le résultat de la question précédente s'applique ensuite à g_+ et g_- et montre qu'il existe des réels $\delta_1 > 0$ et $\delta_2 > 0$ tels que

$$\forall x \in \,]0,\delta_1] \,, \; \left| x\,(Lg_+)(x) - \ell \int_0^1 g_+ \right| \leqslant \varepsilon$$

et

$$\forall x \in \,]0,\delta_2] \,, \; \left| x\,(Lg_-)(x) - \ell \int_0^1 g_- \right| \leqslant \varepsilon.$$

Posons $\delta := \min(\delta_1,\delta_2)$. Il vient, pour tout $x \in \,]0,\delta]$,

$$-\varepsilon + \ell \int_0^1 g_- \leqslant xLf(x) \leqslant \varepsilon + \ell \int_0^1 g_+.$$

Enfin,

$$\int_0^1 g_- = a - \varepsilon + \int_{a-\varepsilon}^a \frac{a-x}{\varepsilon}\,\mathrm{d}x = a - \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2\varepsilon} = a - \frac{\varepsilon}{2},$$

et l'on prouve de la même manière que

$$\int_0^1 g_+ = a + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Il vient donc, pour tout $x \in \,]0,\delta]$,

$$\ell a - \left(1 + \frac{\ell}{2}\right)\varepsilon \leqslant x\,Lf(x) \leqslant \ell a + \left(1 + \frac{\ell}{2}\right)\varepsilon.$$

Par retour à la définition d'une limite, il vient

$$x\,Lf(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} \ell a.$$

Autrement dit, $\mathbf{1}_{[0,a]}$ appartient à E_1 et

$$\Delta(\mathbf{1}_{[0,a]}) = \ell a = \ell \int_0^1 \mathbf{1}_{[0,a]}.$$

L'inclusion $E_1 \subset E$ étant vraie par définition de E, nous montrons maintenant l'inclusion réciproque.

Avec rigoureusement la même méthode que précédemment, on trouve que $\mathbf{1}_{[0,a[}$ appartient à E_1 et que $\Delta(\mathbf{1}_{[0,a[}) = \ell\, a$.

Enfin, il est immédiat que $L\mathbf{1}_{\{0\}} = 0$, alors que

$$L\mathbf{1}_{[0,1[} : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx},$$

et l'on en tire immédiatement que $\mathbf{1}_{\{0\}}$ et $\mathbf{1}_{[0,1[}$ sont dans E_1 et ont pour images respectives 0 et ℓ par Δ. Enfin, $\mathbf{1}_{[0,1]}$ et $\mathbf{1}_{[0,0[}$ sont continues.

Il est donc établi que

$$\mathcal{F} := \{\mathbf{1}_{[0,a]} \mid a \in [0,1]\} \cup \{\mathbf{1}_{[0,a[} \mid a \in [0,1]\}$$

est inclus dans E_1 et que les fonctions Δ et $f \mapsto \ell \int_0^1 f$ coïncident sur $\mathcal{F}$.

Nous montrons maintenant que $\mathcal{F}$ engendre l'espace vectoriel $\mathcal{E}$ des fonctions en escalier de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

- Les éléments de $\mathcal{F}$ sont évidemment en escalier.
- Pour tout $b \in [0,1]$, on a $\mathbf{1}_{\{b\}} = \mathbf{1}_{[0,b]} - \mathbf{1}_{[0,b[} \in \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.
- Soit alors $f \in \mathcal{E}$, et notons $\sigma = (x_0, \ldots, x_n)$ une subdivision adaptée. Il est alors clair que la fonction

$$g := f - f(1^-)\,\mathbf{1}_{[0,1]} + \sum_{k=1}^{n-1} \big(f(x_k^+) - f(x_k^-)\big)\,\mathbf{1}_{[0,x_k]}$$

est en escalier avec σ comme subdivision adaptée, qu'elle est nulle au voisinage de 1^- et admet des limites à gauche et à droite identiques en tout point de $\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$. Ainsi, g est nulle sur tout $[0,1] \setminus \{x_0, \ldots, x_n\}$, si bien que $g = \sum_{k=0}^{n} g(x_k)\mathbf{1}_{\{x_k\}}$. Par suite,

$$f = f(1^-)\mathbf{1}_{[0,1]} + \sum_{k=1}^{n-1} \big(f(x_k^-) - f(x_k^+)\big)\,\mathbf{1}_{[0,x_k]} + \sum_{k=0}^{n} g(x_k)\,\mathbf{1}_{\{x_k\}},$$

et donc $f \in \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.

Il est enfin temps de conclure ! Nous venons de prouver que E_1 contient toute fonction en escalier. En outre, les opérateurs linéaires Δ et $\ell \int_0^1$ coïncident sur $\mathcal{F}$, donc sur $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) = \mathcal{E}$.

Comme tout élément de E est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier, on obtient, en imitant la démonstration de **18**, que $E = E_1$ et que

$$\forall \psi \in E, \quad \Delta(\psi) = \ell \int_0^1 \psi(t)\,\mathrm{d}t.$$

20. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, par croissance stricte de l'exponentielle,

$$e^{-k/N} \geqslant e^{-1} \iff -\frac{k}{N} \geqslant -1 \iff k \leqslant N.$$

Par définition de ψ, il vient donc

$$(L\psi)\Big(\frac{1}{N}\Big) = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k\, e^{-k/N}\,\frac{1}{e^{-k/N}} = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k.$$

Or, la fonction ψ est continue par morceaux, avec $(0,e^{-1},1)$ pour subdivision adaptée : en effet, elle est clairement continue en tout point de l'ensemble $[0,1] \setminus \{e^{-1}\}$ et admet des limites finies à droite et à gauche en e^{-1}. On déduit donc de **19** que

$$\frac{1}{N}(L\psi)\Big(\frac{1}{N}\Big) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \int_0^1 \psi.$$

Enfin,

$$\int_0^1 \psi = \int_{e^{-1}}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \big[\ln x\big]_{e^{-1}}^1 = 1.$$

Il vient donc

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N} \alpha_k \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

21. Soit $A \in S$. Par définition de S, la suite positive $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les hypothèses de cette partie avec $\ell = \Phi(A)$. Le théorème taubérien montre donc que

$$\frac{1}{n}\ \mathrm{Card}\big(A(n)\big) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} a_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \Phi(A).$$

Par ailleurs, on a vu en **15** que, pour tout $x > 0$, la série $\sum_n \nu(n)\, e^{-nx}$ converge et

$$x\sum_{n=0}^{+\infty} \nu(n)\, e^{-nx} \underset{x\to 0+}{\longrightarrow} \frac{\pi}{4}.$$

Ainsi, le théorème taubérien s'applique à la suite positive $\big(\nu(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et montre, puisque $\nu(0) = 0$, que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \nu(k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{4}.$$

COMMENTAIRES

Après reformulation en termes de séries entières, le théorème établi dans la partie **D** s'énonce comme suit.

Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence au moins égal à 1 dans laquelle $a_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si la fonction $x \mapsto (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ admet une limite finie ℓ en 1^-, alors

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} a_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

Ce théorème a été énoncé et démontré pour la première fois par Geoffrey Hardy et John Littlewood [17], en 1914. La démonstration qui faisait l'objet de la partie **D** reprenait la démonstration alternative, nettement plus courte, de Jovan Karamata [21], en 1930.

Signalons que la réciproque du théorème est vraie et est assez élémentaire : si la suite $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} a_k\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers ℓ, alors, en notant A_n la somme partielle d'ordre n de la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$, on a

$$\forall x \in [0,1[\,,\qquad \frac{1}{1-x}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n x^n$$

puis, comme $A_n = \ell(n+1) + o(n+1)$ et $\sum (n+1)$ diverge, on montre classiquement qu'au voisinage de 1^-,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} A_n\, x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\,\ell\, x^n + o\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\, x^n\Big),$$

soit

$$\sum_{n=0}^{+\infty} A_n\, x^n = \frac{\ell}{(1-x)^2} + o\Big(\frac{1}{(1-x)^2}\Big),$$

et l'on en déduit que

$$(1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} \ell.$$

Le classique théorème taubérien de Littlewood [23] peut être déduit, au prix de quelque effort, du théorème précité (voir les pages 233 à 235 de [33] pour les détails). En outre, la méthode de Karamata peut être mise en œuvre pour démontrer directement le théorème de Littlewood. Pour un examen approfondi de ce dernier et notamment de sa démonstration historique, nous renvoyons au chapitre 1 de [7].

Le théorème de Hardy & Littlewood, ou plutôt sa généralisation, a des applications en théorie des probabilités : voir [11]. L'une d'entre elles faisait l'objet du premier problème donné aux candidats des voies PSI et PC au Concours Commun Mines-Ponts 2016.

Passons maintenant à quelques remarques techniques sur le corrigé.

• À compter de la partie **B**, nous avons systématiquement utilisé le fait que la plupart des séries de fonctions apparaissant dans l'énoncé étaient des séries entières déguisées, ce qui nous a permis de donner des démonstrations simplifiées. Citons néanmoins les arguments que le concepteur semblait attendre aux dites questions :

▷ en **7**, on pouvait invoquer le théorème de continuité pour les sommes de séries de fonctions, avec convergence normale sur l'intervalle $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$;

▷ en **10**, **13** et **15**, on pouvait soit invoquer le théorème de sommation par paquets, soit reconnaître le produit de Cauchy de deux séries numériques absolument convergentes.

• En **18**, nous avons raccourci la preuve en reconnaissant un argument d'interversion des limites. Il était bien sûr possible — mais plus long — de revenir à la définition de la limite, en « sortant la boîte à epsilons » comme on l'a fait en **19**.

THÉORÈMES UTILISÉS

• **Théorème** 23, **p.** 285. Théorème de continuité sous l'intégrale

• **Théorème** 24, **p.** 285. Théorème de dérivabilité sous l'intégrale

• **Théorème** 20, **p.** 284. Théorème de comparaison série-intégrale

• **Théorème** 13, **p.** 283. Théorème d'interversion des limites

• **Théorème** 15, **p.** 283. Théorème d'approximation polynomiale de Weierstrass

• **Théorème** 16, **p.** 283. Théorème d'approximation par des fonctions en escalier

CC INP Mathématiques 1 MP

Partie 1 : Développement ternaire

1. Montrons que ℓ^∞ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:
   - On a tout d'abord $\ell^\infty \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$;
   - La suite nulle étant bornée, elle appartient bien à ℓ^∞ ;
   - Si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont deux suites de ℓ^∞, bornées respectivement par M_u et M_v et λ, μ deux réels, l'inégalité triangulaire nous apprend que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$|\lambda u_n + \mu v_n| \leqslant |\lambda|\mathrm{M}_u + |\mu|\mathrm{M}_v$$
   ce qui montre que $\lambda u + \mu v$ est bornée, donc dans ℓ^∞.

   Ainsi, par caractérisation des sous-espaces vectoriels, ℓ^∞ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, donc un espace vectoriel réel.

   Montrons maintenant que $u \mapsto \|u\|$ est une norme sur ℓ^∞ :
   - **Caractère bien défini** : si $u \in \ell^\infty$,
   $$\{|u_n|, n \in \mathbb{N}^*\}$$
   est une partie non vide (elle contient $|u_1|$) et majorée (puisque u est bornée) de $\mathbb{R}$, donc par propriété de la borne supérieure, $\|u\|$ existe.
   - **Séparation** : si $u \in \ell^\infty$ est telle que $\|u\| = 0$, cela veut dire que $\sup_{n\in\mathbb{N}^*} |u_n| = 0$, donc que 0 majore tous les $|u_n|$, qui sont des nombres positifs. On a donc :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |u_n| = 0$$
   et par suite, u est la suite nulle.
   - **Inégalité triangulaire** : soit $(u, v) \in (\ell^\infty)^2$. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
   $$|u_n + v_n| \leqslant |u_n| + |v_n| \leqslant \|u\| + \|v\|$$
   donc la quantité $\|u\| + \|v\|$ est un majorant de tous les nombres $|u_n + v_n|$, et elle est donc plus grande que le plus petit desdits majorants, à savoir $\|u + v\|$. On a donc bien :
   $$\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$$
   - **Homogénéité** : soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in \ell^\infty$. Si $\lambda = 0$, on a $\|\lambda u\| = 0 = 0\|u\|$. Supposons maintenant $\lambda \neq 0$. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
   $$|\lambda u_n| = |\lambda||u_n| \leqslant |\lambda|\|u\|$$
   De ce fait, $\|\lambda u\| \leqslant |\lambda|\|u\|$. Par ailleurs, on a $u = \frac{1}{\lambda}(\lambda u)$, donc :
   $$\|u\| = \|\frac{1}{\lambda}(\lambda u)\| \leqslant \frac{1}{|\lambda|}\|\lambda u\|$$
   et donc
   $$\|\lambda u\| \geqslant |\lambda|\|u\|$$
   On conclut donc à l'égalité
   $$\|\lambda u\| = |\lambda|\|u\|$$
   ce qui conclut la preuve.

2. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \ell^\infty$, bornée par M. Alors, on a
$$0 \leqslant \frac{|u_n|}{3^n} \leqslant \frac{M}{3^n}$$
par croissances comparées. Or, $\frac{M}{3^n}$ est le terme général d'une série convergente (série géométrique de raison dans $]0;1[$) ; par comparaison de séries à termes positifs, la série de terme général $\frac{u_n}{3^n}$ converge donc absolument, donc converge.

3. Montrons tout d'abord que σ est bien une forme linéaire sur ℓ^∞. σ est bien à valeurs dans $\mathbb{R}$. Par ailleurs, soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \ell^\infty$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a alors
$$\sigma(\lambda u + \mu v) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\lambda u_n + \mu v_n)}{3^n} = \lambda\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{3^n}\right) + \mu\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{v_n}{3^n}\right) = \lambda\sigma(u) + \mu\sigma(v)$$
par linéarité de la somme d'une série (notons que cette égalité est justifiée par le fait que toutes les séries qui interviennent convergent bien d'après la question précédente). Ainsi, σ est linéaire, et σ est donc bien une forme linéaire.
Montrons maintenant que σ est continue. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \ell^\infty$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Alors :
$$\left|\sum_{n=1}^{N} \frac{u_n}{3^n}\right| \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{|u_n|}{3^n} \leqslant \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{3^n}\right)\|u\|$$
Le terme de gauche de cette inégalité converge vers $|\sigma(u)|$, celui de droite converge également car la série de terme général $\frac{1}{3^n}$ converge, pour les mêmes raisons qu'à la question 2. Par conséquent, on peut passer à la limite pour obtenir
$$|\sigma(u)| \leqslant \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n}\right)\|u\|$$
et d'après une caractérisation de la continuité des applications linéaires, cela montre que σ est une forme linéaire continue sur ℓ^∞.

4. Soit $t = (t_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in T$. Notamment, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant \frac{t_n}{3^n} \leqslant \frac{2}{3^n}$, donc
$$0 \leqslant \sigma(t) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{3^n}$$
et cette dernière somme de série vaut 1 (somme de série géométrique). On peut le retrouver en écrivant
$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \sum_{n=1}^{N} \frac{2}{3^n} = 2\frac{1-3^{-N}}{2}$$
Donc $\sigma(t) \in [0;1]$.

5. On a
$$\sigma(\tau) = \frac{\tau_1}{3^1} = \frac{1}{3}$$

et

$$\sigma(\tau') = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{3^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{3^n} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Notamment, l'application σ n'est pas injective sur T.

6. Il s'agit de montrer que $t(x)$ est à valeurs dans $\{0,1,2\}$. Notons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, t_n(x)$ est un entier relatif comme différence d'entiers relatifs. Par ailleurs, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$3^n x - 1 < \lfloor 3^n x \rfloor \leqslant 3^n x$$

et

$$3^{n-1}x - 1 < \lfloor 3^{n-1}x \rfloor \leqslant 3^{n-1}x$$

d'où (à chaque fois on somme une inégalité large et une inégalité stricte, donc on a bien une inégalité stricte)

$$3^n x - 1 - 3(3^{n-1}x) = -1 < t_n(x) < 3^n x - 3(3^{n-1}x - 1) = 3$$

Et puisque $t_n(x)$ est entier, on a bien $t_n(x) \in \{0,1,2\}$. Donc $t(x) \in$ T.

7. Tout d'abord, $y_n - x_n = \frac{1}{3^n}$, donc $y_n - x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. De plus

$\forall n \geqslant 2,$
$$x_n - x_{n-1} = \frac{\lfloor 3^n x \rfloor}{3^n} - \frac{\lfloor 3^{n-1}x \rfloor}{3^{n-1}} = \frac{t_n(x)}{3^n} \geqslant 0$$

donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, et, pour $n \geqslant 2$,

$$y_n - y_{n-1} = \frac{t_n(x)}{3^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{3^{n-1}} = \frac{t_n(x) - 2}{3^n} \leqslant 0$$

donc $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante. Ainsi, les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. Puisqu'on a l'encadrement, valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$3^n x - 1 \leqslant \lfloor 3^n x \rfloor \leqslant 3^n x$$

on a donc

$$x\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) \leqslant x_n \leqslant x$$

et par théorème d'encadrement, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge donc vers x, et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de même puisque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. Par ailleurs, pour $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{t_n(x)}{3^n} = \frac{t_1(x)}{3} + \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{t_{n+1}(x)}{3^{n+1}} = \frac{\lfloor 3x \rfloor}{3} - \lfloor x \rfloor + \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} (x_{n+1} - x_n) = x_1 - 0 + x_{\mathrm{N}+1} - x_1 = x_{\mathrm{N}+1}$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t_n(x)}{3^n} = x$$

8. En appliquant la formule donnée par l'énoncé [1] :

```
def flotVersTern(n,x):
    T=[]
    for k in range(1,n+1):
        T.append(int(3**k*x)-3*int(3**(k-1)*x))
    return T
```

9. Il suffit ici de calculer la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t_n(x)}{3^n}$ sachant que les derniers termes sont nuls :

```
def ternVersFlot(l):
    x=0
    for k in range(len(l)):
        x+=l[k]/3**(k+1)
    return x
```

10. C'est un simple test :

```
def ajout(l):
    s=0
    for k in l:
        s+=k
    if s%2==0:
        l.append(-1)
    else:
        l.append(-2)
    return l
```

De même pour verif :

```
def verif(l):
    s=0
    for k in range(len(l)-1):
        s+=l[k]
    if s%2==0 and l[-1]==-1:
        return True
    if s%2==1 and l[-1]==-2:
        return True
    return False
```

On pouvait aussi remarquer que c'est correct si la somme de tous les termes est impaire :

1. Notons ici qu'il y a un problème de précision : les flottants ont une précision maximale, et l'entier peut quant à lui être arbitrairement grand. La fonction proposée ne peut structurellement qu'être une approximation de la représentation ternaire.

```
def verif(l):
    if l[-1]!=-1 and l[-1]!=-2:
        return False
    return sum(l)%2==1
```

Partie 2 : Étude d'une fonction définie par une série

11. Notons $\begin{array}{cccc} f_n : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{1+\sin(nx)}{3^n} \end{array}$.

— Les f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ comme composition, somme et quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

— Comme sin varie entre 1 et 1, $\|f_n\|_\infty = \frac{2}{3^n}$. Par ailleurs, $\sum_{n\geqslant 1} \frac{2}{3^n}$ converge (c'est une série géométrique de raison $\frac{1}{3}$). Donc $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement, donc simplement, sur $\mathbb{R}$.

— Pour tout $x \in \mathbb{R}, f_n'(x) = \frac{n\cos(nx)}{3^n}$ donc $\|f\|_\infty = \frac{n}{3^n}$. Or, $\frac{n}{3^n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ par croissance comparée. Comme $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est une série positive et convergente (c'est une série de Riemann d'exposant strictement plus grand que 1), par comparaison, $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n}{3^n}$ converge. Donc $\sum_{n\geqslant 1} f_n'$ converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}$.

D'après le théorème de dérivation d'une somme de série, φ est donc bien définie sur $\mathbb{R}$ et est de classe $\mathcal{C}^1$.

12. Notons que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\left|\frac{e^{inx}}{3^n}\right| \leqslant \frac{1}{3^n}$$

De même que dans la question 2, la série de fonctions $x \mapsto \sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{inx}}{3^n}$ converge donc simplement. Notamment, sa partie imaginaire converge simplement. Soit maintenant $x \in \mathbb{R}$: on a

$$\operatorname{Im}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{3^n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{Im}\left(\frac{e^{inx}}{3^n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{3^n}$$

D'autre part, par le même calcul qu'à la question 4,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}$$

On obtient donc bien

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{3^n} = \frac{1}{2} + \mathrm{Im}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}}{3^n}\right)$$

Enfin, par somme d'une série géométrique convergente :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}}{3^n} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{3\left(1 - \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{3}\right)} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\left(1 - \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{3}\right)}{3\left(\left(1 - \frac{\cos(x)}{3}\right)^2 + \frac{\sin^2(x)}{9}\right)} = \frac{3\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - 1}{10 - 6\cos(x)}$$

On obtient donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{2} + \frac{3\sin(x)}{10 - 6\cos(x)}$$

13. La question 11 nous a permis de vérifier le théorème de dérivation d'une série de fonctions terme à terme. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\varphi'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\cos(nx)}{3^n}$$

D'autre part, en dérivant à vue l'expression obtenue à la question précédente, on trouve que, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\varphi'(x) = \frac{3\cos(x)(10 - 6\cos(x)) - 3\sin(x)6\sin(x)}{(10 - 6\cos(x))^2} = \frac{-18 + 30\cos(x)}{(10 - 6\cos(x))^2}$$

On en déduit donc que, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\cos(nx)}{3^n} = \frac{-18 + 30\cos(x)}{(10 - 6\cos(x))^2}$$

14. On a montré en question 11 que $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Cette série converge donc uniformément. Par ailleurs, les f_n, étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, sont notamment continues sur $[0, \pi]$. Par théorème d'intégration d'une série terme à terme :

$$\int_0^{\pi} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^{\pi} f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

donc

$$\int_0^{\pi} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{x}{3^n} - \frac{\cos(nx)}{n3^n}\right]_0^{\pi} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\pi}{3^n} + \frac{(-1)^{n-1} + 1}{n3^n}\right)$$

Or, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi}{3^n} = \pi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{\pi}{2}$ d'après la question 12, donc :

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{10 - 6\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \frac{\varphi(x) - \frac{1}{2}}{3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_0^{\pi} \varphi(x)\,\mathrm{d}x - \frac{\pi}{6} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} + 1}{n3^{n+1}}$$

Enfin, par développement en série entière, on a, pour tout $x \in]-1,1[$, $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$, donc

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{10-6\cos(x)}\, dx = \frac{1}{3}\left(\ln\left(1+\frac{1}{3}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{1}{3}\ln(2)$$

15. Avec le changement de variable (licite, car de classe $\mathcal{C}^1$) $\left\{ \begin{array}{l} u = \cos(x) \\ du = -\sin(x)\, dx \end{array} \right.$, on obtient que

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{10-6\cos(x)}\, dx = \int_1^{-1} \frac{-1}{10-6u}\, du = \left[\frac{1}{6}\ln(10-6u)\right]_1^{-1} = \frac{1}{3}\ln(2)$$

Partie 3 : Développements ternaires aléatoires

16. Par construction, pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout $\mathrm{N} \geqslant 2$, $\mathrm{T}_{n,\mathrm{N}}$ est une variable aléatoire finie, donc X_N est une variable aléatoire finie comme somme (finie!) de telles variables aléatoires. X_N admet donc une espérance et une variance. Notons que

$$\mathrm{E}(\mathrm{T}_{n,\mathrm{N}}) = \frac{1}{\mathrm{N}}.0 + \frac{1}{\mathrm{N}}.1 + \left(1-\frac{2}{\mathrm{N}}\right)2 = 2 - \frac{3}{\mathrm{N}}$$

Donc, par linéarité de l'espérance,

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}_\mathrm{N}) = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{\mathrm{E}(\mathrm{T}_{n,\mathrm{N}})}{3^n} = \left(2-\frac{3}{\mathrm{N}}\right)\frac{1}{3}\frac{1-\frac{1}{3^\mathrm{N}}}{1-\frac{1}{3}}$$

Et finalement :

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}_\mathrm{N}) = \left(2-\frac{3}{\mathrm{N}}\right)\frac{3^\mathrm{N}-1}{2.3^\mathrm{N}}$$

Par ailleurs, comme les $\mathrm{T}_{n,\mathrm{N}}$ sont mutuellement indépendants, les $\frac{\mathrm{T}_{n,\mathrm{N}}}{3^n}$ le sont aussi. Donc

$$\mathrm{V}(\mathrm{X}_\mathrm{N}) = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{V}\left(\frac{\mathrm{T}_{n,\mathrm{N}}}{3^n}\right)$$

Or, par formule de transfert, on a

$$\mathrm{E}(\mathrm{T}_{n,\mathrm{N}}^2) = \frac{1}{\mathrm{N}}.0 + \frac{1}{\mathrm{N}}.1 + \left(1-\frac{2}{\mathrm{N}}\right)4 = 4 - \frac{7}{\mathrm{N}}$$

Donc

$$\mathrm{V}(\mathrm{T}_{n,\mathrm{N}}) = 4 - \frac{7}{\mathrm{N}} - \left(2-\frac{3}{\mathrm{N}}\right)^2 = \frac{5}{\mathrm{N}} - \frac{9}{\mathrm{N}^2}$$

On a donc

$$\mathrm{V}(\mathrm{X}_\mathrm{N}) = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{3^{2n}}\left(\frac{5}{\mathrm{N}} - \frac{9}{\mathrm{N}^2}\right) = \frac{1}{9}\frac{1-\frac{1}{9^\mathrm{N}}}{1-\frac{1}{9}}\left(\frac{5}{\mathrm{N}} - \frac{9}{\mathrm{N}^2}\right)$$

Finalement :

$$V(X_N) = \frac{9^N - 1}{8.9^N}\left(\frac{5}{N} - \frac{9}{N^2}\right)$$

17. Puisque X_N admet une variance (d'après la question 16), l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev s'applique, et

$$0 \leqslant P(|X_N - E(X_N)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{V(X_N)}{\varepsilon^2} = \frac{9^N - 1}{8.9^N\varepsilon^2}\left(\frac{5}{N} - \frac{9}{N^2}\right)$$

L'inégalité de gauche étant due au fait qu'une probabilité est à valeurs dans $[0, 1]$. Le terme de droite tend vers 0 (c'est le produit de $\frac{9^N-1}{8.9^N\varepsilon^2}$, qui est convergent donc borné, et d'une suite qui tend vers 0 comme différence de deux telles suites), donc, par encadrement :

$$\lim_{N\to+\infty} P(|X_N - E(X_N)| \geqslant \varepsilon) = 0$$

18. La quantité $|E(X_N) - 1|$ est une constante ; donc $P\left(|E(X_N) - 1| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right)$ ne peut valoir que 0 ou 1. Distinguons deux cas :

— Si $|E(X_N) - 1| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$, alors

$$P\left(|E(X_N) - 1| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) = 1$$

et on a alors bien (puisqu'une probabilité est majorée par 1)

$$P(|X_N - 1| \geqslant \varepsilon) \leqslant P\left(|X_N - E(X_N)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) + P\left(|E(X_N) - 1| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

— Si $|E(X_N) - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$, alors

$$P\left(|E(X_N) - 1| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) = 0$$

Supposons que $|X_N - 1| \geqslant \varepsilon$. On a alors (par inégalité triangulaire)

$$\varepsilon \leqslant |X_N - 1| = |X_N - E(X_N) + E(X_N) - 1| \leqslant |X_N - E(X_N)| + |E(X_N) - 1| \leqslant |X_N - E(X_N)| + \frac{\varepsilon}{2}$$

donc

$$|X_N - E(X_N)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

On a montré l'inclusion d'événements

$$(|X_N - 1| \geqslant \varepsilon) \subset \left(|X_N - E(X_N)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

et par croissance des probabilités, on a donc

$$P(|X_N - 1| \geqslant \varepsilon) \leqslant P\left(|X_N - E(X_N)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) = P\left(|X_N - E(X_N)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) + P\left(|E(X_N) - 1| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Soit $\varepsilon > 0$; puisque $\mathbf{E}(X_n) = \left(2 - \frac{3}{N}\right)\frac{3^N - 1}{2.3^N} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, on a, à partir d'un certain rang,

$$|\mathbf{E}(X_n) - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

et donc, à partir d'un tel rang,

$$\mathbf{P}\left(|\mathbf{E}(X_n) - 1| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) = 0$$

Par ailleurs, d'après la question 17, on a

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbf{P}\left(|X_N - E(X_N)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) = 0$$

Puisque $\mathbf{P}(|X_N - 1| \geqslant \varepsilon)$ est une suite positive majorée par une suite tendant vers 0, par encadrement, on en déduit finalement que

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbf{P}(|X_N - 1| \geqslant \varepsilon) = 0$$

Partie 4 : Fonction de Cantor-Lebesgue

19. On a :

$$\forall x \in [0,1], f_0(x) = x$$

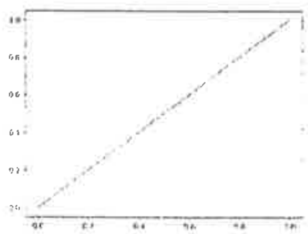
D'où l'on déduit que :

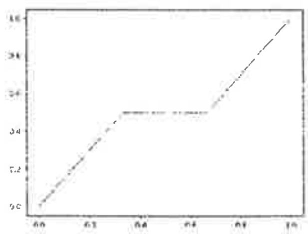
$$\begin{cases} \forall x \in \left[0, \frac{1}{3}\right], & f_1(x) = \frac{3}{2}x \\ \forall x \in \left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[, & f_1(x) = \frac{1}{2} \\ \forall x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right], & f_1(x) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \end{cases}$$

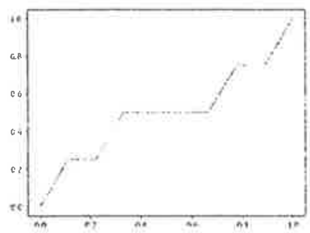
puis que

$$\begin{cases} \forall x \in \left[0, \frac{1}{9}\right], & f_2(x) = \frac{9}{4}x \\ \forall x \in \left]\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right[, & f_2(x) = \frac{1}{4} \\ \forall x \in \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right], & f_2(x) = \frac{9}{4}x - \frac{1}{4} \\ \forall x \in \left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[, & f_2(x) = \frac{1}{2} \\ \forall x \in \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right], & f_2(x) = \frac{9}{4}x - 1 \\ \forall x \in \left]\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right[, & f_2(x) = \frac{3}{4} \\ \forall x \in \left[\frac{8}{9}, 1\right[, & f_2(x) = \frac{9}{4}x - \frac{5}{4} \end{cases}$$

On en déduit les graphiques respectifs de f_0, f_1 et f_2 :







On montre, par récurrence, que pour tout entier naturel n, f_n est à valeurs dans $[0, 1]$.

20. Le programme se déduit directement de la définition :

```
def cantor(n,x):
    if n == 0:
        return x
    if x <= 1 / 3:
        return cantor( n - 1, 3 * x) / 2
    if x >= 2 / 3:
        return cantor( n - 1, 3 * x - 2) / 2 + 1 /2
    return 1 / 2
```

21. A tout entier naturel n, on associe le prédicat

$$\mathscr{P}(n) : \forall x \in [0,1], |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{1}{3\times 2^{n+1}}$$

— Tout d'abord :

- Si $x \in \left[0 ; \frac{1}{3}\right]$, alors
$$|f_1(x) - f_0(x)| = \frac{x}{2} \leqslant \frac{1}{6}$$
- Si $x \in \left]\frac{1}{3} ; \frac{2}{3}\right[$, alors $|f_1(x) - f_0(x)| = \left|x - \frac{1}{2}\right|$. Si $x \geqslant \frac{1}{2}$, on a donc
$$|f_1(x) - f_0(x)| = x - \frac{1}{2} \leqslant \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$
D'autre part, si $x < \frac{1}{2}$, on a
$$|f_1(x) - f_0(x)| = \frac{1}{2} - x \leqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$
- Si $x \in \left[\frac{2}{3} ; 1\right]$, alors
$$|f_1(x) - f_0(x)| = \left|\frac{1}{2} + \frac{3x-2}{2} - x\right| = \frac{1}{2}|x-1| = \frac{1}{2}(1-x) \leqslant \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{6}$$

donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie. Montrons $\mathscr{P}(n+1)$

- Si $x \in \left[0 ; \frac{1}{3}\right]$, alors
$$|f_{n+2}(x) - f_{n+1}(x)| = \frac{1}{2}|f_{n+1}(3x) - f_n(3x)| \leqslant \frac{1}{2}\frac{1}{3\times 2^{n+1}} = \frac{1}{3\times 2^{n+2}}$$
- Si $x \in \left]\frac{1}{3} ; \frac{2}{3}\right[$, alors
$$|f_{n+2}(x) - f_{n+1}(x)| = 0$$
- Si $x \in \left[\frac{2}{3} ; 1\right]$, alors
$$|f_{n+2}(x) - f_{n+1}(x)| = \frac{1}{2}|f_{n+1}(3x-2) - f_n(3x-2)| \leqslant \frac{1}{2}\frac{1}{3\times 2^{n+1}} = \frac{1}{3\times 2^{n+2}}$$

donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

— Conclusion d'après le principe de récurrence, on a bien : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathscr{P}(n)$.

22. La série de terme général $\frac{1}{3\times 2^n}$ converge en tant que série géométrique de raison dans $]0;1[$. D'après la question précédente, la série de fonctions $\sum(f_{n+1} - f_n)$ converge donc normalement sur $[0,1]$, donc uniformément sur $[0,1]$. Par lien suite-série, la suite de fonctions $(f_n - f_0)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc uniformément sur $[0,1]$, et il en va donc de même pour $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

23. Montrons que la propriété $\mathscr{P}(n)$: f_n est continue et croissante sur $[0,1]$, $f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = 1$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

— $\mathscr{P}(0)$ est vraie car $f_0 = \mathrm{Id}$ qui est bien continue, croissante sur $[0,1]$, et vaut bien 0 en 0 et 1 en 1.

— Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $\mathscr{P}(n)$. Alors f_{n+1} est continue sur $\left[0;\frac{1}{3}\right[$, $\left]\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right[$ et $\left]\frac{2}{3};1\right]$ comme somme, quotient et composition de fonctions continues. Par ailleurs,

$$f_{n+1}\left(\frac{1}{3}\right) = \lim_{x\to\frac{1}{3}^-} f_{n+1}(x) = \lim_{x\to\frac{1}{3}^-} \frac{f_n(3x)}{2} = \frac{f_n(1)}{2} = \frac{1}{2} = \lim_{x\to\frac{1}{3}^+} f_{n+1}(x)$$

donc f_{n+1} est continue en $\frac{1}{3}$. On montre de la même manière que f_{n+1} est continue en $\frac{2}{3}$. Donc f_{n+1} est continue sur $[0,1]$.

Comme composée de fonctions croissantes, f_{n+1} est également croissante sur chacun des intervalles $\left[0;\frac{1}{3}\right]$ et $\left[\frac{2}{3};1\right]$, et elle est constante donc croissante sur $\left[\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right]$. Comme cette croissance a lieu sur chaque intervalle fermé, on peut « recoller » cette croissance sur tout $[0,1]$ (par exemple si $x \in \left[0;\frac{1}{3}\right]$ et $y \in \left[\frac{2}{3};1\right]$, on a $f_{n+1}(x) \leqslant f_{n+1}\left(\frac{1}{3}\right) \leqslant f_{n+1}\left(\frac{2}{3}\right) \leqslant f_{n+1}(y)$).

Enfin, $f_{n+1}(0) = \frac{f_n(3\times 0)}{2} = 0$ et $f_{n+1}(1) = \frac{1}{2} + \frac{f_n(3\times 1-2)}{2} = 1$.

— Conclusion : par principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant 1$$

En passant à la limite en n, on trouve que pour tout $x \in [0,1]$:

$$0 \leqslant f(x) \leqslant 1$$

La fonction f est donc bien à valeurs dans $[0,1]$. Par ailleurs, si $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n(x) \leqslant f_n(y)$$

et là encore, en passant à la limite en n, on obtient

$$f(x) \leqslant f(y)$$

La fonction f est donc croissante, et en passant à la limite dans les égalités $f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = 1$, on obtient $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Puisque f est la limite uniforme d'une suite de fonctions continues sur $[0,1]$, elle est elle-même continue sur $[0,1]$. Enfin, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $f([0;1])$ est un intervalle contenant $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, donc il contient $[0;1]$, et f est donc surjective.

ENSAI MP 1999 DEUXIEME EPREUVE (modifié)

Eléments de correction

PARTIE I

1. On note $\Omega = \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha+\beta > -1\}$.

   (a) La fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array}$ est (une forme linéaire) continue sur $\mathbb{R}^2$. Ainsi, image réciproque par cette fonction continue de l'ouvert $]-1,+\infty[$ de $\mathbb{R}$, Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

   (b) Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$; on considère la fonction $f_{\alpha,\beta}$: $\begin{array}{ccc}]0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & (-\ln t)^{\alpha}(1-t)^{\beta} \end{array}$. La fonction $f_{\alpha,\beta}$ est continue positive sur $]0,1[$.
   En outre :
   - $\sqrt{t}f_{\alpha,\beta}(t) \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ ce qui assure l'intégrabilité de $f_{\alpha,\beta}$ en 0
   - $f_{\alpha,\beta}(t) \underset{1^-}{\sim} (1-t)^{\alpha+\beta}$ et, selon les exemples de Riemann, $f_{\alpha,\beta}$ est intégrable en 1 si, et seulement si, $\alpha+\beta > -1$.

   En conclusion une condition nécessaire et suffisante pour que $f_{\alpha,\beta}$ soit intégrable sur $]0,1[$ est $\alpha+\beta > -1$.

2. Suivons l'indication de l'énoncé et notons I_g et I_d les fonctions définies par
$$\forall(\alpha,\beta)\in\Omega,\ I_g(\alpha,\beta) = \int_0^{\frac{1}{e}} (-\ln t)^{\alpha}(1-t)^{\beta}\,dt \quad \text{et} \quad I_d(\alpha,\beta) = \int_{\frac{1}{e}}^1 (-\ln t)^{\alpha}(1-t)^{\beta}\,dt$$
Montrons la continuité de la fonction I_g à l'aide du théorème de continuité d'une intégrale à paramètre.
Définissons la fonction H_g sur $\Omega\times\left]0,\frac{1}{e}\right]$ par $\forall((\alpha,\beta),t)\in\Omega\times\left]0,\frac{1}{e}\right]$, $H_g(\alpha,\beta,t) = (-\ln t)^{\alpha}(1-t)^{\beta}$.
On a :
   - pour tout couple (α,β) appartenant à Ω la fonction $\begin{array}{ccc} \left]0,\frac{1}{e}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & H_g(\alpha,\beta,t) \end{array}$ est continue,

   donc continue par morceaux, sur $\left]0,\frac{1}{e}\right]$
   - pour tout t appartenant à $\left]0,\frac{1}{e}\right]$ la fonction $\begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\alpha,\beta) & \longmapsto & H_g(\alpha,\beta,t) \end{array}$ est continue
   - (domination locale) soit K un compact inclus dans Ω : comme K est borné, il existe un réel A tel que $\forall(\alpha,\beta)\in K,\ \alpha \leqslant A$. On fixe un tel A. On a alors
$$\forall(\alpha,\beta)\in K,\ \forall t\in\left]0,\frac{1}{e}\right],\ |H_g(\alpha,\beta,t)| \leqslant (-\ln t)^A$$
   et (voir la question 1.) cette majoration fournit la condition de domination voulue

   Par conséquent, selon le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre, la fonction I_g est continue sur Ω.
   Définissons la fonction H_d sur $\Omega\times\left[\frac{1}{e},1\right[$ par $\forall((\alpha,\beta),t)\in\Omega\times\left[\frac{1}{e},1\right[$, $H_d(\alpha,\beta,t) = (-\ln t)^{\alpha}(1-t)^{\beta}$.

On a :

• pour tout couple (α,β) appartenant à Ω la fonction $\begin{array}{ccc} \left[\frac{1}{e},1\right[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & H_d(\alpha,\beta,t) \end{array}$ est continue, donc continue par morceaux, sur $\left[\frac{1}{e},1\right[$

• pour tout t appartenant à $\left[\frac{1}{e},1\right[$ la fonction $\begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (\alpha,\beta) & \longmapsto & H_d(\alpha,\beta,t) \end{array}$ est continue

• (domination locale) soit K un compact inclus dans Ω : d'une part, K étant borné, il existe deux réels B, C que l'on fixe, tels que $\forall(\alpha,\beta) \in K,\ B \leqslant \alpha \leqslant C$, d'autre part la fonction $\begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (\alpha,\beta) & \longmapsto & \alpha+\beta+1 \end{array}$ étant continue à valeurs strictement positives sur le compact elle y admet notamment un minimum strictement positif, ce qui assure l'existence d'un réel strictement positif η tel que $K \subset \left\{(\alpha,\beta) \in \mathbf{R}^2 \mid \alpha+\beta \geqslant -1+\eta\right\}$. On fixe un tel η.

En outre la fonction $\begin{array}{ccc} \left[\frac{1}{e},1\right[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & -\dfrac{\ln t}{1-t} \end{array}$ est continue sur $\left[\frac{1}{e},1\right[$ ne s'annule pas et admet un prolongement par continuité en 1 (par la valeur 1) donc sur le segment $\left[\frac{1}{e},1\right]$: il existe donc deux réels strictement positifs m et M, que l'on fixe, tels que $\forall t \in \left[\frac{1}{e},1\right[,\ m \leqslant -\dfrac{\ln t}{1-t} \leqslant M$.

Finalement ceci permet d'écrire

$$\forall(\alpha,\beta) \in K,\ \forall t \in \left[\frac{1}{e},1\right[,\ |H_d(\alpha,\beta,t)| = \left(-\frac{\ln t}{1-t}\right)^{\alpha}(1-t)^{\alpha+\beta}$$

puis

$$\forall(\alpha,\beta) \in K,\ \forall t \in \left[\frac{1}{e},1\right[,\ |H_d(\alpha,\beta,t)| \leqslant \max\left(m^B, m^C, M^B, M^C\right)(1-t)^{-1+\eta}$$

ce qui fournit la condition de domination voulue

Par conséquent, selon le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre, la fonction I_d est continue sur Ω.

En conclusion, somme de deux fonctions continues sur Ω, I est continue sur Ω.

3. (a) Le changement de variable défini par $t = e^{-x}$ (qui est bien défini par une bijection de classe C^1 de $\mathbf{R}_+^*$ sur $]0,1[$) donne

$$\forall(\alpha,\beta) \in \Omega,\ I(\alpha,\beta) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha}e^{-x}(1-e^{-x})^{\beta}\,dx$$

(b) Soit $\alpha \in\ ]-1,+\infty[$. On a

$$I(\alpha,0) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha}e^{-x}\,dx = \Gamma(\alpha+1)$$

Connaissant les propriétés de la fonction Γ on en déduit

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N},\ I(n,0) = n!}$$

(c) Soit $(n,\alpha) \in \mathbf{N} \times\ ]-1,+\infty[$. La formule du binôme, la linéarité de l'intégrale, puis le changement de variable défini par $u=(1+k)x$ donnent successivement

$$\begin{aligned} I(\alpha,n) &= \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k e^{-kx}\,dx = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-(1+k)x}\,dx \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(1+k)^{\alpha+1}}\binom{n}{k}\int_0^{+\infty} u^\alpha e^{-u}\,du \end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{I(\alpha,n)=\Gamma(\alpha+1)\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(1+k)^{\alpha+1}}\binom{n}{k}}$$

(d) Soit $n\in\mathbb{N}$. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{(1+k)^{\alpha+1}}\binom{n}{k}$ apparaît comme une somme (finie) de quantités tendant vers 0 quand α tend vers $+\infty$. On a donc

$$\boxed{I(\alpha,n)\underset{+\infty}{\sim}\Gamma(\alpha+1)}$$

Puis sachant que Γ a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ on en déduit

$$I(\alpha,n)\underset{\alpha\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$$

On peut retrouver cette propriété de la fonction Γ à l'aide de la relation rappelée dans l'énoncé qui fournit notamment $\forall n\in\mathbb{N},\ \Gamma(n+1)=n!$. En effet étant donné un réel α strictement positif la croissance de l'intégrale donne $\Gamma(\alpha+1)\geqslant\Gamma(\lfloor\alpha\rfloor+1)$ ou encore $\Gamma(\alpha+1)\geqslant\lfloor\alpha\rfloor!$ d'où le résultat.

4. Dans cette question on suppose que β n'est pas un entier naturel.

(a) La fonction $\begin{array}{ccc}]-\infty,+1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & (1-u)^\beta \end{array}$ admet au voisinage de 0 un développement en série entière de rayon de convergence égal à 1 et

$$\forall u\in]-1,1[,\ (1-u)^\beta = 1+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\beta(\beta-1)\dots(\beta-n+1)}{n!}u^n$$

Ayant $\forall x>0,\ e^{-x}\in]0,1[$, on en déduit

$$\forall x>0,\ (1-e^{-x})^\beta=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u_n(\beta)e^{-nx}$$

où l'on a posé $\boxed{u_0(\beta)=1 \text{ et } \forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n(\beta)=\dfrac{\beta(\beta-1)\dots(\beta-n+1)}{n!}}$.

On remarque que l'on a : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n(\beta)\neq 0$.

(b) On pose $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ v_n=\ln\left(\dfrac{(n+1)^{\beta+1}\mid u_{n+1}(\beta)\mid}{n^{\beta+1}\mid u_n(\beta)\mid}\right)$. A partir d'un certain rang on a $\dfrac{\mid u_{n+1}(\beta)\mid}{\mid u_n(\beta)\mid}=\dfrac{n-\beta}{n+1}$. On en déduit le développement asymptotique de v_n

$$v_n=(\beta+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1-\frac{\beta}{n}\right)-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{\beta+1}{n}-\frac{\beta}{n}-\frac{1}{n}+O(\frac{1}{n^2})=O(\frac{1}{n^2})$$

Ainsi la série $\sum_{n\geqslant1}v_n$ est absolument convergente, donc convergente.

Posant $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \ln(n^{\beta+1} \mid u_n(\beta) \mid)$, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = a_{n+1} - a_n$. Selon un résultat de cours, la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ assure celle de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Ainsi en notant $\ell = \lim_{n\to\infty} a_n$ et en posant $K = e^\ell$ (on a bien $K > 0$) on aboutit à

$$\boxed{\mid u_n(\beta) \mid \sim \frac{K}{n^{\beta+1}}}$$

(c) Soit $\alpha \in]-1, +\infty[$. Selon le (a) on a

$$I(\alpha,\beta) = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n u_n(\beta) e^{-nx}\, dx = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\, dx$$

où l'on a posé $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_n(x) = (-1)^n u_n(\beta) x^\alpha e^{-(n+1)x}$ en vue d'appliquer le théorème d'intégration terme à terme. On a :

- pour tout entier naturel non nul n, la fonction f_n est continue, donc continue par morceaux, et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car

$$|f_n(x)| \underset{0^+}{\sim} \mid u_n(\beta) \mid x^\alpha \text{ (et } \alpha > -1) \qquad x^2 f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

- la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa somme, à savoir $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^\alpha e^{-x}(1-e^{-x})^\beta \end{array}$, est continue donc continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$
- pour tout entier naturel non nul n, on a

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} |f_n| = \mid u_n(\beta) \mid \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-(1+n)x}\, dx = \mid u_n(\beta) \mid \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(n+1)^{\alpha+1}}$$

D'après (b), on a ainsi $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+^*} |f_n| \sim \frac{\Gamma(\alpha+1)K}{n^{\alpha+\beta+2}}$, avec $\alpha+\beta+2 > 1$. Ainsi, par comparaison de série à termes positifs avec une série de Riemann, la série $\sum \displaystyle\int_{\mathbb{R}_+^*} |f_n|$ converge

En conclusion, selon le théorème d'intégration terme à terme, on obtient notamment $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\, dx$, c'est-à-dire

$$\boxed{I(\alpha,\beta) = \Gamma(\alpha+1) \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{u_n(\beta)}{(n+1)^{\alpha+1}}}$$

5. On a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n(-1) = (-1)^n$ et $u_n(-2) = (-1)^n(n+1)$.
Le calcul donne

$$\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ I(\alpha,-1) = \Gamma(\alpha+1) \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{u_n(-1)}{(n+1)^{\alpha+1}} = \Gamma(\alpha+1)\zeta(\alpha+1)}$$

$$\boxed{\forall \alpha \in]1,+\infty[,\ I(\alpha,-2) = \Gamma(\alpha+1) \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{u_n(-2)}{(n+1)^{\alpha+1}} = \Gamma(\alpha+1)\zeta(\alpha)}$$

PARTIE II

1. Soit $\beta > -1$. Le calcul donne

$$I(0,\beta) = \int_0^1 (1-t)^\beta \, dt = \frac{1}{\beta+1}$$

2. (a) Soit $\beta > -2$. Le changement de variable défini par $u = 1-t$, puis le développement en série entière de $u \longmapsto \ln(1-u)$ (sur $]0,1[$) donnent

$$I(1,\beta) = \int_0^1 -\ln(t)\,(1-t)^\beta \, dt = \int_0^1 -\ln(1-u)u^\beta \, du = \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^{n+\beta}}{n} \, du$$

Utilisons à nouveau le théorème d'intégration terme à terme. Pour tout entier naturel non nul n on définit la fonction h_n sur $]0,1[$ par $\forall u \in]0,1[\,,\ h_n(u) = \dfrac{u^{n+\beta}}{n}$. On a :

• pour tout entier naturel non nul n la fonction h_n est continue, donc continue par morceaux, positive et intégrable sur $]0,1[$ (ayant $n+\beta > -1$ il s'agit d'une fonction de référence intégrable en 0 et la fonction h_n a un prolongement par continuité en 1)

• la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} h_n$ converge simplement sur $]0,1[$ et la somme de cette série de fonctions à savoir $\begin{array}{ccc}]0,1[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ u & \longmapsto & -\ln(1-u)u^\beta \end{array}$ est continue, donc continue par morceaux, sur $]0,1[$

• pour tout entier naturel non nul n, on a $\displaystyle\int_{]0,1[} |h_n| = \frac{1}{n\,(n+\beta+1)}$, terme général d'une série convergente (par comparaison aux exemples de Riemann)

Par conséquent la fonction $\begin{array}{ccc}]0,1[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ u & \longmapsto & -\ln(1-u)u^\beta \end{array}$ est intégrable sur $]0,1[$ (ce que l'on savait déjà) et on peut intégrer terme à terme c'est-à-dire

$$\boxed{I(1,\beta) = \int_0^1 -\ln(1-u)u^\beta \, du = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 \frac{u^{n+\beta}}{n} \, du = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\,(n+\beta+1)}}$$

(b) Selon le (a), on a $I(1,-\frac{1}{2}) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+\frac{1}{2})}$. Etant donné un entier naturel non nul N, à l'aide d'une décomposition en éléments simples, on transforme la somme partielle

$$\sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{n(n+\frac{1}{2})} = 2\sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{n} - \frac{2}{2n+1} = 2\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2n} + 2\sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2n+1} - 4\sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{2n+1} = 4 + 2\sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^n}{n} - 4\sum_{n=N}^{2N} \frac{1}{2n+1}$$

Le développement asymptotique de la somme partielle de la série harmonique

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$$

fournit dans un premier temps

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\,k-1} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{2}\ln n + \ln 2 + \frac{\gamma}{2} + o(1)$$

puis

$$\sum_{n=N}^{2N} \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2}\ln 2N + \ln 2 + \frac{\gamma}{2} - \left(\frac{1}{2}\ln N + \ln 2 + \frac{\gamma}{2}\right) + o\,(1) = \frac{\ln 2}{2} + o\,(1)$$

Utilisant le rappel de l'énoncé, on en déduit

$$\boxed{I(1, -\frac{1}{2}) = 4 - 4\ln 2}$$

(c) La fonction $h : \begin{array}{rcl} [1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{1}{t(t+\beta+1)} \end{array}$ est continue, positive, décroissante et intégrable sur $[1, +\infty[$. Un comparaison série intégrale fournit

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \int_n^{n+1} h(t)\,dt \leqslant \frac{1}{n(n+\beta+1)} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2,\ \frac{1}{n(n+\beta+1)} \leqslant \int_{n-1}^{n} h(t)\,dt$$

On en déduit l'encadrement suivant

$$\int_1^{+\infty} h(t)\,dt \leqslant I(1,\beta) \leqslant \frac{1}{\beta+2} + \int_1^{+\infty} h(t)\,dt$$

Or

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t(t+\beta+1)}\,dt = \frac{1}{\beta+1}\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+\beta+1}\right)dt = \frac{1}{\beta+1}\left[\ln\left(\frac{t}{t+\beta+1}\right)\right]_1^{+\infty} = \frac{\ln(\beta+2)}{\beta+1}$$

Il en résulte

$$\boxed{I(1,\beta) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln\beta}{\beta}}$$

3. (a) La fonction $u \longmapsto -\ln(1-u)$ admet au voisinage de 0 un développement en série entière de rayon de convergence égal à 1 et

$$\forall u \in]-1, +1[,\ -\ln(1-u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}u^n$$

Il en résulte, selon le résultat de cours sur le produit de Cauchy de deux séries entières, que la fonction $u \longmapsto (\ln(1-u))^2$ admet un développement en série entière en 0 de rayon de convergence supérieur ou égal à 1 et

$$\boxed{\forall u \in]-1, +1[,\ (\ln(1-u))^2 = \sum_{n=2}^{+\infty} c_n u^n \qquad \text{avec} \qquad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}\,,\ c_n = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(n-k)}}$$

(b) Soit $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta > -3$. Un calcul analogue à celui de 2.(a) conduit à

$$I(2,\beta) = \int_0^1 (\ln t)^2(1-t)^\beta\,dt = \int_0^1 (\ln(1-u))^2 u^\beta\,du = \int_0^1 \sum_{n=2}^{+\infty} c_n u^{n+\beta}\,du$$

Il s'agit à nouveau d'utiliser le théorème d'intégration terme à terme.

On commence par remarquer que la relation $\dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{n-k} = n\dfrac{1}{k(n-k)}$ donne

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}\,,\ c_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}\right) = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} \tag{1}$$

et ainsi $c_n \sim \dfrac{2\ln n}{n}$.
A tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 on associe la fonction k_n définie sur $]0,1[$ par $\forall u \in]0,1[\,,\ k_n(u) = c_n u^{n+\beta}$. On a :
• pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, la fonction k_n est continue, donc continue par morceaux, positive et intégrable sur $]0,1[$ (ayant $n+\beta > -1$ il s'agit d'une fonction de référence intégrable en 0 et la fonction k_n a un prolongement par continuité en 1)
• la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 2} k_n$ converge simplement sur $]0,1[$ et la somme de cette série de fonctions à savoir $\begin{array}{ccc}]0,1[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ u & \longmapsto & (\ln(1-u))^2 u^\beta \end{array}$ est continue, donc continue par morceaux, sur $]0,1[$
• pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 on a $\displaystyle\int_{]0,1[} |k_n| = \frac{c_n}{n+\beta+1}$ terme général d'une série convergente (comparaison à une série de Bertrand : selon la remarque préliminaire $\dfrac{c_n}{n+\beta+1} \sim \dfrac{2\ln n}{n^2}$ terme général de série positive convergente car $n^{3/2}\dfrac{2\ln n}{n^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\dfrac{3}{2} > 1$)
Par conséquent la fonction $\begin{array}{ccc}]0,1[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ u & \longmapsto & (\ln(1-u))^2 u^\beta \end{array}$ est intégrable sur $]0,1[$ (ce que l'on savait déjà) et on peut intégrer terme à terme c'est-à-dire

$$I(2,\beta) = \int_0^1 \sum_{n=2}^{+\infty} c_n u^{n+\beta}\, du = \sum_{n=2}^{+\infty} \int_0^1 c_n u^{n+\beta}\, du = \sum_{n=2}^{+\infty} \int_0^1 \frac{c_n}{n+\beta+1}$$

ce qui, compte tenu de la relation (1), et après un décalage d'indices, donne

$$\boxed{I(2,\beta) = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{(n+1)(n+\beta+2)}}$$

4. (a) Soit $g : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue telle que $g(1) \neq 0$. Etant donné un entier naturel non nul n le changement de variable défini par $u = t^n$ donne

$$\int_0^1 t^n g(t)\, dt = \frac{1}{n}\int_0^1 u^{\frac{1}{n}} g(\sqrt[n]{u})\, du$$

Pour tout entier naturel non nul n, notons $G_n : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ u & \longmapsto & u^{\frac{1}{n}} g(\sqrt[n]{u}) \end{array}$. Utilisons le théorème de convergence dominée :
• $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ G_n \in \mathcal{CM}([0,1])$
• la suite de fonctions $(G_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge simplement vers la fonction $g(1)\ \mathbf{1}_{]0,1]}$ et la fonction $g(1)\ \mathbf{1}_{]0,1]}$ est continue par morceaux sur $[0,1]$
• (domination) on a $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ |G_n| \leqslant \|g\|_\infty$.
Par conséquent le théorème de convergence dominée peut être appliqué et ainsi

$$\int_0^1 u^{\frac{1}{n}} g(\sqrt[n]{u})\, du \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \underbrace{\int_{[0,1]} g(1)\ \mathbf{1}_{]0,1]}}_{=\mathrm{g}(1)}$$

et ainsi

$$\boxed{\int_0^1 t^n g(t)\,dt \sim \frac{g(1)}{n}}$$

(b) On considère la fonction f définie par $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \dfrac{1-e^{-x}}{x}$, prolongée par continuité en 0 par $f(0) = 1$. Selon les théorèmes généraux, la fonction $f_{|]0,+\infty[}$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$. Le calcul donne

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \frac{(1+x)e^{-x}-1}{x^2}$$

On vérifie, à l'aide d'un développement limité en 0, que l'on a $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = -\dfrac{1}{2}$.
Par conséquent, selon le théorème de la limite de la dérivée, conséquence du théorème des accroissements finis, la fonction f est classe C^1 sur $[0,+\infty[$.
La stricte convexité de l'exponentielle donne

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ e^x > 1 + x$$

et ainsi $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) < 0$. Il en résulte que f est une bijection strictement décroissante de $[0,+\infty[$ sur $]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), 1]$ (et $]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), 1] =]0,1]$) dont la dérivée ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$, ou encore que f induit un C^1– difféomorphisme de $\mathbb{R}_+$ sur $]0,1]$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant l'écriture de $I(-n,n)$ fournie par la question I 3.(a) et le changement de variable défini par $u = f(x)$ (notation du (b)), on a

$$I(-n,n) = \int_0^{+\infty} e^{-x}(f(x))^n\,dx = \int_0^1 -e^{-f^{-1}(u)}(f^{-1})'(u)u^n\,du$$

La fonction $g :\ \begin{array}{ccc}]0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & -e^{-f^{-1}(u)}(f^{-1})'(u) \end{array}$ est continue sur $]0,1]$.

De plus ayant $\forall u \in]0,1],\ (f^{-1})'(u) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(u))}$ on obtient successivement

$$f^{-1}(u) \underset{u\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty \qquad \frac{1}{f'(f^{-1}(u))} \underset{0^+}{\sim} f^{-1}(u)e^{-f^{-1}(u)}$$

Ainsi g se prolonge par continuité en 0 par $g(0) = 0$: notons encore g ce prolongement par continuité. Comme $g(1) = -e^0\dfrac{1}{f'(0)} = 2$, il résulte de (a) :

$$\boxed{I(-n,n) \sim \frac{2}{n}}$$

PARTIE III

1. (a) Soit $(\beta_1,\beta_2) \in]-\alpha-1,+\infty[^2,\ \beta_1 < \beta_2$: alors $\forall t \in]0,1[, (1-t)^{\beta_1} > (1-t)^{\beta_2}$. Il en résulte $I(\alpha,\beta_1) > I(\alpha,\beta_2)$.
Ainsi la fonction $I(\alpha,\cdot)$ est décroissante sur $]-\alpha-1,+\infty[$.

(b) Utilisons l'extension du théorème de convergence dominée. Considérons la famille $(w_\beta)_{\beta\in]-\alpha,+\infty[}$ de fonctions définies sur $]0,1[$ par

$$\forall\beta\in]-\alpha,+\infty[,\ \forall t\in]0,1[,\ w_\beta(t)=(-\ln t)^\alpha(1-t)^\beta$$

On a :

• pour tout β appartenant à $]-\alpha,+\infty[$, la fonction w_β est continue, donc continue par morceaux, sur $]0,1[$

• $\forall t\in]0,1[,\ w_\beta(t)\underset{\beta\to+\infty}{\longrightarrow}0$ et la fonction nulle est continue par morceaux sur $]0,1[$

• (domination) $\forall\beta\in]-\alpha,+\infty[,\ \forall t\in]0,1[,\ |w_\beta(t)|\leqslant(-\ln t)^\alpha(1-t)^{-\alpha}$, ce qui fournit la condition de domination car la fonction $\begin{array}{ccc}]0,1[& \longrightarrow & \mathbf{R}\\ t & \longmapsto & (-\ln t)^\alpha(1-t)^{-\alpha}\end{array}$ est intégrable sur $]0,1[$ (voir question I 1.)

• $+\infty$ est adhérent à $]-\alpha,+\infty[$

Par conséquent, selon l'extension du théorème de convergence dominée, on a $I(\alpha,\beta)\underset{\beta\to+\infty}{\longrightarrow}0$,

ou encore $\boxed{\lim_{\beta\to+\infty}\int_0^1(-\ln t)^\alpha(1-t)^\beta\,dt=0}$.

2. (a) Il suffit d'adapter à l'intervalle $\left[\frac{1}{2},1\right[$ le raisonnement qui a été fait dans la question I 2. pour obtenir la seconde condition de domination. Remarquant la décroissance de la fonction sur $\left[\frac{1}{2},1\right[$ on peut préciser

$$\forall t\in\left[\frac{1}{2},1\right[,\ 1<-\frac{\ln t}{1-t}\leq 2\ln 2$$

(b) Dans cette question, on suppose que α est strictement négatif.

On a $\int_0^{\frac{1}{2}}(-\ln t)^\alpha(1-t)^n\,dt\leq(\ln 2)^\alpha\int_0^{\frac{1}{2}}(1-t)^n\,dt\ \left(=O(\frac{1}{n})\right)$ et, d'après le (a),

$\int_{\frac{1}{2}}^1(-\ln t)^\alpha(1-t)^n\,dt\leq(2\ln 2)^\alpha\int_{\frac{1}{2}}^1(1-t)^{n+\alpha}\,dt\ \left(=o(\frac{1}{n})\right)$.

Il en résulte $\boxed{I(\alpha,n)=O\left(\frac{1}{n}\right)}$.

3. (a) Soit $\lambda\in]0,1[$. Soit $n\in\mathbf{N}^*$. La convexité de la fonction exponentielle donne $\forall u\in[0,1],\ 0\leq 1-u\leq e^{-u}$.

Le changement de variable défini par $t=nu^{\frac{1}{\lambda}}$ dans l'intégrale considérée fournit

$$\int_0^1(1-u^{\frac{1}{\lambda}})^n\,du\leq\int_0^1 e^{-nu^{\frac{1}{\lambda}}}\,du\leq\frac{\lambda}{n^\lambda}\int_0^n t^{\lambda-1}e^{-t}\,dt$$

et ainsi

$$\boxed{\forall n\in\mathbf{N}^*,\ \int_0^1(1-u^{\frac{1}{\lambda}})^n\,du\leq\frac{\lambda\Gamma(\lambda)}{n^\lambda}}$$

(b) Dans cette question on suppose $\alpha > 0$. Soit $\theta \in]0,1[$. La fonction $\begin{array}{ccc}]0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & (-\ln t)^\alpha t^\theta \end{array}$ est continue sur $]0,1[$ et admet des prolongements par continuité en 0 et 1 (par la valeur 0). Ainsi elle est bornée sur $]0,1[$: fixons un réel M strictement positif tel que $\forall t \in]0,1[,\ \left|(-\ln t)^\alpha t^\theta\right| \leqslant M$.

En utilisant cette majoration, puis le changement de variable défini par $t = u^{\frac{1}{1-\theta}}$, on obtient

$$I(\alpha, n) \leq M \int_0^1 t^{-\theta}(1-t)^n\, dt \leq \frac{M}{1-\theta} \int_0^1 (1 - u^{\frac{1}{1-\theta}})^n\, du$$

Par conséquent, selon le (a), en posant $C = M\Gamma(1-\theta)$ (on a bien $C > 0$), on trouve

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I(\alpha, n) \leq \frac{C}{n^{1-\theta}}}$$

MP 21-22

ECRIN MP 1997 PREMIERE EPREUVE

Eléments de correction

Partie I

1. Montrons que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $C^0(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$.

   - La fonction nulle est un élément de $\mathcal{E}$.
   - Soit $(f,g) \in \mathcal{E}^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$; on a :
   $$\forall t \geq 0\,,\ \frac{|\lambda f(t) + \mu g(t)|}{1+t^2} \leq |\lambda| \frac{|f(t)|}{1+t^2} + |\mu| \frac{|g(t)|}{1+t^2}$$
   La fonction majorante étant intégrable sur $\mathbf{R}_+$, on conclut par comparaison $(\lambda f + \mu g) \in \mathcal{E}$.
   Ainsi $\mathcal{E}$ est espace vectoriel réel en tant que sous-espace vectoriel de $C^0(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$.
   On a $\mathcal{B} \subset \mathcal{E}$. En effet tout élément de $\mathcal{B}$ est continu sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbf{R}$ et si f est un élément de $\mathcal{B}$ en notant $\|f\|_\infty = \sup\limits_{t \geq 0} |f(t)|$ on a :
   $$\forall t \geq 0\,,\ \left|\frac{f(t)}{1+t^2}\right| \leq \frac{\|f\|_\infty}{1+t^2}$$
   La fonction majorante étant intégrable sur $\mathbf{R}_+$ (quasiment une fonction de référence car on peut en expliciter une primitive), on conclut par comparaison que f est un élément de $\mathcal{E}$.

2. La fonction γ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs réelles. Au voisinage de $+\infty$ on a $\left|\frac{\gamma(t)}{1+t^2}\right| \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$; ceci assure l'intégrabilité de la fonction $t \longmapsto \frac{\gamma(t)}{1+t^2}$ sur $\mathbf{R}_+$.
   Cependant $\gamma \notin \mathcal{B}$ car par exemple $\forall n \in \mathbb{N}$, $\gamma\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ et ainsi :
   $$\gamma\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

3. Soit $x \in J$. La fonction $\begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{f(t)}{1+t^2+x} \end{array}$ est continue sur $\mathbf{R}_+$ et on a :
   $$\left|\frac{f(t)}{1+t^2+x}\right| \underset{+\infty}{\sim} \left|\frac{f(t)}{1+t^2}\right|$$
   D'où la conclusion voulue car $f \in \mathcal{E}$.

4. Il s'agit d'une conséquence immédiate de la linéarité de l'intégrale sur l'espace des fonctions continues et intégrables sur $\mathbf{R}_+$.

Partie II

1. Il s'agit d'appliquer le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre ainsi que la formule de Leibniz.

Considérons la fonction $g: \begin{array}{ccc} J\times \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,t) & \longmapsto & \dfrac{f(t)}{1+t^2+x} \end{array}$. La fonction g est dérivable par rapport à la première variable et

$$\forall (x,t)\in J\times \mathbf{R}_+,\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -\frac{f(t)}{(1+t^2+x)^2}$$

• pour tout élément x de J la fonction $\begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & g(x,t) \end{array}$ est intégrable sur $\mathbf{R}_+$ (question I 3.) et la fonction $\begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) \end{array}$ est continue par morceaux sur $\mathbf{R}_+$

• pour tout élément t de $\mathbf{R}_+$ la fonction $\begin{array}{ccc} J & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & g(x,t) \end{array}$ est de classe C^1 sur J

• (domination locale) Soit K un segment (d'intérieur non vide) inclus dans J. Il existe deux éléments a et b de J, $a<b$, tels que $K=[a,b]$: on fixe a et b. On a alors

$$\forall (x,t)\in K\times \mathbf{R}_+,\ \left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \frac{|f(t)|}{(1+t^2+a)^2}$$

Or $\dfrac{|f(t)|}{(1+t^2+a)^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\left|\dfrac{f(t)}{1+t^2}\right|\right)$ ce qui suffit pour assurer l'intégrabilité sur $\mathbf{R}_+$ de la fonction $\begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{|f(t)|}{(1+t^2+a)^2} \end{array}$. L'hypothèse de domination locale est donc satisfaite.

Selon le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre on peut affirmer que la fonction $T[f]$ est de classe C^1 sur J et la formule de Leibniz s'écrit alors

$$\boxed{\forall x\in J,\ T[f]'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\,dt = -\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{(1+t^2+x)^2}dt}$$

2. (a) Montrons la propriété demandée par récurrence. A tout entier naturel p on associe le prédicat $\mathcal{P}(p)$: la fonction $T[f]$ est de classe C^p sur J et $\forall x\in J,\ T[f]^{(p)}(x) = (-1)^p p! \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{(1+t^2+x)^{p+1}}\,dt.$

Selon ce qui précède les assertions $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.
Soit donc p un entier naturel non nul tel que $\mathcal{P}(p)$ soit vraie. Montrons $\mathcal{P}(p+1)$.
Considérons la fonction $g_p: \begin{array}{ccc} J\times \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,t) & \longmapsto & (-1)^p p!\dfrac{f(t)}{(1+t^2+x)^{p+1}} \end{array}$. La fonction g_p est dérivable par rapport à la première variable et

$$\forall (x,t)\in J\times \mathbf{R}_+,\ \frac{\partial g_p}{\partial x}(x,t) = (-1)^{p+1}(p+1)!\frac{f(t)}{(1+t^2+x)^{p+2}}$$

• Soit $x\in J$. La fonction $\begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & g_p(x,t) \end{array}$ est intégrable sur $\mathbf{R}_+$. En effet

$$|g_p(x,t)| \underset{+\infty}{=} o\left(\left|\frac{f(t)}{1+t^2}\right|\right)$$

De plus la fonction $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{\partial g_p}{\partial x}(x,t) \end{array}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$

• pour tout élément t de $\mathbb{R}_+$ la fonction $\begin{array}{rcl} J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g_p(x,t) \end{array}$ est de classe C^1 sur J

• (domination locale) Soit K un segment (d'intérieur non vide) inclus dans J. Il existe deux éléments a et b de J, $a < b$, tels que $K = [a, b]$: on fixe a et b. On a alors

$$\forall (x,t) \in K \times \mathbb{R}_+,\ \left|\frac{\partial g_p}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \frac{(p+1)!\,|f(t)|}{(1+t^2+a)^{p+2}}$$

Or $\dfrac{(p+1)!\,|f(t)|}{(1+t^2+a)^{p+2}} = o\left(\left|\dfrac{f(t)}{1+t^2}\right|\right)$ ce qui suffit pour assurer l'intégrabilité sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{(p+1)!\,|f(t)|}{(1+t^2+a)^{p+2}} \end{array}$. L'hypothèse de domination locale est donc satisfaite.

Selon le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre on peut affirmer que la fonction $T[f]^{(p)}$ est de classe C^1 sur J et la formule de Leibniz s'écrit alors

$$\boxed{\forall x \in J,\ T[f]^{(p+1)}(x) = (-1)^p p! \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{(1+t^2+x)^{p+1}} dt}$$

(b) Notamment en remplaçant x par 0, on obtient :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}\ ,\ (T[f])^{(p)}(0) = (-1)^p p! I_p}$$

3. (a) Soit $p \in \mathbb{N}$. Ayant $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \dfrac{|f(t)|}{(1+t^2)^{p+1}} \leqslant \dfrac{|f(t)|}{(1+t^2)}$ la croissance de l'intégrale (les fonctions considérées sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$) fournit

$$\int_0^{+\infty} \frac{|f(t)|}{(1+t^2)^{p+1}} dt \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{|f(t)|}{(1+t^2)} dt$$

(b) Soit $x \in]-1, +1[$. Pour tout réel t positif ou nul, on a $\dfrac{f(t)}{1+t^2+x} = \dfrac{f(t)}{1+t^2} \dfrac{1}{1+\dfrac{x}{1+t^2}}$.

Comme $\left|\dfrac{x}{1+t^2}\right| < 1$, on peut écrire, toujours pour tout réel t positif ou nul :

$$\frac{f(t)}{1+t^2+x} = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{f(t)}{(1+t^2)^{p+1}} x^p$$

Posons $\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $u_p(t) = (-1)^p \dfrac{f(t)}{(1+t^2)^{p+1}} x^p$. On va appliquer à la série de fonctions $\sum\limits_{p \geq 0} u_p$ le théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque (on pourrait aussi utiliser le théorème de convergence dominée) :

• Pour tout entier naturel p la fonction u_p est continue et intégrable sur $[0, +\infty[$ car :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ |u_p(t)| = \frac{|f(t)|}{(1+t^2)^{p+1}} |x|^p \leq \frac{|f(t)|}{1+t^2} |x|^p$$

On conclut par comparaison car $f \in \mathcal{E}$.

• La série de fonctions $\sum_{p\geq 0} u_p$ converge simplement sur $[0,+\infty[$ et sa somme est continue sur $[0,+\infty[$ car c'est la fonction $\begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{f(t)}{1+t^2+x} \end{array}$.

• La majoration précédente donne :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \int_{\mathbf{R}_+} |u_p| \leq \left(\int_0^{+\infty} \frac{|f(t)|}{1+t^2}\,dt\right) |x|^p$$

Comme $|x|<1$ la série $\sum_{p\geq 0}\left(\int_{\mathbf{R}_+} |u_p|\right)$ converge (le majorant est le terme général d'une série géométrique de raison $|x|$ et $|x| \in [0,1[$).

Le théorème d'intégration terme à terme s'applique donc et l'on peut écrire :

$$\forall x \in]-1,1[\ ,\ T[f](x) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \left(\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{(1+t^2)^{p+1}}\,dt\right) x^p$$

c'est-à-dire : $\boxed{\forall x \in]-1,1[\ ,\ T[f](x) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p I_p x^p}$

Remarque : On retrouve (propriété des séries entières) : $\forall p \in \mathbb{N}\ ,\ T[f]^{(p)}(0) = (-1)^p p! I_p$.

(c) L'application $\overline{T} : \mathcal{E} \to C^\infty(J,\mathbf{R})$ n'est pas surjective car il existe des fonctions de classe C^∞ sur J qui ne sont pas développables en série entière sur $]-1,1[$. Prenons par exemple la fonction F définie par $F(x) = \dfrac{1}{1+4x^2}$.

F est de classe C^∞ sur J, développable en série entière sur $]-1/2,1/2[$ avec :

$$\forall x \in]-1/2,1/2[\ ,\ F(x) = \sum_{p=o}^{+\infty} (-1)^p (2x)^p$$

Mais F n'est pas développable en série entière sur $]-1,1[$ car sinon, par unicité du développement en série entière, ce développement serait égal au précédent ; or cette série géométrique ne converge que pour $|x|<1/2$.

Partie III

1. Soit $f \in \mathcal{E}$.

(a) On peut écrire :

$$\forall t \in \mathbf{R}_+,\ |\Phi(t)| \leq \int_0^t \frac{|f(u)|}{1+u^2}\,du \leq \int_0^{+\infty} \frac{|f(u)|}{1+u^2}\,du$$

Ainsi $\boxed{\Phi \text{ est bornée sur } \mathbf{R}_+}$

(b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La fonction f étant continue sur $\mathbf{R}_+$, la fonction Φ est de classe C^1 (primitive d'une fonction continue sur $\mathbf{R}_+$) et notamment continue sur $\mathbf{R}_+$. Posons $\|\Phi\|_\infty = \sup_{t\geq 0} |\Phi(t)|$.

On a :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \left| \frac{t\Phi(t)}{(1+t^2)^{k+1}} \right| \leq \|\Phi\|_\infty \frac{t}{(1+t^2)^{k+1}}$$

Comme $\dfrac{t}{(1+t^2)^{k+1}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{2k+1}}$ on conclut par comparaison puisque $2k+1 \geq 3 > 1$.

Φ étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ on peut donc, pour $X > 0$, intégrer par parties :

$$\int_0^X \frac{t\Phi(t)}{(1+t^2)^{k+1}} = \left[-\frac{1}{2k} \frac{\Phi(t)}{(1+t^2)^k} \right]_0^X + \frac{1}{2k} \int_0^X \frac{f(u)}{(1+u^2)^{k+1}} du$$

Comme Φ est bornée sur $\mathbb{R}_+$, on a $\displaystyle\lim_{X \to +\infty} \left(\frac{\Phi(X)}{(1+X^2)^k} \right) = 0$. En faisant tendre X vers l'infini, on obtient donc :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{t\Phi(t)}{(1+t^2)^{k+1}} dt = \frac{1}{2k} \int_0^{+\infty} \frac{f(u)}{(1+u^2)^{k+1}} du = \frac{I_k}{2k}}$$

2. Comme $T[f] = 0$ on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ (T[f])^{(k)}(0) = 0 = (-1)^k k! I_k$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \ I_k = 0}$$

3. (a) Φ étant continue sur $\mathbb{R}_+$, la fonction φ est continue sur $]0,1]$ comme composée de fonctions continues. De plus, comme $\displaystyle\lim_{u \to 0^+} \sqrt{\frac{1-u}{u}} = +\infty$, on a :

$$\lim_{u \to 0^+} \varphi(u) = \lim_{t \to +\infty} \Phi(t) = I_0 = 0$$

φ est donc continue sur $[0,1]$.

Soit $\varepsilon \in]0,1[$: faisons sur l'intégrale $\displaystyle\int_\varepsilon^1 u^k \varphi(u)\, du$ le changement de variable défini par $u = \dfrac{1}{1+t^2}$ avec $t \in \left[0, \sqrt{\dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}\right]$. Il vient :

$$\int_\varepsilon^1 u^k \varphi(u)\, du = \int_0^{\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}} \frac{1}{(1+t^2)^k} \Phi(t) \frac{2t}{(1+t^2)^2} dt$$

En faisant tendre ε vers 0 on obtient :

$$\int_0^1 u^k \varphi(u)\, du = 2 \int_0^{+\infty} \frac{t\Phi(t)}{(1+t^2)^{k+2}} dt = \frac{I_{k+1}}{k+1} = 0$$

On obtient donc :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \ \int_0^1 u^k \varphi(u)\, du = 0}$$

(b) D'après le théorème de Weierstrass il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge uniformément sur $[0,1]$ vers φ. Par linéarité de l'intégrale on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^1 \varphi P_n = 0$$

Par suite :

$$\int_0^1 \varphi^2 = \int_0^1 \varphi(\varphi - P_n) \leq \|\varphi\|_\infty \|\varphi - P_n\|_\infty$$

On en déduit $\displaystyle\int_0^1 \varphi^2 = 0$ puisque $\lim\limits_{n\to\infty} \|\varphi - P_n\|_\infty = 0$. φ^2, étant continue, positive et d'intégrale nulle sur $[0,1]$ est nulle. On conclut $\boxed{\varphi = 0}$.

4. Puisque φ est nulle, Φ est nulle sur $[0,+\infty[$ ($u \mapsto \sqrt{\dfrac{1-u}{u}}$ est une bijection de $]0,1]$ sur $[0,+\infty[$). Par suite Φ' est nulle et :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \frac{f(t)}{1+t^2} = 0$$

f est donc nulle. On en déduit que $\boxed{T \text{ est injective}}$.

Partie IV

1. Pour $X > 0$, on intègre par parties sur $[0,X]$:

$$\int_0^X \frac{a\cos t}{a^2+t^2}dt = \left[\frac{a\sin t}{a^2+t^2}\right]_0^X + 2a\int_0^X \frac{t\sin t}{(a^2+t^2)^2}dt$$

La fonction $t \longmapsto \dfrac{t\sin t}{(a^2+t^2)^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car $\left|\dfrac{t\sin t}{(a^2+t^2)^2}\right| \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t^3}\right)$. En faisant tendre X vers l'infini, on obtient :

$$|h(a)| = 2a\left|\int_0^{+\infty} \frac{t\sin t}{(a^2+t^2)^2}\,dt\right|$$

puis

$$\boxed{|h(a)| \leq 2a\int_0^{+\infty} \frac{t}{(a^2+t^2)^2}\,dt \left(= \frac{1}{a}\right)}$$

2. (a) $n \in \mathbb{N}^*$ étant donné, la fonction $u \mapsto u/n$ est $\mathcal{C}^1$ strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}_+$ sur lui-même et définit ainsi un changement de variable. Par conséquent :

$$\boxed{h(1/n) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(u/n)}{1+u^2}\,du}$$

(b) Appliquons le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $[0,+\infty[$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall u \in \mathbb{R}_+,\ f_n(u) = \frac{\cos(u/n)}{1+u^2}$$

* Pour tout entier naturel non nul n, la fonction f_n est continue (donc continue par morceaux) sur $[0,+\infty[$.
* La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction f continue (donc continue par

morceaux) sur $[0, +\infty[$ définie par $\forall u \in \mathbf{R}_+,\ f(u) = \dfrac{1}{1+u^2}$.

$*$ (Domination) On a :

$$\forall (n,u) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{R}_+ \ ,\ |f_n(u)| \leq \frac{1}{1+u^2}$$

Comme $u \longrightarrow \dfrac{1}{1+u^2}$ est continue et intégrable sur $\mathbf{R}_+$ (voir I-1), on a l'hypothèse de domination et l'on peut conclure :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} h(1/n) = \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi}{2}}$$

3. On a vu dans la partie II que la fonction $\begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ a & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos t}{a^2+t^2} dt \end{array}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}_+^*$ et peut se dériver sous le signe $\displaystyle\int$. h est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}_+^*$ et :

$$\forall a \in \mathbf{R}_+^*,\ h'(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{a^2+t^2} dt - 2a^2 \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{(a^2+t^2)^2} dt.$$

De même :

$$\forall a \in \mathbf{R}_+^*,\ h''(a) = -6a \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{(a^2+t^2)^2} dt + 8a^3 \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{(a^2+t^2)^3} dt.$$

On vérifie par ailleurs que :

$$\frac{\partial^2}{\partial a^2}\left(\frac{a}{a^2+t^2}\right) = \frac{2a^3 - 6at^2}{(a^2+t^2)^3}$$

D'où :

$$\boxed{\forall a \in \mathbf{R}_+^*,\ h''(a) = \int_0^{+\infty} \left[\frac{\partial^2}{\partial a^2}\left(\frac{a}{a^2+t^2}\right)\right] \cos t\, dt}$$

4. On vérifie facilement, pour $(a,t) \neq (0,0)$:

$$\frac{\partial^2}{\partial a^2}\left(\frac{a}{a^2+t^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{a}{a^2+t^2}\right) = 0$$

5. (a) Soit $a \in \mathbf{R}_+^*$. On déduit de ce qui précède :

$$h''(a) = -\int_0^{+\infty} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{a}{a^2+t^2}\right)\right] \cos t\, dt$$

Pour $X > 0$, on intègre par parties sur $[0, X]$:

$$-\int_0^X \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{a}{a^2+t^2}\right)\right] \cos t\, dt = \left[-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{a}{a^2+t^2}\right)\cos t\right]_0^X - \int_0^X \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{a}{a^2+t^2}\right) \sin t\, dt$$

En faisant tendre X vers l'infini on obtient :

$$h''(a) = -\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{a}{a^2+t^2}\right) \sin t dt$$

Une deuxième intégration par parties donne :

$$\boxed{\forall a > 0,\ h''(a) = \int_0^{+\infty} \frac{a}{a^2+t^2} \cos t\, dt = h(a)}$$

(b) La fonction h est donc solution sur $\mathbf{R}_+^*$ de l'équation différentielle $y'' = y$. Par conséquent il existe un couple de réels (λ, μ) tel que :

$$\forall a > 0,\ h(a) = \lambda e^a + \mu e^{-a}$$

D'après IV-1, on a $\lim\limits_{a \to +\infty} h(a) = 0$; d'où $\lambda = 0$. Avec IV-2-b, on obtient $\mu = \dfrac{\pi}{2}$.

On en conclut :

$$\boxed{\forall a > 0,\ h(a) = \frac{\pi}{2}\, e^{-a}}$$

Ayant

$$\forall x > -1,\ g(x) = \frac{h\left(\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+1}}$$

il vient :

$$\boxed{\forall x > -1\ ,\ T[f](x) = \frac{\pi}{2} \frac{\exp\left(-\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+1}}}$$

6. Le calcul fournit :

$$\boxed{g(x) = \frac{\pi}{2e} - \frac{\pi}{2e} x + \frac{7\pi}{16e} x^2 + o\left(x^2\right)}$$

7. (a) La série entière obtenue en II-3-b est la série de Taylor de g. Par unicité du développement en série entière on peut identifier les coefficients et en conclure :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{1+t^2}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{(1+t^2)^2}\, dt = \frac{\pi}{2e} \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{(1+t^2)^3} dt = \frac{7\pi}{6e}}$$

(b) On intègre par parties :

$$\int_0^A \frac{t \sin t}{1+t^2}\, dt = \left[-\cos t \frac{t}{1+t^2}\right]_0^A + \int_0^A \cos t \, \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}\, dt$$

Le crochet tend vers 0 quand A tend vers l'infini et :

$$\lim_{A \to \infty} \int_0^A \cos t \, \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}\, dt = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{(1+t^2)^2}\, dt - \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{1+t^2}\, dt$$

Ce qui précède permet d'aboutir à :

$$\boxed{\lim_{A \to \infty} \int_0^A \frac{t \sin t}{1+t^2}\, dt = \frac{\pi}{2e}}$$

CORRIGÉ

I. Suites et intégrales

1.a. Posons
$$g : (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times]0, +\infty[\longmapsto \frac{1-\cos t}{t^2}\, e^{-xt}.$$
Appliquons d'abord le théorème de continuité sous l'intégrale.

• Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $g(x,-)$ est évidemment continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+^*$.

• Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $g(-,t)$ est évidemment continue sur $\mathbb{R}$.

• On a la domination globale
$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*,\ |g(x,t)| \leqslant g(0,t)$$
puisque $1 - \cos \geqslant 0$ et exp est croissante. Enfin, $g(0,-)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. En effet :

▷ on vient de voir qu'elle est continue par morceaux ;

▷ par le développement limité de cos en 0, on trouve $g(0,t) \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$, donc $g(0,-)$ est intégrable au voisinage de 0^+ ;

▷ l'inégalité $\forall t > 0,\ |g(0,t)| \leqslant \frac{2}{t^2}$ montre que $g(0,-)$ est intégrable au voisinage de $+\infty$.

Donc, par continuité sous l'intégrale, f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

Appliquons maintenant le théorème de dérivation sous l'intégrale.

• Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $g(-,t)$ est évidemment de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et de dérivées successives
$$x \mapsto -\frac{1-\cos t}{t}\, e^{-xt} = \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) \quad \text{et} \quad x \mapsto (1-\cos t)e^{-xt} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t).$$

• Pour tout $k \in [\![0,2]\!]$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t)$ est clairement continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.

• On a déjà vu que $g(x,-)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, et l'on montrera plus bas que $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,-)$ l'est également.

• On a la domination locale suivante : pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$,
$$\forall x \in [a, +\infty[,\ \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \left|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant 2\, e^{-at},$$
et la fonction positive et continue par morceaux $t \mapsto 2e^{-at}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car $t \mapsto -\frac{2}{a}\, e^{-at}$ en est une primitive ayant des limites finies en 0 et $+\infty$.

Démontrons enfin le résultat manquant (voir troisième point plus haut) : pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \begin{cases} 2e^{-xt} & \text{si } t > 1 \\ g(x,t) & \text{sinon,} \end{cases}$$

ce qui, combiné aux intégrabilités démontrées antérieurement, montre que la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par dérivation sous l'intégrale, il vient que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t}\, e^{-tx}\, \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad f''(x) = \int_0^{+\infty} (1-\cos t)\, e^{-tx}\, \mathrm{d}t.$$

1.b. Appliquons le théorème d'interversion limite-intégrale (convergence dominée généralisée à une variable réelle).

- La fonction $g(x,-)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
- On a immédiatement la convergence $g(x,t) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, et la fonction $t \mapsto 0$ est continue par morceaux.
- On a la domination

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*,\ |g(x,t)| \leqslant g(0,t),$$

avec $g(0,-)$ intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après **1.a**.

Il vient donc

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} 0\, \mathrm{d}t = 0.$$

En utilisant cette fois-ci la domination, au voisinage de $+\infty$,

$$\forall x \geqslant 1,\ \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \frac{1-\cos t}{t}\, e^{-t} = \left|\frac{\partial g}{\partial x}(1,t)\right|$$

et la convergence évidente

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

on trouve de même

$$f'(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

1.c. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Avec le même raisonnement qu'en **1.a** (pour f''), on voit que $t \mapsto (1-e^{it})e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Or, cette fonction a pour primitive évidente $t \mapsto -\dfrac{e^{-xt}}{x} + \dfrac{e^{(i-x)t}}{x-i}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $|e^{(i-x)t}| = e^{-xt}$ pour tout $t > 0$ et comme $x > 0$, cette primitive est de limite 0 en $+\infty$.

On en déduit

$$\int_0^{+\infty} (1 - e^{it})\, e^{-xt}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-i},$$

d'où en prenant la partie réelle

$$\forall x > 0, \quad f''(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}.$$

Par intégration, on trouve une constante C telle que

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = C + \ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) = C + \frac{1}{2}\ln\Big(\frac{x^2}{1+x^2}\Big).$$

On en déduit facilement

$$f'(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} C,$$

et donc $C = 0$ grâce à la question précédente. Ainsi,

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1).$$

1.d. La fonction $h : x \mapsto x\ln x - \frac{x}{2}\ln(x^2+1) - \arctan(x)$ est évidemment dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} h'(x) &= \ln x + \frac{x}{x} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \frac{x}{2}\,\frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{1+x^2} \\ &= \ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + 1 - \frac{x^2}{x^2+1} - \frac{1}{1+x^2} \\ &= f'(x). \end{aligned}$$

Ainsi, il existe une constante K telle que

$$\forall x > 0,\ f(x) = K + h(x).$$

Pour x voisin de $+\infty$,

$$x\ln x - \frac{x}{2}\ln(x^2+1) = -\frac{x}{2}\ln\Big(1+\frac{1}{x^2}\Big) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{x}{2}\,\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{2x},$$

et donc

$$x\ln x - \frac{x}{2}\ln(x^2+1) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Comme arctan tend vers $\frac{\pi}{2}$ en $+\infty$, on en déduit que

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} K - \frac{\pi}{2},$$

et donc $K = \frac{\pi}{2}$ compte tenu de **1.b**.

Ainsi, on a établi

$$\forall x > 0, \quad f(x) = x \ln x - \frac{1}{2}\, x\, \ln(x^2+1) - \arctan(x) + \frac{\pi}{2}.$$

Puisque f est continue en 0 d'après **1.a**, on en déduit

$$f(0) = \frac{\pi}{2}.$$

1.e. Soit $s \in \mathbb{R}_+^*$. Le changement de variable affine $t = su$ dans la définition de $f(0)$ donne

$$f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{s}\, \frac{1-\cos(su)}{u^2}\, du,$$

donc

$$s = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(su)}{u^2}\, du.$$

Par parité du cosinus, on en déduit

$$s = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(-su)}{u^2}\, du.$$

Ensuite, pour $s = 0$,

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(su)}{u^2}\, du = 0,$$

car la fonction sous l'intégrale est nulle.

On a donc établi

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad |s| = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(st)}{t^2}\, dt.$$

2.a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction

$$f_n : t \mapsto \frac{1-(\cos t)^n}{t^2}$$

est évidemment continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+^*$. On a

$$\forall t \geqslant 1, \; |f_n(t)| \leqslant \frac{2}{t^2},$$

donc f_n est intégrable sur $[1, +\infty[$. Au voisinage de 0^+,

$$(\cos t)^n = \big(1 + O(t^2)\big)^n = 1 + O(t^2)$$

et donc $f_n(t) = O(1)$. On en déduit que f_n est intégrable sur $]0,1]$.

Ainsi, u_n est bien défini.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a $|\cos t| \leqslant 1$ donc

$$(\cos t)^{2n+2} = |\cos t|^{2n+2} \leqslant |\cos t|^{2n} = (\cos t)^{2n},$$

d'où

$$\frac{1-(\cos t)^{2n+2}}{t^2} - \frac{1-(\cos t)^{2n}}{t^2} \geqslant 0,$$

avec inégalité stricte par exemple au point $t = \frac{\pi}{4}$. Par intégration d'une fonction continue, on en déduit

$$u_{2n+2} - u_{2n} = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1-(\cos t)^{2n+2}}{t^2} - \frac{1-(\cos t)^{2n}}{t^2} \right) \mathrm{d}t > 0.$$

Ainsi, $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

2.b. D'après la question **1.d**,

$$u_1 = f(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Ensuite,

$$u_2 = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(2t)}{2\,t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2},$$

grâce à la question **1.e** appliquée à $s = 2$.

3.a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le changement de variable $\varphi : u \mapsto \sqrt{\frac{2u}{n}}$, de classe $\mathcal{C}^1$ et bijectif de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même, de dérivée $u \mapsto \frac{1}{\sqrt{2n}}\,\frac{1}{\sqrt{u}}$, donne

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{1-\left(\cos\left(\sqrt{2u/n}\right)\right)^n}{\frac{2u}{n}} \times \frac{1}{\sqrt{2n}} \times \frac{1}{\sqrt{u}}\,du,$$

et donc

$$u_n = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2}}\,v_n.$$

3.b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'abord, la fonction $\alpha \mapsto \alpha^n$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$, car deux fois dérivable et de dérivée seconde $\alpha \mapsto n(n-1)\alpha^{n-2}$ positive. Par comparaison avec la tangente en 1, on a donc

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ \alpha^n - 1 \geqslant n\,(\alpha - 1).$$

Soit $u \in\,]0,1]$. Alors, $0 \leqslant \sqrt{\frac{2u}{n}} \leqslant \sqrt{2} \leqslant \frac{3}{2} < \frac{\pi}{2}$, si bien que le réel $\alpha := \cos\left(\sqrt{2u/n}\right)$ appartient à $]0,1]$. Ainsi,

$$0 \leqslant 1 - \alpha^n \leqslant n\,(1-\alpha).$$

Ensuite, la formule de Taylor avec reste intégral donne, pour $v := \sqrt{\frac{2u}{n}}$,

$$\begin{aligned}\cos v &= 1 + \cos'(0)\, v + \cos''(0)\, \frac{v^2}{2!} + \int_0^v \frac{(v-t)^2}{2!} \cos^{(3)}(t)\, \mathrm{d}t \\ &= 1 - \frac{v^2}{2} + \int_0^v \frac{(v-t)^2}{2} \sin(t)\, \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Puisque $v \in [0,\pi]$, le reste intégral est positif, et donc

$$1 - \cos v \leqslant \frac{v^2}{2}.$$

Il vient donc

$$0 \leqslant 1 - \left(\cos\sqrt{2u/n}\right)^n \leqslant n\,\frac{2u}{2n} = u,$$

ce qui démontre le résultat recherché.

3.c. Appliquons le théorème de convergence dominée. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons

$$g_n : u \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1 - \left(\cos\left(\sqrt{2u/n}\right)\right)^n}{u\sqrt{u}}.$$

- Fixons $u \in \mathbb{R}_+^*$. Quand n tend vers $+\infty$,

$$\cos\sqrt{2u/n} = 1 - \frac{u}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

de limite 1 en $+\infty$, puis

$$\ln\left(\cos\sqrt{2u/n}\right) = -\frac{u}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

et donc

$$n\ln\left(\cos\sqrt{2u/n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -u.$$

Par continuité de l'exponentielle, il vient

$$g_n(u) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1-e^{-u}}{u^{3/2}}.$$

- La limite simple $u \mapsto \dfrac{1-e^{-u}}{u^{3/2}}$ est évidemment continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Enfin, grâce à la question précédente pour $u \leqslant 1$, et une majoration évidente sinon, on dispose de la domination

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall u \in \mathbb{R}_+^*, \quad |g_n(u)| \leqslant \varphi(u) := \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{u}} & \text{si } u \leqslant 1 \\ \dfrac{2}{u^{3/2}} & \text{sinon,} \end{cases}$$

et il est immédiat que la dominante φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par convergence dominée, il vient donc

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-u}}{u^{3/2}}\,du.$$

3.d. Intégrons par parties, en intégrant la fonction $u \mapsto u^{-3/2}$ et en dérivant $u \mapsto 1-e^{-u}$. Il vient

$$l = \Big[-2(1-e^{-u})u^{-1/2}\Big]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2\,e^{-u}u^{-1/2}\,du,$$

la formule étant justifiée grâce à la limite évidente

$$(1-e^{-u})\,u^{-1/2} \underset{u\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et à

$$(1-e^{-u})\,u^{-1/2} \underset{u\to0^+}{\sim} u^{1/2} \underset{u\to0^+}{\longrightarrow} 0.$$

Ces mêmes limites permettent d'achever le calcul et d'obtenir, grâce au résultat admis,

$$l = 2\sqrt{\pi}.$$

Cette limite l étant non nulle, on déduit de **3.a** l'équivalent

$$u_n \sim \sqrt{\frac{n\pi}{2}}.$$

II. Autour du pile ou face

4.a. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La variable X_k est bornée, donc d'espérance finie, et

$$E(X_k) = 1\times P(X_k=1) + (-1)\times P(X_k=-1) = 0.$$

Comme X_k^2 est constante de valeur 1, $E(X_k^2)=1$, donc

$$V(X_k) = E(X_k^2) - E(X_k)^2 = 1.$$

Par linéarité de l'espérance, on a donc

$$E(S_n) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = 0,$$

et comme les variables X_k sont mutuellement indépendantes,

$$V(S_n) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) = n.$$

4.b. Comme S et T sont indépendantes, $\cos(S)$ et $\cos(T)$ le sont aussi, tout comme $\sin(S)$ et $\sin(T)$. On a donc

$$\begin{aligned}
E\big(\cos(S+T)\big) &= E(\cos S \cos T - \sin S \sin T) \\
&= E(\cos S \cos T) - E(\sin S \sin T) \\
&= E(\cos S)E(\cos T) - E(\sin S)E(\sin T).
\end{aligned}$$

Toutes les espérances données ici sont bien définies, car les variables aléatoires $\cos S$, $\cos T$, etc. sont bornées. Comme $T \sim -T$, on trouve

$$\sin(T) \sim \sin(-T), \quad \text{donc} \quad \sin(T) \sim -\sin(T),$$

et ainsi $E(\sin T) = E(-\sin T) = -E(\sin T)$, ce qui assure que $E(\sin T) = 0$. Il vient donc

$$E\big(\cos(S+T)\big) = E(\cos S)E(\cos T).$$

4.c. Soit $t \in \mathbb{R}$. Soit $k \geqslant 2$.
Comme les variables $X_1, \ldots, X_k$ sont mutuellement indépendantes, le lemme des coalitions montre que $(X_1, \ldots, X_{k-1})$ est indépendante de X_k, donc par transfert d'indépendance

$$tS_{k-1} = \sum_{i=1}^{k-1} tX_i$$

est indépendante de tX_k. Puisque $X_k \sim -X_k$, on trouve $tX_k \sim -tX_k$. Le résultat de la question précédente s'applique donc au couple (tS_{k-1}, tX_k) et montre que

$$\varphi_k(t) = \varphi_{k-1}(t)\, E\big(\cos(tX_k)\big).$$

Enfin, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la variable $\cos(tX_k)$ est évidemment constante de valeur $\cos t$, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\varphi_n(t) = \varphi_1(t)\,(\cos t)^{n-1} = (\cos t)^n.$$

4.d. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons que $S_n(\Omega)$ est fini. Ainsi,

$$\begin{aligned}
E(|S_n|) &= \sum_{s \in S_n(\Omega)} |s|\, P(S_n = s) && \text{(transfert)}\\
&= \sum_{s \in S_n(\Omega)} P(S_n = s)\, \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(st)}{t^2}\, \mathrm{d}t && \text{(par } \mathbf{1.e}\text{)}\\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \Big(\sum_{s \in S_n(\Omega)} P(S_n = s)\, \frac{1-\cos(st)}{t^2} \Big)\, \mathrm{d}t\\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} E\Big(\frac{1-\cos(tS_n)}{t^2} \Big)\, \mathrm{d}t && \text{(transfert)}\\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - E\big(\cos(tS_n)\big)}{t^2}\, \mathrm{d}t\\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1-(\cos t)^n}{t^2}\, \mathrm{d}t, && \text{(par } \mathbf{4.c}\text{)}
\end{aligned}$$

et donc

$$E\big(|S_n|\big) = \frac{2}{\pi}\, u_n.$$

4.e. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Remarquons d'abord que $|S_{2n+1}| \geqslant 1$. En effet, pour tout $\omega \in \Omega$, la quantité $S_{2n+1}(\omega)$ est évidemment un entier impair. Par transfert, il vient ensuite

$$E\big(|S_{2n+2}|\big) = \sum_{(s,t) \in S_{2n+1}(\Omega) \times \{-1,1\}} |s+t|\, P(S_{2n+1} = s,\, X_{2n+2} = t).$$

Comme vu en **4.c**, la variable S_{2n+1} est indépendante de X_{2n+2}, donc

$$\forall s \in S_{2n+1}(\Omega),\ \forall t \in \{-1,1\},\ P(S_{2n+1} = s,\, X_{2n+2} = t) = \frac{1}{2} P(S_{2n+1} = s).$$

Il s'ensuit donc que

$$E\big(|S_{2n+2}|\big) = \frac{1}{2} \sum_{s \in S_{2n+1}(\Omega)} \big(|s+1| + |s-1|\big)\, P(S_{2n+1} = s).$$

La fonction $f : x \mapsto |x|$ est clairement additive sur $\mathbb{R}_+$ et sur $\mathbb{R}_-$. Pour tout $s \in \mathbb{R}$ tel que $|s| \geqslant 1$, il vient, comme $s+1$ et $s-1$ sont de même signe, $|s+1| + |s-1| = 2|s|$. Ainsi, vu la remarque initiale,

$$E\big(|S_{2n+2}|\big) = \sum_{s \in S_{2n+1}(\Omega)} |s|\, P(S_{2n+1} = s) = E\big(|S_{2n+1}|\big).$$

Grâce au résultat de la question précédente, on obtient donc

$$u_{2n+2} = u_{2n+1}.$$

5.a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On trouve en développant la somme

$$S_n^4 = \sum_{f \in \mathcal{F}([\![1,4]\!],[\![1,n]\!])} X_{f(1)} X_{f(2)} X_{f(3)} X_{f(4)},$$

et donc

$$E(S_n^4) = \sum_{f \in \mathcal{F}([\![1,4]\!],[\![1,n]\!])} \underbrace{E\big(X_{f(1)} X_{f(2)} X_{f(3)} X_{f(4)}\big)}_{a_f}.$$

Fixons $f : [\![1,4]\!] \to [\![1,n]\!]$. Si l'un des éléments de $[\![1,n]\!]$, mettons i, possède un nombre impair k d'antécédents par f, alors $X_i^k = X_i$, et par indépendance

$$a_f = E(X_i^k)\, E\Bigg(\prod_{j \in [\![1,4]\!] \setminus f^{-1}\{i\}} X_{f(j)}\Bigg) = 0.$$

Sinon, tout élément de $[\![1,n]\!]$ possède un nombre pair d'antécédents par f, et alors $X_{f(1)} X_{f(2)} X_{f(3)} X_{f(4)} = 1$, puis $a_f = 1$. Ainsi, par linéarité de l'espérance, $E(S_n^4)$ est le cardinal de l'ensemble des $f : [\![1,4]\!] \to [\![1,n]\!]$ pour lesquelles tout élément de $[\![1,n]\!]$ possède un nombre pair d'antécédents. Celui-ci se partitionne en deux sous-ensembles :

- celui des fonctions constantes : il y en a n ;
- celui des fonctions prenant exactement deux valeurs, chacune avec deux antécédents : il y en a $\binom{n}{2}$ (choix de l'ensemble des valeurs) que multiplie $\binom{4}{2}$ (choix des antécédents de la plus petite valeur prise), soit $3n(n-1)$.

Ainsi,

$$E(S_n^4) = 3n(n-1) + n = 3n^2 - 2n.$$

5.b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après **5.a**, U_n est d'espérance finie et

$$E(U_n) = \frac{3n^2 - 2n}{n^4} \leqslant \frac{3}{n^2}.$$

Comme $U_n \geqslant 0$, l'inégalité de Markov donne

$$0 \leqslant P\Big(U_n \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\Big) \leqslant \frac{E(U_n)}{n^{-1/2}} \leqslant \frac{3}{n^{3/2}}.$$

5.c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition même,

$$\mathcal{Z}_n = \bigcup_{k \geqslant n} \Big(U_k \geqslant \frac{1}{\sqrt{k}}\Big)$$

est un événement, comme réunion dénombrable d'événements. D'après la question précédente, la série numérique $\sum P\Big(U_k \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{k}}\Big)$ converge absolument (puisque $\frac{3}{2} > 1$), et donc

$$0 \leqslant P(\mathcal{Z}_n) \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} P\Big(U_k \geqslant \frac{1}{\sqrt{k}}\Big).$$

Comme le reste d'une série convergente tend vers 0, il vient

$$P(\mathcal{Z}_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

5.d. L'ensemble $\mathcal{Z}$ est une intersection dénombrable d'événements, donc un événement. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathcal{Z} \subset \mathcal{Z}_n$, de sorte que

$$0 \leqslant P(\mathcal{Z}) \leqslant P(\mathcal{Z}_n),$$

puis $P(\mathcal{Z}) = 0$ par passage à la limite.

Soit enfin $\omega \in \Omega \setminus \mathcal{Z}$. Alors, $\omega \in \overline{\mathcal{Z}_n}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, et donc

$$\forall k \geqslant n, \ \Big|\frac{S_k(\omega)}{k}\Big| < \frac{1}{k^{1/8}}.$$

Comme la suite majorante tend vers 0, on en déduit que

$$\frac{S_k(\omega)}{k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi, $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge presque sûrement vers 0.

III. D'autres sommes aléatoires

6.a. Soit $n \geqslant 2$. Avec rigoureusement la même méthode qu'en **4.e**, on trouve

$$E(|T_{n+1}|) = \sum_{s\in T_n(\Omega)} \frac{|s+a_{n+1}| + |s-a_{n+1}|}{2} P(T_n = s).$$

Or, par inégalité triangulaire, pour tout réel s,

$$|2s| = \big|(s+a_{n+1}) + (s-a_{n+1})\big| \leqslant |s+a_{n+1}| + |s-a_{n+1}|,$$

et donc

$$E(|T_{n+1}|) \geqslant \sum_{s\in T_n(\Omega)} |s|\, P(T_n = s) = E(|T_n|).$$

Ainsi, la suite $\big(E(|T_n|)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

6.b. Supposons la série $\sum a_n^2$ convergente. Soit $n \geqslant 1$. Par l'inégalité de Cauchy & Schwarz,

$$E(|T_n|) \leqslant \sqrt{E(T_n^2)}.$$

Or, avec la même méthode qu'en **4.a**, on trouve

$$E(T_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k E(X_k) = 0 \quad \text{et} \quad V(T_n) = \sum_{k=1}^{n} V(a_k X_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k^2,$$

donc

$$E(T_n^2) = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \leqslant \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2}_{L}.$$

Ainsi, la suite $\big(E(|T_n|)\big)_{n\geqslant 1}$ est majorée par $\sqrt{L}$. Or, elle est croissante d'après **6.a**. Elle est donc convergente.

6.c. D'abord, $|T_1|$ est constante de valeur a_1 (car $a_1 \geqslant 0$) d'où $E\big(|T_1|\big) = a_1$.

Le résultat exigé est donc évident si $n = 1$. Supposons maintenant $n \geqslant 2$. Posons $Y := \sum_{k=2}^{n} a_k X_k$ et notons que $|Y| \leqslant a_1$. Toujours avec la méthode de **4.e**, on trouve cette fois-ci, par indépendance de Y et X_1,

$$E\big(|T_n|\big) = \sum_{s \in Y(\Omega)} \frac{|a_1 + s| + |-a_1 + s|}{2} P(Y = s).$$

Comme $|s| \leqslant a_1$ pour tout $s \in Y(\Omega)$, on en déduit, comme en **4.e**,

$$E\big(|T_n|\big) = \sum_{s \in Y(\Omega)} a_1 P(Y = s) = a_1.$$

Ainsi, dans tous les cas

$$E\big(|T_n|\big) = E\big(|T_1|\big) = a_1.$$

7.a. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, posons $a_k = \dfrac{1}{2k-1}$, qui est bien un réel positif. Considérons la suite $(T_n)_{n\geqslant 1}$ définie à partir de cette donnée.

Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. Comme T_n prend évidemment ses valeurs dans un ensemble fini, la même méthode qu'en **4.d** montre, par linéarité de l'intégrale,

$$E\big(|T_n|\big) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - E\big(\cos(tT_n)\big)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Ensuite, pour tout réel $t > 0$, la même méthode qu'en **4.c** montre, puisque λX_k est de même loi que son opposé pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$E\big(\cos(tT_n)\big) = \prod_{k=1}^{n} E\big(\cos(ta_k X_k)\big) = \prod_{k=1}^{n} \cos(ta_k),$$

la dernière égalité découlant de la parité du cosinus.

Ainsi, en posant
$$h_n : t \mapsto \prod_{k=1}^{n} \cos\Big(\frac{t}{2k-1}\Big),$$
on a démontré
$$E(|T_n|) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - h_n(t)}{t^2}\, \mathrm{d}t,$$
ce qui assure que J_n est bien définie et se récrit
$$J_n = \frac{\pi}{2}\, E(|T_n|).$$

Ensuite, **6.a** montre que $(J_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.

Enfin, $a_k^2 \sim \dfrac{1}{4k^2}$, et comme la série $\sum \dfrac{1}{k^2}$ converge absolument, il vient que $\sum a_k^2$ converge. Ainsi, **6.b** montre que $(J_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.

7.b. La calculatrice, autorisée à cette épreuve, permet de se convaincre que $a_1 \geqslant \sum\limits_{k=2}^{7} a_k$, et donc, par positivité des a_k,
$$\forall n \in [\![2,7]\!],\ a_1 \geqslant \sum_{k=2}^{n} a_k.$$

En vertu de **6.c** et de l'expression trouvée en **7.a**, il vient $J_n = J_1$ pour tout $n \in [\![2,7]\!]$. De plus, $J_1 = u_1 = \frac{\pi}{2}$ ce qui donne la première partie du résultat.

Pour $n \geqslant 7$, nous considérons la condition
$$\mathcal{C}_n : \text{« Il existe } \varepsilon \in \{-1,1\}^{n-1} \text{ telle que } \Big|\sum\nolimits_{k=1}^{n} \varepsilon_k a_k\Big| < a_{n+1}.\text{ »}$$

Admettons temporairement que $\mathcal{C}_n$ vaut pour tout $n \geqslant 7$.

Fixons $n \geqslant 7$. Pour tout $\varepsilon \in \{-1,1\}^n$, nous avons par indépendance des variables $X_1,\dots,X_n$,
$$P\Big(T_n = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k a_k\Big) \geqslant P(X_1 = \varepsilon_1,\dots,X_n = \varepsilon_n) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k = \varepsilon_k) > 0.$$

Cela démontre en particulier que
$$T_n(\Omega) = \Big\{ \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k\, a_k \mid (\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n \Big\},$$
l'inclusion de la gauche vers la droite étant triviale. De plus, toute valeur prise par T_n l'est avec probabilité strictement positive.

Reprenant la démonstration de **6.a**, on trouve
$$E\big(|T_{n+1}|\big) = \sum_{s\in T_n(\Omega)} \frac{|s + a_{n+1}| + |s - a_{n+1}|}{2}\, P(T_n = s).$$

Pour tout $s \in T_n(\Omega)$:

• ou bien $s \notin]-a_{n+1},a_{n+1}[$, alors $s+a_{n+1}$ et $s-a_{n+1}$ sont de même signe, et donc

$$\frac{|s+a_{n+1}|+|s-a_{n+1}|}{2}\,P(T_n=s)=|s|\,P(T_n=s)\,;$$

• ou bien $s \in]-a_{n+1},a_{n+1}[$, alors $s+a_{n+1}$ et $s-a_{n+1}$ sont non nuls et de signes contraires, donc par inégalité triangulaire

$$\frac{|s+a_{n+1}|+|s-a_{n+1}|}{2}\,P(T_n=s)>|s|\,P(T_n=s).$$

En sommant sur s, il vient, puisque $\mathcal{C}_n$ est vraie, $E\big(|T_{n+1}|\big)>E\big(|T_n|\big)$ et donc

$$J_{n+1}>J_n.$$

Il reste à établir que $\mathcal{C}_n$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 7$. Nous montrons d'abord que $\mathcal{C}_n$ implique $\mathcal{C}_{n+4}$, pour tout $n \geqslant 7$.

Soit $n \geqslant 7$ tel que $\mathcal{C}_n$ soit vraie. Nous choisissons $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n$ tel que $S := \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k a_k$ vérifie $|S| < a_{n+1}$. Quitte à changer ε en $-\varepsilon$, nous pouvons supposer $0 \leqslant S < a_{n+1}$. Nous posons alors $\varepsilon_{n+1}=\varepsilon_{n+2}=-1$ et $\varepsilon_{n+3}=\varepsilon_{n+4}=1$ et nous proposons de montrer que la $(n+4)$-liste ainsi construite permet d'établir $\mathcal{C}_{n+4}$. Posons $S' := -a_{n+1}-a_{n+2}+a_{n+3}+a_{n+4}$. Il s'agit donc de démontrer que

$$-a_{n+5}<S+S'<a_{n+5}.$$

• Comme $S-a_{n+1}<0$, il suffit, pour démontrer l'inégalité de droite, de montrer que $-a_{n+2}+a_{n+3}+a_{n+4} \leqslant a_{n+5}$ i.e. $a_{n+4}-a_{n+5} \leqslant a_{n+2}-a_{n+3}$. Or, cette inégalité s'obtient en écrivant

$$a_{n+4}-a_{n+5}=\frac{2}{(2n+7)(2n+9)} \geqslant \frac{2}{(2n+3)(2n+5)}=a_{n+2}-a_{n+3}.$$

• Comme $S \geqslant 0$, il suffit, pour démontrer l'inégalité de gauche, d'établir que

$$a_{n+3}-a_{n+1}+a_{n+4}-a_{n+2}>-a_{n+5}.$$

Or, comme précédemment, $a_{n+2}-a_{n+4} \leqslant a_{n+1}-a_{n+3}$, et il suffit donc d'établir que $a_{n+1}-a_{n+3}<\dfrac{a_{n+5}}{2}$, autrement dit

$$\frac{8}{(2n+1)(2n+5)}<\frac{1}{2n+9},$$

ce qui équivaut à $4n(n-1)>67$. Mais, $k \mapsto 4k(k-1)$ est évidemment croissante sur $\mathbb{N}^*$ et de valeur 168 en 7, donc l'inégalité voulue est bien établie.

Ainsi, $\mathcal{C}_n$ implique $\mathcal{C}_{n+4}$, pour tout $n \geqslant 7$. Un calcul machine permet enfin de constater que la condition $\mathcal{C}_n$ est vraie à tout rang dans $\{7,8,9,10\}$. On donne, dans le tableau suivant, une liste ε possible pour chacune de ces valeurs de n.

Valeur de n	Liste ε convenable
7	$(1,-1,-1,-1,-1,-1,-1)$
8	$(1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1)$
9	$(1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,1)$
10	$(1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,1,-1)$

Concluons : par récurrence, $\mathcal{C}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 7$, si bien que la suite $(J_n)_{n\geqslant 7}$ est strictement croissante.

COMMENTAIRES

Le problème portait sur les combinaisons linéaires de **variables de Rademacher** indépendantes. Une variable de Rademacher est une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\{-1,1\}$.

Dans la partie **I**, on établissait la formule intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

Cette formule peut être obtenue, avec nettement moins de calculs, en remarquant, grâce à une intégration par parties, que

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

L'intégrale semi-convergente $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ peut ensuite être calculée à peu de frais en étudiant la transformée de Laplace $x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,e^{-xt}\,\mathrm{d}t$ (avec une petite difficulté pour montrer la continuité en 0). Il semblerait que les concepteurs de sujets se soient entendus, cette année, pour faire obtenir des intégrales classiques par l'étude d'intégrales à paramètres les plus tarabiscotées qui soient (voir aussi la première partie de l'épreuve 2 du Concours Commun Mines-Ponts).

On pouvait aussi étudier directement la transformée de Laplace $x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,e^{-xt}\,\mathrm{d}t$ de l'intégrande initial, au prix de calculs un peu plus compliqués, mais en bénéficiant de la gratuité de la continuité en 0.

La fin de la première partie faisait étudier un équivalent d'une suite d'intégrales : les spécialistes auront reconnu la **méthode de Laplace**. Le poids de l'intégrale se concentrant autour de l'origine, on use d'un changement de variable affine bien senti pour recadrer l'intégrale et faire converger, après factorisation, l'intégrande converge vers une fonction intégrable non nulle. Le théorème de convergence dominée permet ensuite de plier l'affaire.

La fin de la partie **II** était consacrée à la démonstration de la **loi forte des grands nombres** dans le cas très particulier des variables de Rademacher. Rappelons la forme générale de ce théorème (hors-programme).

Loi forte des grands nombres
Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes identiquement distribuées, toutes d'espérance finie. Alors, la suite de variables aléatoires $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right)_{n\geqslant 1}$ converge presque sûrement vers $\mathbf{E}(X_1)$.

La démonstration —extrêmement classique— donnée dans l'énoncé peut être adaptée pour établir la loi forte des grands nombres sous l'hypothèse où les variables X_k ont toutes un moment d'ordre 4. Nous renvoyons au chapitre 20 de [2] pour un exposé sur les lois des grands nombres et une démonstration de la loi forte dans toute sa généralité.

Dans le début de la partie **II** et dans la partie **III**, on établissait un pont entre le calcul de l'espérance de la valeur absolue d'une combinaison linéaire de variables de Rademacher indépendantes et les valeurs de certaines intégrales. Les résultats sur ces intégrales peuvent être démontrés sans recours à la théorie des probabilités (tout se réduit à des sommes finies indexées sur $\{-1,1\}^n$), mais cette dernière rend particulièrement intelligibles les calculs effectués.

Terminons par des remarques sur des questions particulières.

- En **2.a**, il n'était pas évident de savoir si le jury souhaitait la monotonie stricte ou large de $(u_{2n})_{n\geqslant 1}$. Compte tenu de la brièveté du sujet, nous avons préféré adopter une attitude maximaliste.
- Au début de **3.b**, l'argument de convexité pouvait être remplacé par l'utilisation de l'inégalité des accroissements finis.
- La fin de **7.b**, à savoir la démonstration de la validité, à partir du rang 7, de la propriété notée $\mathcal{C}_n$ dans notre corrigé, était absolument infaisable en situation de concours. La première idée naturelle pour la résoudre consiste à alterner les signes de ε_k à partir du rang 8. Hélas, elle se révèle fausse : on peut le voir soit par un calcul machine, soit en remarquant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} = -\frac{\pi}{4}$, ce qui découle du développement en série entière

de la fonction arctan au prix d'un léger surcroît de travail. Comme classiquement le nombre π est irrationnel, on en déduit que tous les restes de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{2n-1}$ sont irrationnels. Par suite, s'il existait un entier $N \geqslant 2$ et une liste finie $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N)$ d'éléments de $\{-1,1\}$ tels que la liste complétée $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = \big(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N, (-1)^{N+1}, \ldots, (-1)^n\big)$ valide $\mathcal{C}_n$ pour tout $n > N$, alors la série $\sum_{k\geqslant 1} \varepsilon_k\, a_k$ devrait être de somme nulle, contredisant visiblement l'irrationnalité de $\sum_{k=N+1}^{+\infty} (-1)^k a_k$.

Dans une situation aussi exceptionnelle, il est sans doute préférable, pour les excellents candidats qui ont atteint cette dernière question et y ont séché plusieurs dizaines de minutes :

- ▷ soit de coucher sur le papier une piste de réflexion — même infructueuse — en expliquant où sont les points de blocage (ici, on pouvait typiquement se limiter à mettre en évidence la nécessité de démontrer $\mathcal{C}_n$ à partir du rang 7, et conclure sur une aporie) ;
- ▷ soit d'abandonner cette question et de retravailler le reste du sujet.

THÉORÈMES UTILISÉS

- **Théorème** 23, **p.** 285. Théorème de continuité sous l'intégrale
- **Théorème** 25, **p.** 286. Théorème de dérivation sous l'intégrale (à l'ordre k)
- **Théorème** 22, **p.** 285. Théorème de convergence dominée
- **Théorème** 30, **p.** 287. Théorème de transfert
- **Théorème** 31, **p.** 287. Inégalité de Markov
- **Théorème** 28, **p.** 286. Principe des coalitions et de transfert d'indépendance
- **Théorème** 29, **p.** 286. Espérance du produit de variables aléatoires indépendantes

Mines Math I MP 2018

A. Préliminaires

1) On a $E(X)=\sum_{k=1}^{n} kP(X=k)=\sum_{k=1}^{m-1} kP(X=k)+\sum_{k=m}^{n} kP(X=k)$ donc

$$E(X)\leqslant \sum_{k=1}^{m-1}(m-1)P(X=k)+\sum_{k=m}^{n} nP(X=k)\leqslant (m-1)\sum_{k=1}^{n}P(X=k)+\sum_{k=m}^{n} nP(X=k)$$

Or on a $\sum_{k=m}^{n}P(X=k)=P(X\geqslant m)$. Conclusion: $\boxed{E(X)\leqslant m-1+nP(X\geqslant m)}$

Remarque : les majorations ci-dessus sont valables si $m=1$.

2) On trace la fonction $x\longmapsto \ln x$ sur $[1,+\infty[$ qui est continue, croissante et positive sur $[1,+\infty[$.

La formule demandée est vrai si $n=1$ (on a même l'égalité).

Soit $n\geqslant 2$, on a :

$\forall k\geqslant 2$, $\forall t\in[k-1,k]$: $\ln t\leqslant \ln k$ que l'on intègre de $k-1$ à k : $\int_{k-1}^{k}\ln t\,dt\leqslant \ln k$ puis on somme de 2 à n : $\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\ln t\,dt\leqslant \sum_{k=2}^{n}\ln k$ soit $\int_{1}^{n}\ln t\,dt\leqslant \sum_{k=1}^{n}\ln k$ (car $\ln 1=0$).

Comme $\int_1^n \ln t\,dt=\Big[t\ln t-t\Big]_1^n=n\ln n-n+1$, Conclusion: $\boxed{\forall n\geqslant 1 : n\ln n-n+1\leqslant \sum_{k=1}^{n}\ln k}$

On en déduit que $e^{n\ln n-n+1}\leqslant e^{\sum_{k=1}^{n}\ln k}=n!$.

Or $(\frac{n}{e})^n=e^{n\ln n-n}\leqslant e^{n\ln n-n+1}\leqslant n!$ Conclusion: $\boxed{\forall n\geqslant 1 : \left(\frac{n}{e}\right)^n\leqslant n!}$

B. Le lemme se sous-additivité de Fekete

3) Faire un dessin sur une droite horizontale de la situation des éléments présentés.

Comme u est bornée, U_n est un ensemble borné et comme $u_n\in U_n$, U_n est non vide,

Conclusion: $\boxed{(\underline{u}_n) \text{ et } (\overline{u}_n) \text{ sont bien définis}}$

$\forall n\geqslant 1 : U_{n+1}\subset U_n$, donc $\overline{u}_n$ majore U_{n+1} et $\underline{u}_n$ minore U_{n+1}, on a alors : $\overline{u}_{n+1}\leqslant \overline{u}_n$ et $\underline{u}_{n+1}\geqslant \underline{u}_n$.

En conséquence, la suite $(\underline{u}_n)$ est croissante et la suite $(\overline{u}_n)$ est décroissante.

Comme ces deux suites sont bornées (par les bornes de (u_n)), par le théorème de limite monotone on a : Conclusion: $\boxed{(\underline{u}_n) \text{ et } (\overline{u}_n) \text{ sont monotones et convergentes}}$

4) • On a vu au **3)** que la suite $(\overline{u}_n)$ **est décroissante**.

Comme , pour tout $n\geqslant 1$, $u_n\in U_n$, $u_n\leqslant \overline{u}_n$ donc $\overline{u}\succeq u$.

Soit v telle que v soit décroissante et telle que $u\preceq v$, montrons que $\overline{u}\preceq v$.

Soit $n \geqslant 1$ et soit $k \geqslant n$, $u_k \leqslant v_k \leqslant v_n$ car v est décroissante. v_n est donc un majorant de U_n, donc $\overline{u}_n \leqslant v_n$ et donc $\overline{u} \preceq v$. Conclusion: $\boxed{\overline{u} \text{ est la plus petite suite décroissante et plus grande que } u}$

• De la même manière, la suite $\underline{u}$ **est décroissante**.

Comme , pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \in U_n$, $\underline{u}_n \leqslant u_n$ donc $\underline{u} \preceq u$.

Soit v telle que v soit croissante et telle que $v \preceq u$, montrons que $v \preceq \underline{u}$.

Soit $n \geqslant 1$ et soit $k \geqslant n$, $u_k \geqslant v_k \geqslant v_n$ car v est croissante. v_n est donc un minorant de U_n, donc $v_n \leqslant \underline{u}_n$ et donc $v \preceq \underline{u}$. Conclusion: $\boxed{\underline{u} \text{ est la plus grande suite croissante et plus petite que } u}$

5) Soit $n \geqslant 1$ et soit $k \geqslant n$, $u_k \leqslant v_k \leqslant \overline{v}_n$ car $\overline{v}_n$ est un majorant de V_n. $\overline{v}_n$ est donc un majorant de U_n, donc $\overline{u}_n \leqslant \overline{u}_n$. Comme ces deux suites sont convergentes, on a

Conclusion: $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \overline{u}_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} \overline{v}_n}$

6) $\boxed{\Longrightarrow|}$ Supposons que $\overline{u}$ et $\underline{u}$ soient adjacentes. Comme pour tout entier $n \geqslant 1$, $\underline{u}_n \leqslant u_n \leqslant \overline{u}_n$,grâce au théorème d'encadrement : u converge et sa limite est égale à celle de $\overline{u}$ et $\underline{u}$.

$\boxed{\Longleftarrow|}$ Supposons que u converge. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \geqslant 1$ tel que $\forall k \geqslant N$ $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$ (avec ℓ limite de u). On a donc $\forall k \geqslant N$, $\ell - \varepsilon \leqslant u_k \leqslant \ell + \varepsilon$, d'où pour tout $n \geqslant N$: $U_n \subset [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$ et donc $\ell - \varepsilon \leqslant \underline{u}_n \leqslant u_n \leqslant \overline{u}_n \leqslant \ell + \varepsilon$. On en déduit que les suites $\overline{u}$ et $\underline{u}$ convergent vers ℓ.

Conclusion:

$\boxed{\overline{u} \text{ et } \underline{u} \text{ sont adjacentes si et seulement si } u \text{ converge et dans ce cas les trois suites ont la même limite}}$

7) On a : $m = nq + r = n(q-1) + n + r$ et comme $0 \leqslant r < n$, $1 \leqslant n \leqslant r + n$ et comme $m \geqslant 2n$, $m - 2n = (q-2)n + r \geqslant 0$ d'où $(q-2)n \geqslant -r > -n$, soit $q - 2 > -1$ (car $n > 0$) et donc $q > 1$.

On a donc $m = nq + r = n(q-1) + n + r$ avec $n(q-1) > 0$ et $n + r > 0$. On peut appliquer la sous-additivité : $u_m = u_{n(q-1)+n+r} \leqslant u_{n(q-1)} + u_{n+r}$.

Enfin par récurrence sur q, on a $u_{n(q-1)} \leqslant (q-1)u_n$: en effet c'est vrai pour $q = 2$ et si c'est vraie pour $q \geqslant 2$, $u_{n(q)} \leqslant u_{n(q-1)} + u_n \leqslant (q-1)u_n + u_n = (q+1-1)u_n$.

Conclusion: $\boxed{u_m \leqslant (q-1)u_n + u_{n+r}}$

Multiplions par $\dfrac{1}{m}$, on a donc $\dfrac{u_m}{m} \leqslant \dfrac{(q-1)u_n}{m} + \dfrac{u_{n+r}}{m}$.

Tout d'abord, comme on a $n \leqslant n + r \leqslant n + n - 1 = 2n - 1$, on a $\dfrac{u_{n+r}}{m} \leqslant \dfrac{\max(u_n, \ldots, u_{2n-1})}{m}$.

Ensuite $\dfrac{q-1}{m} - \dfrac{m-n-r}{nm} = \dfrac{1}{m}\dfrac{nq - n - m + n - r}{n} = 0$

Conclusion: $\boxed{\dfrac{u_m}{m} \leqslant \dfrac{m-n-r}{m} \cdot \dfrac{u_n}{n} + \dfrac{\max(u_n, \ldots, u_{2n-1})}{m}}$

8) On prend $n = 1$ et pour tout $m \geqslant 2$, on a :

$0 \leqslant \dfrac{u_m}{m} \leqslant \dfrac{m-1-0}{m} \cdot \dfrac{u_1}{1} + \dfrac{\max(u_1)}{m} \leqslant 1 \cdot \dfrac{u_1}{1} + \dfrac{u_1}{1} = 2u_1$. Conclusion: $\boxed{\left(\dfrac{u_m}{m}\right)_{m\in\mathbb{N}^*} \text{ est bornée}}$

Soit $n \geqslant 1$ fixé et soit m quelconque tel que $m \geqslant 2n$. Posons $v_m = \dfrac{m-n-r}{m} \cdot \dfrac{u_n}{n} + \dfrac{\max(u_n, \ldots, u_{2n-1})}{m}$

On a $\forall m \geqslant 2n$: $\dfrac{u_m}{m} \leqslant v_m$. La démonstration du 5) reste valable si l'on n'a l'inégalité qu'à partir d'un certain rang et comme $\left(\dfrac{u_m}{m}\right)_{m\in\mathbb{N}^*}$ est bornée et que $\lim\limits_{m\to+\infty} w_m = 1 \cdot \dfrac{u_n}{n} + 0$ par théorèmes généraux et car $\max(u_n, \ldots, u_{2n-1})$ est indépendant de m, on peut conclure avec le **5)** :

Conclusion: $\boxed{\text{Pour tout entier } n \geqslant 1 : \underline{m \to +\infty}\overline{\lim}\dfrac{u_m}{m} \leqslant \dfrac{u_n}{n}}$

9) Posons $x_n = \overline{\lim\limits_{m\to+\infty}} \dfrac{u_m}{m}$ et $y_n = \dfrac{u_n}{n}$. La suite x est constante donc convergente vers sa valeur.

D'autre part, on a $x \preceq y$ et la suite x est croissante, avec le **4)** on a donc $x \preceq \underline{y}$ et comme x converge vers $\overline{\lim\limits_{m\to+\infty}} \dfrac{u_m}{m}$ et $\underline{y}$ vers $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \dfrac{u_n}{n}$, on a ensuite grâce au **5)** : $\overline{\lim\limits_{m\to+\infty}} \dfrac{u_m}{m} \leqslant \underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \dfrac{u_n}{n}$, puis enfin il est clair que pour tout suite z, $\underline{z}_n \leqslant \overline{z}_n$ et $\lim \underline{z}_n \leqslant \lim \overline{z}_n$ donc $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \dfrac{u_n}{n} \leqslant \overline{\lim\limits_{m\to+\infty}} \dfrac{u_m}{m}$.

Grâce au **6)** on a : Conclusion: $\boxed{\text{La suite } \left(\dfrac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge dans } \mathbb{R}}$

10) • Si $\forall i \in [\![1, n]\!]$ $X_i(\omega) > x$ alors $Y_n(\omega) > \dfrac{nx}{n}$. On a donc $\bigcap\limits_{i=1}^{n}(X_i > x) \subset (Y_n > x)$ d'où $P\Big(\bigcap\limits_{i=1}^{n}(X_i > x)\Big) \leqslant P\Big(Y_n > x\Big)$. Comme les variables X_i sont indépendantes et de même loi, $P\Big(\bigcap\limits_{i=1}^{n}(X_i > x)\Big) = \prod\limits_{i=1}^{n} P(X_i > x) = \prod\limits_{i=1}^{n} P(X_1 > x) = 1^n = 1$.

On en déduit que $1 \leqslant P\Big(Y_n > x\Big) \leqslant 1$. Conclusion: $\boxed{P\Big(Y_n > x\Big) = 1}$

• Si $\forall i \in [\![1, n]\!]$ $X_i(\omega) \geqslant x$ alors $Y_n(\omega) \geqslant \dfrac{nx}{n}$. On a donc $\bigcap\limits_{i=1}^{n}(X_i \geqslant x) \subset (Y_n \geqslant x)$ d'où

$P\Big(\bigcap\limits_{i=1}^{n}(X_i \geqslant x)\Big) \geqslant P\Big((Y_n \geqslant x)\Big)$. Comme les variables X_i sont indépendantes et de même loi, $P\Big(\bigcap\limits_{i=1}^{n}(X_i \geqslant x)\Big) = \prod\limits_{i=1}^{n} P(X_i \geqslant x) = \prod\limits_{i=1}^{n} P(X_1 \geqslant x) = P(X_1 \geqslant x)^n > 0$.

Conclusion: $\boxed{P\Big((Y_n \geqslant x)\Big) > 0}$

11) • Soit $\omega \in \left(\Big\{Y_m \geqslant x\Big\} \cap \Big\{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=m+1}^{m+n} X_k \geqslant x\Big\}\right)$, on a alors

$Y_{m+n}(\omega) = \dfrac{1}{m+n}\sum\limits_{k=1}^{m+n} X_k(\omega) = \dfrac{1}{m+n}\Big(mY_m + \sum\limits_{k=m+1}^{m+n} X_k(\omega)\Big) \geqslant \dfrac{1}{m+n}(mx + nx) = x$, donc

$Y_{m+n}(\omega) \geqslant x$. Conclusion: $\boxed{\left(\left\{Y_m \geqslant x\right\} \cap \left\{\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geqslant x\right\}\right) \subset \{Y_{m+n} \geqslant x\}}$

• Par le lemme des coalitions, Y_m et $\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k$ sont indépendantes donc

$$P\left(\left\{Y_m \geqslant x\right\} \cap \left\{\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geqslant x\right\}\right) = P\left(Y_m \geqslant x\right) \cdot P\left(\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geqslant x\right) \leqslant P\left(Y_{m+n} \geqslant x\right)$$

Or $P\left(\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geqslant x\right) = P\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \geqslant x\right)$ car les X_i suivent la même loi (rigoureusement on montrerait que $\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k$ et $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ ont même loi et en utilisant $P(X_i = a) = P(X_j = a)$).

Conclusion: $\boxed{P\left(Y_{m+n} \geqslant x\right) \geqslant P\left(Y_m \geqslant x\right)P\left(Y_n \geqslant x\right)}$

12) Soit $x \in \mathbb{R}$.

Premier cas : $P(X_1 \geqslant x) = 0$, dans ce cas, $P(X_1 < x) = 1$ et donc avec le **10)**, pour tout entier $n \geqslant 1$: $P(Y_n < x) = 1$, donc $P(Y_n \geqslant x) = 0$. Conclusion: $\boxed{\left((P(Y_n \geqslant x))^{\frac{1}{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers } 0}$

Deuxième cas : $P(X_1 \geqslant x) > 0$, dans ce cas, avec le **10)**, pour tout entier $n \geqslant 1$: $P(Y_n \geqslant x) > 0$.

On peut donc poser $u_n = -\ln(P(Y_n \geqslant x))$ pour tout entier $n \geqslant 1$. De l'inégalité de la question précédente, on en déduit que pour tous m, n dans $\mathbb{N}^*$: $u_{m+n} \leqslant u_m + u_n$. Enfin par définition d'une probabilité, $u_n \geqslant 0$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

On applique le **9)** : la suite $(\frac{u_n}{n})$ converge vers un réel ℓ. On en déduit par critère séquentiel que $(e^{\frac{u_n}{n}})$ converge vers un réel e^{ℓ}. Or $e^{\frac{u_n}{n}} = \dfrac{1}{P(Y_n \geqslant x)^{\frac{1}{n}}}$

Conclusion: $\boxed{\left((P(Y_n \geqslant x))^{\frac{1}{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers } e^{-\ell}}$

13) Amorce :

Si $s = 1$ alors il n'y a qu'une seule pile qui contient de bas en haut $(a_1, a_2, \ldots, a_r)$. Soit un jeton $a_j = z$, la suite à un élément $b = (a_j)$ est bien :

• décroissante de longueur $s = 1$,

• le jeton n°1 de valeur $b_1 = a_j = z$ est dans l'unique pile n°1 ,

• $b_1 = a_j = z$.

(Pas obligatoire, mais utile pour comprendre rapidement ce qui se passe :

Si $s = 2$ alors il y a deux piles qui contiennent $(a_1, a_2, \ldots, a_r)$.

Soit un jeton $a_j = z$ de la deuxième pile. Si on a posé ce j-ième jeton sur la deuxième pile, c'est qu'il y avait sur le sommet de la première pile, à ce moment là, un élément a_k avec $k < j$ et $a_j \leqslant a_k$.

Posons $b = (a_k, a_j)$ c'est bien une suite décroissante de longueur 2, pour $i = 1$ le jeton de valeur $b_1 = a_k$ est dans la pile 1 , pour $i = 2$ le jeton de valeur $b_2 = a_j$ est dans la pile 2 et $b_2 = z$.)

<u>**Hérédité**</u>

Supposons le résultat vraie pour s et soit une répartition des jetons qui donne $s + 1$ piles. Soit un jeton de la $s + 1$-ième pile de valeur $z = a_j$. Comme pour $s = 2$, si on a posé ce j-ième jeton sur cette $s + 1$-ième pile, c'est qu'il y avait sur le sommet de la s-ième pile, à ce moment là, un élément $z' = a_k$ avec $k < j$ et $a_j \leqslant a_k$.

On applique pour z' l'hypothèse de récurrence :

il existe une liste $b = (b_1, \dots, b_s)$ décroissante de longueur s, pour tout $i \in \{1, \dots, s\}$ le jeton n°i de valeur b_i est dans la i-ième pile et $b_s = z'$

La suite $b' = (b_1, \dots, b_s, z)$ possède alors toutes les propriétés demandées car $k < j \Longrightarrow a_j \leqslant a_k$ et $b_{s+1} = z$. <u>Conclusion</u>: $\boxed{\text{On a le résultat demandé pour tout } s \in \mathbb{N}^*}$

14) On range donc les $pq + 1$ éléments de la suite a selon le procédé de l'énoncé. Soit s le nombre de piles que cela a crée.

<u>**Premier cas**</u> : $s \geqslant q + 1$

Dans ce cas avec le **13)**, il existe une suite $b = (b_1, \dots, b_s)$ extraite de la liste a et décroissante. La liste $b = (b_1, \dots, b_{q+1})$ est extraite de la liste a , elle est décroissante et de longueur $q + 1$.

<u>**Deuxième cas**</u> : $s \leqslant q$

Dans ce cas , montrons qu'il y a au moins une pile qui contient au moins $p + 1$ éléments. Si les s piles avaient toutes un nombre inférieur ou égal à p alors les s piles auraient un nombre inférieur ou égal à $ps \leqslant pq < pq + 1$: <u>**absurde**</u>. Il existe une pile qui contient au moins $p + 1$ éléments. Notons $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_{p+1}}, \dots, a_{i_t})$ cette pile.

On a alors $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_{p+1}})$ qui est extraite de la liste a , elle est strictement croissante et de longueur $p + 1$. <u>Conclusion</u>:

La liste a admet au moins une liste extraite croissante de longueur $p + 1$ ou une liste extraite décroissante de longueur $q + 1$.

<u>**Remarque**</u> : le principe du deuxième cas s'appelle le principe des tiroirs : s'il y a 5 tiroirs et 6

chapeaux à ranger, il y aura au moins un tiroir qui recevra deux chapeaux.

15) Soit $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, si $\omega \in (A_1 = i) \cap (A_2 = i)$, alors $B(\omega)(1) = B(\omega)(2) = i$: impossible car $B(\omega)$ est une bijection. Donc $(A_1 = i) \cap (A_2 = i) = \emptyset$ et $P\Big((A_1 = i) \cap (A_2 = i)\Big) = 0$.

Or $P(A_1 = i) = \sum\limits_{\sigma \in S_n} P(A_1 = i / B = \sigma) \cdot P(B = \sigma)$ (c'est la F.P.T.), donc $P(A_1 = i) = \sum\limits_{\sigma \in S_n} \frac{1}{n} \frac{1}{n!}$ d'où $P(A_1 = i) = P(A_2 = i) = \frac{1}{n} \neq 0$.

On ne peut donc avoir $P(A_1 = i) \cdot P(A_2 = i) = P\Big((A_1 = i) \cap (A_2 = i)\Big)$

Conclusion: $\boxed{A_1, \ldots, A_n \text{ ne sont pas mutuellement indépendantes}}$

16) **Erreur d'énoncé** : il faut que la liste s soit strictement croissante (par exemple si $k = 3$ et $s = (1, 1, 1)$ alors $P(A^s) = 1 \neq \frac{1}{6}$).

Soient donc $k \in \{1, \ldots, n\}$ et $s = (s_1, \ldots, s_k)$ telle que $s_1 < \cdots < s_k$.

Posons $\mathcal{S}_{n,s}$ l'ensemble des permutations $\sigma \in S_n$, telle que $\sigma(s_1) < \cdots < \sigma(s_k)$.

Montrons que $A^s = (B \in \mathcal{S}_{n,s})$:

$\omega \in A^s \iff B(\omega)(s_1) < B(\omega)(s_2) < \cdots B(\omega)(s_k) \iff B(\omega) \in \mathcal{S}_{n,s} \iff \omega \in (B \in \mathcal{S}_{n,s})$

Puisque B suit une loi uniforme, on a :$P(A^s) = P(B \in \mathcal{S}_{n,s}) = \dfrac{|\mathcal{S}_{n,s}|}{|S_n|}$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & s_1 & \cdots & s_2 & \cdots & s_k & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(s_1) & \cdots & \sigma(s_2) & \cdots & \sigma(s_k) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Pour déterminer une permutation de $\mathcal{S}_{n,s}$, on commence par choisir les k images de $s_1, \ldots, s_k$: $s'_1, \ldots, s'_k$. Cela revient donc à choisir une suite strictement croissante $1 \leqslant s'_1 < \ldots < s'_k \leqslant n$. Ce nombre de possibilités est $\dbinom{n}{k}$. Il reste ensuite $n - k$ éléments (ce sont les éléments de l'ensemble : $\{1, \ldots, n\} - \{s'_1, \ldots, s'_k\}$) à placer sur la deuxième ligne de σ : il y a donc $(n-k)!$ possibilités de les placer.

On en déduit que $|\mathcal{S}_{n,s}| = \dbinom{n}{k}(n-k)!$ Conclusion: $\boxed{P(A^s) = \dfrac{|\mathcal{S}_{n,s}|}{|S_n|} = \dfrac{\binom{n}{k}(n-k)!}{n!} = \dfrac{1}{k!}}$

17) • Posons $\mathcal{C}_{n,\ell}$ l'ensemble des permutations $\sigma \in S_n$, telle que la plus longue liste croissante extraite de $(\sigma(1), \ldots, \sigma(n))$ soit de longueur ℓ.

Posons $\mathcal{D}_{n,\ell}$ l'ensemble des permutations $\sigma \in S_n$, telle que la plus longue liste décroissante extraite de $(\sigma(1), \ldots, \sigma(n))$ soit de longueur ℓ.

Montrons que $\mathcal{C}_{n,\ell}$ et $\mathcal{D}_{n,\ell}$ ont même cardinaux. Pour cela considérons l'application Φ de S_n dans

S_n qui à une permutation σ associe la permutation σ' définie par $\sigma'(k) = n+1-\sigma(k)$. Il est clair que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $n+1-\sigma(k) \in \{1, \dots, n\}$ et que si $\Phi(\sigma_1) = \Phi(\sigma_2)$ alors $\sigma_1 = \sigma_2$. On en déduit que Φ est injective et comme S_n est de cardinal fini, Φ est bijective.

Enfin si $\sigma \in S_n$ et σ possède une liste croissante extraite de $(\sigma(1), \dots, \sigma(n))$ de longueur ℓ, alors $\Phi(\sigma) \in S_n$ et $\Phi(\sigma)$ possède une liste décroissante extraite de $(\sigma(1), \dots, \sigma(n))$ de longueur ℓ. On déduit que $\Phi(\mathcal{C}_{n,\ell}) = \mathcal{D}_{n,\ell}$ et donc que $\mathcal{C}_{n,\ell}$ et $\mathcal{D}_{n,\ell}$ ont même cardinaux.

On a donc $P(B \in \mathcal{C}_{n,\ell}) = \dfrac{|\mathcal{C}_{n,\ell}|}{n!} = \dfrac{|\mathcal{D}_{n,\ell}|}{n!} = P(B \in \mathcal{D}_{n,\ell})$.

D'autre part , par double inclusion, on a : $(C_n = \ell) = (B \in \mathcal{C}_{n,\ell})$ et $(D_n = \ell) = (B \in \mathcal{D}_{n,\ell})$.

Conclusion: $\boxed{\forall \ell \in \{1, \dots, n\} : P(C_n = \ell) = P(D_n = \ell) \text{ et donc } C_n \text{ et } D_n \text{ ont même loi}}$

• Il existe un entier $p \geqslant 1$ tel que $p^2 + 1 \leqslant n < (p+1)^2 + 1 \quad (p = \lfloor \sqrt{n-1} \rfloor)$.

On appliquant le **14)** à la suite formée par les p^2+1 premiers éléments, on a $C_n \geqslant p+1$ ou $D_n \geqslant p+1$. On a donc $C_n + D_n \geqslant p+1+1$ (puisque l'une des deux valeurs est supérieure à $p+1$ et l'autre est supérieure à 1), ce qui donne $E(C_n + D_n) = E(C_n) + E(D_n) \geqslant p+2$

D'une part $p+2-\sqrt{n} = \dfrac{(p+2)^2 - n}{p+2+\sqrt{n}} \geqslant \dfrac{(p+1)^2 + 1 + 2(p+1) - n}{p+2+\sqrt{n}} > 0$ d'où $p+2 \geqslant \sqrt{n}$.

D'autre part C_n et D_n ont la même loi, donc $E(C_n) = E(D_n)$.

On a donc $2E(C_n) \geqslant p+2 > \sqrt{n}$. Conclusion: $\boxed{E(C_n) \geqslant \dfrac{\sqrt{n}}{2}}$

18) On a $(C_n \geqslant k) \subset \displaystyle\bigcup_{s \in T} A^s$ où T est l'ensemble des suites strictement croissantes de $\{1, \dots, n\}$ et de longueur k.

Appliquons l'inégalité de Boole : $P(C_n \geqslant k) \leqslant P\Big(\displaystyle\bigcup_{s\in T} A^s\Big) \leqslant \sum_{s\in T} P\Big(A^s\Big) = \sum_{s \in T} \frac{1}{k!}$ et comme $|T| = \dbinom{n}{k}$, on a l'inégalité demandée. Conclusion: $\boxed{P(C_n \geqslant k) \leqslant \dfrac{\binom{n}{k}}{k!}}$

19) • Posons $i = \lfloor -\alpha e \sqrt{n} \rfloor$, on a $i \leqslant -\alpha e\sqrt{n} \leqslant i+1$ donc $-i-1 < \alpha e \sqrt{n} \leqslant -i$. Posons $k = -i$, on a donc $k-1 < \alpha e\sqrt{n} \leqslant k$ et comme $\alpha e \sqrt{n} > 1$, $-\alpha e\sqrt{n} < 1$ et donc $i \leqslant -2$

Conclusion: $\boxed{k-1 < \alpha e \sqrt{n} \leqslant k \text{ avec } k \in \mathbb{N}^*}$

• On a $(C_n \geqslant \alpha e \sqrt{n}) \subset (C_n > k-1) = (C_n \geqslant k)$ car C_n est à valeurs entières.

On a donc $P(C_n \geqslant \alpha e\sqrt{n}) \leqslant \dfrac{\binom{n}{k}}{k!} \leqslant \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!^2} \leqslant \dfrac{n^k}{k!^2} \leqslant n^k\Big((\frac{e}{k})^k\Big)^2 = \Big(\dfrac{e\sqrt{n}}{k}\Big)^{2k}$

On en déduit donc que $P(C_n \geqslant \alpha e \sqrt{n}) \leqslant \Big(\dfrac{1}{\alpha}\Big)^{2k} \leqslant \Big(\dfrac{1}{\alpha}\Big)^{2\alpha e\sqrt{n}}$ car $2k \geqslant 2\alpha e\sqrt{n}$ et $\dfrac{1}{\alpha} < 1$.

Conclusion: $\boxed{P(C_n \geqslant \alpha e\sqrt{n}) \leqslant \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2\alpha e\sqrt{n}}}$

20) • Utilisons le **1)** avec le k du **19)** avec $\alpha = 1 + \dfrac{1}{n^{1/4}} > 1$: $E(C_n) \leqslant k - 1 + nP(X \geqslant k)$.

On a vu au **19)** que $P(X \geqslant k) = P(C_n \geqslant \alpha e\sqrt{n}) \leqslant \left(\dfrac{1}{\alpha}\right)^{2\alpha e\sqrt{n}}$ et $k - 1 < \alpha e\sqrt{n}$.

On a donc $\dfrac{E(C_n)}{\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{\alpha e\sqrt{n}}{\sqrt{n}} + \sqrt{n}\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)^{2\alpha e\sqrt{n}} = (1 + \dfrac{1}{n^{1/4}})e + \sqrt{n}\left(\dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{n^{1/4}}}\right)^{2(1+\frac{1}{n^{1/4}})\sqrt{n}}$

Posons $\varepsilon_n = \sqrt{n}\left(\dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{n^{1/4}}}\right)^{2(1+\frac{1}{n^{1/4}})\sqrt{n}}$

$\ln(\varepsilon_n) = \dfrac{1}{2}\ln n - 2(1 + \dfrac{1}{n^{1/4}})\sqrt{n}\ln(1 + \dfrac{1}{n^{1/4}})$

Or $2(1 + \dfrac{1}{n^{1/4}})\sqrt{n}\ln(1 + \dfrac{1}{n^{1/4}}) \sim \dfrac{2}{n^{1/4}}$ donc par croissance comparée, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(\varepsilon_n) = -\infty$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$. Conclusion: $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* : \dfrac{E(C_n)}{\sqrt{n}} \leqslant (1 + \dfrac{1}{n^{1/4}})e + \varepsilon_n \text{ avec } \lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0}$

• On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^* : 0 \leqslant \dfrac{E(C_n)}{\sqrt{n}} \leqslant 2e + M$ où M est un majorant de la suite (ε_n) qui converge vers 0. La suite $\left(\dfrac{E(C_n)}{\sqrt{n}}\right)$ est donc bornée.

Enfin $\lim\limits_{n\to+\infty} \left((1 + \dfrac{1}{n^{1/4}})e + \varepsilon_n\right) = e$.

On conclut avec le **5)** et **6)**. Conclusion: $\boxed{\overline{\lim\limits_{m\to+\infty}} \dfrac{E(C_n)}{\sqrt{n}} \text{ existe et } \overline{\lim\limits_{m\to+\infty}} \dfrac{E(C_n)}{\sqrt{n}} \leqslant e}$

FIN

CORRIGÉ

Exercice I

I.1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une solution de (E) définie sur un intervalle dont l'intérieur contient 0. Supposons qu'il existe un réel $r > 0$ et une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ de rayon de convergence supérieur ou égal à r tels que

$$\forall x \in \left]-r,r\right[, \quad x \in I \quad \text{et} \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Par dérivation de la somme d'une série entière, pour tout $x \in \left]-r,r\right[$,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{et} \quad f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

Pour tout $x \in \left]-r,r\right[$, nous avons donc

$$\begin{cases} x^2 f''(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n \\ x^2 f'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n \\ x f'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n. \end{cases}$$

Comme f est solution de (E), il vient, pour tout $x \in \left]-r,r\right[$,

$$2\,a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \big((n^2 - 2n + 2)\, a_n + (n-1)\, a_{n-1}\big) x^n = 0.$$

Par unicité du développement en série entière, on en déduit les relations

$$2\,a_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \ (n^2 - 2n + 2)\, a_n + (n-1)\, a_{n-1} = 0.$$

Comme $n^2 - 2n + 2 = (n-1)^2 + 1 \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la deuxième relation se récrit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = -\frac{n}{n^2+1}\, a_n,$$

et une récurrence immédiate montre alors que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite nulle. Par conséquent , $\forall x \in \left]-r,r\right[, \ f(x) = 0$.

Montrons ensuite que f est identiquement nulle. Posons $I_+ := I \cap \mathbb{R}_+^*$, qui est un intervalle de $\mathbb{R}$. La fonction f est alors solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + \left(1 - \frac{1}{x}\right) y' + \frac{2}{x^2}\, y = 0 \\ y(r/2) = y'(r/2) = 0, \end{cases}$$

et ce dernier possède une unique solution sur I_+, car les fonctions coefficients $x \mapsto 1 - \dfrac{1}{x}$ et $x \mapsto \dfrac{2}{x^2}$ sont continues. Comme la fonction nulle en est aussi une solution, f est nulle sur I_+. On montre de même que f est nulle sur $I \cap \mathbb{R}_-^*$. Comme $f(0) = 0$, on conclut que $f = 0$.

En conclusion, aucune solution non nulle de (E) n'est développable en série entière autour de 0.

Exercice II

II.1. Pour $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, posons $u_{i,j} = \dfrac{i+j}{2^{i+j}}$.

Appliquons le théorème de sommation par paquets pour établir la sommabilité de $(u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ et calculer sa somme.

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $I_n := \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \;:\; i + j = n\}$. La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réalise une partition de $\mathbb{N}^2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la partie I_n est finie et

$$\sum_{(i,j)\in I_n} u_{i,j} = \sum_{i=0}^{n} \frac{n}{2^n} = \frac{n(n+1)}{2^n}.$$

D'après le cours, nous avons, par dérivation à l'ordre 2 du développement en série entière

$$\forall x \in \left]-1,1\right[, \qquad \frac{1}{1-x} = \sum\nolimits_{n=0}^{+\infty} x^n,$$

le développement

$$\forall x \in \left]-1,1\right[, \qquad \frac{2}{(1-x)^3} = \sum\nolimits_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)x^n.$$

En l'appliquant en $x = \dfrac{1}{2}$ et en multipliant par $\dfrac{1}{2}$, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+2)(n+1)}{2^{n+1}} = 8,$$

ce qui donne

$$8 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)n}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)n}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{(i,j)\in I_n} u_{i,j}.$$

Comme u est à termes positifs, le théorème de sommation par paquets montre qu'elle est sommable et que

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} u_{i,j} = 8.$$

II.2.a. Il s'agit de vérifier que $v := \left(\frac{i+j}{2^{i+j+3}}\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est une famille sommable de réels positifs de somme 1, ce qui découle immédiatement de la question précédente puisque $v = \frac{u}{8}$ avec les notations de cette dernière.

II.2.b. Avec la notation précédente, on a, pour tout $i \in \mathbb{N}$, par σ-additivité,

$$\mathbf{P}(X = i) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = i, Y = j) = \sum_{j=0}^{+\infty} v_{i,j}$$

et de même

$$\mathbf{P}(Y = i) = \sum_{j=0}^{+\infty} v_{j,i}.$$

Par symétrie de v, il vient $\mathbf{P}(X = i) = \mathbf{P}(Y = i)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Puisque X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, cela montre que $X \sim Y$.

II.2.c. Notons $a_i := \mathbf{P}(X = i)$ pour $i \in \mathbb{N}$. Supposons X et Y indépendantes. On aurait alors, d'après la question précédente,

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ a_i a_j = \frac{i+j}{2^{i+j}}.$$

et en particulier $a_0^2 = 0$, donc $a_0 = 0$. Mais alors, $0 = a_0\, a_1 = \frac{1}{2}$, ce qui est absurde. Ainsi, X et Y ne sont pas indépendantes.

Problème : Fonction Digamma

Partie préliminaire

III.1.a. La fonction $h : t \mapsto e^{-t}\, t^{x-1}$ est évidemment continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Par croissances comparées, $t^{x+1}e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc $h(t) = o(t^{-2})$ au voisinage de $+\infty$. Donc, h est intégrable au voisinage de $+\infty$.
- De manière immédiate

$$h(t) \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1}$$

avec $x - 1 > -1$, donc h est intégrable au voisinage de 0^+.

Ainsi, h est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

III.1.b. Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto e^{-t}\, t^{x-1}$ est continue, positive et non identiquement nulle sur $\mathbb{R}_+^*$, si bien que $\Gamma(x) > 0$.

III.1.c. Appliquons le théorème de dérivation sous l'intégrale en posant

$$f : (x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \mapsto t^{x-1}e^{-t}.$$

D'abord, fixons $x > 0$ et remarquons que la fonction

$$g_x : t \mapsto (\ln t)\, t^{x-1}e^{-t}$$

est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. En effet, elle est clairement continue (par morceaux) et :

- par croissances comparées, au voisinage de $+\infty$,

$$g_x(t) = o(t^{-2}),$$

ce qui montre que g_x est intégrable au voisinage de $+\infty$;

- en choisissant un $y \in]0,x[$ (par exemple $x/2$), on a par croissances comparées, au voisinage de 0,

$$\begin{aligned} g_x(t) &\sim (\ln t)\, t^{x-1} \\ &= o(t^{y-1}), \end{aligned}$$

et g_x est donc intégrable au voisinage de 0^+.

Ensuite :

- pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $f(-,t)$ est clairement de classe $\mathcal{C}^1$ et de dérivée $x \mapsto g_x(t)$;

- pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, les fonctions $f(x,-)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,-) = g_x$ sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$, et la première y est intégrable, d'après **III.1.a** ;

- fixons a et b dans $\mathbb{R}_+^*$ tels que $a < b$. Comme $z \mapsto t^{z-1}$ est monotone sur $\mathbb{R}_+^*$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a la domination locale

$$\forall x \in [a,b],\ \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \Big| \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \Big| = |g_x(t)| \leqslant |g_a(t)| + |g_b(t)|,$$

et la fonction $|g_a| + |g_b|$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, d'après ce qui précède.

Ainsi, par dérivation sous l'intégrale, la fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\forall x > 0, \quad \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)\, t^{x-1}e^{-t}\, \mathrm{d}t.$$

III.2.a. Le théorème de comparaison série-intégrale s'applique à la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$, car elle est continue par morceaux, positive et décroissante sur $[1, +\infty[$: la série $\sum\limits_{n \geqslant 2} u_n$ est donc convergente.

III.2.b. Pour tout $n \geqslant 2$, on trouve par la relation de Chasles

$$\sum_{k=2}^{n} u_k = \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 - H_n,$$

et donc

$$H_n = 1 - \sum_{k=2}^{n} u_k.$$

La convergence de la série $\sum_{k \geqslant 2} u_k$ assure donc celle de la suite $(H_n)_{n \geqslant 1}$.

Expression de la fonction Digamma à l'aide d'une série

III.3.a. La fonction ln est concave puisque dérivable et de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$ décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Par comparaison avec la tangente au point d'abscisse 1, il vient donc

$$\forall u \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(u) \leqslant \ln'(1)(u-1) + \ln(1) = u - 1,$$

et donc

$$\forall x \in \left]-\infty, 1\right[,\ \ln(1-x) \leqslant -x.$$

Soit $n \geqslant 1$, $x \in \left]0, +\infty\right[$ et $t \in \left]0, +\infty\right[$.

- Si $t < n$, alors $f_n(t) = t^{x-1} \exp\Big(n \ln\Big(1 - \frac{t}{n}\Big)\Big)$, et l'inégalité précédente appliquée à $\frac{t}{n}$ donne $n \ln\Big(1 - \frac{t}{n}\Big) \leqslant -t$, puis, par croissance et positivité de l'exponentielle, et positivité de t^{x-1},

$$0 \leqslant f_n(t) \leqslant t^{x-1} e^{-t}.$$

- Si $t \geqslant n$, alors $f_n(t) = 0$ (y compris si $t = n$), et l'inégalité voulue est immédiate.

Ainsi, dans tous les cas,

$$0 \leqslant f_n(t) \leqslant t^{x-1} e^{-t}.$$

III.3.b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. En effet :

- elle est continue en tout point de $\left]n, +\infty\right[$ et continue à droite en n, car nulle sur $\left[n, +\infty\right[$;
- elle est continue en tout point de $\left]0, n\right[$ et continue à gauche en n car elle coïncide sur $\left]0, n\right]$ avec la fonction continue $t \mapsto \Big(1 - \frac{t}{n}\Big)^n t^{x-1}$.

Soit $t > 0$. À partir d'un certain rang, on a $n > t$, donc

$$f_n(t) = t^{x-1} \exp\Big(n \ln\Big(1 - \frac{t}{n}\Big)\Big),$$

et, par ailleurs, $-\frac{t}{n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, donc

$$n\,\ln\Big(1-\frac{t}{n}\Big) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\,\frac{-t}{n} = -t$$
$$\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -t.$$

Ainsi, par continuité de l'exponentielle,

$$f_n(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} t^{x-1}e^{-t}.$$

Enfin, la fonction dominante $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et l'hypothèse de domination a été établie en **III.3.a.** Par le théorème de convergence dominée, on trouve donc

$$\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t = \Gamma(x).$$

Comme f_n est nulle sur $]n,+\infty[$, cela se récrit

$$\int_0^{n} \Big(1-\frac{t}{n}\Big)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t = \Gamma(x).$$

III.4.a. Fixons $x \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $u \mapsto (1-u)^n u^{x-1}$ est continue sur $]0,1]$ et $(1-u)^n u^{x-1} \sim u^{x-1}$ au voisinage de 0, avec $x-1 > -1$. Elle est donc intégrable sur $]0,1]$, si bien que $I_n(x)$ est définie.

Supposons maintenant $n > 0$. Intégrons par parties, en dérivant la fonction $u \mapsto (1-u)^n$ (de classe $\mathcal{C}^1$), et en intégrant $u \mapsto u^{x-1}$ en $u \mapsto \frac{u^x}{x}$ (de classe $\mathcal{C}^1$). Il vient

$$I_n(x) = \big[(1-u)^n x^{-1} u^x\big]_{u=0}^{u=1} + \int_0^1 \frac{n}{x}\,(1-u)^{n-1}\,u^x\,\mathrm{d}u,$$

la formule étant justifiée par l'existence de $I_n(x)$ et celle de l'intégrale du membre de droite, qui découle de l'existence de $I_{n-1}(x+1)$ (car $n-1 \geqslant 0$ et $x+1>0$). Comme $x>0$ et $n>0$, la fonction $u \mapsto (1-u)^n x^{-1} u^x$ est de limite nulle en 0 et 1, et donc

$$I_n(x) = \frac{n}{x}\,I_{n-1}(x+1).$$

III.4.b. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$. En utilisant la relation précédente, on obtient par itérations

$$I_n(x) = \frac{n\,(n-1)\times\cdots\times 1}{x\,(x+1)\times\cdots\times(x+n-1)}\,I_0(x+n) = \frac{n!}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(x+k)}\,I_0(x+n).$$

Or, pour tout $y > 0$, on a immédiatement

$$I_0(y) = \int_0^1 t^{y-1}\,\mathrm{d}t = \left[y^{-1}\,t^y\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{y}.$$

Ainsi,

$$I_n(x) = \frac{n!}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(x+k)}.$$

III.4.c. Soit $n > 0$. Le changement de variable affine $t = nu$ donne

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (1-u)^n (nu)^{x-1}\, n\,\mathrm{d}u = n^x I_n(x).$$

En combinant **III.4.b** avec **III.3.b**, il vient

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!\,n^x}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(x+k)}.$$

III.5. Soit $n \geqslant 1$ et $x \in\,]0, +\infty[$. De $-\ln n = H_n - \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, on tire

$$\frac{1}{n^x} = e^{-x\ln n} = e^{xH_n}\prod_{k=1}^{n} e^{-\frac{x}{k}}.$$

On en déduit

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}} = \frac{e^{-xH_n}}{n^x}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right).$$

Comme $\Gamma(x) \neq 0$, la formule de Gauss donne, après isolation du terme de rang 0 du produit,

$$x\,\frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(x+k)}{n^x\displaystyle\prod_{k=1}^{n}k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\Gamma(x)}$$

puis

$$\frac{x}{n^x}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\Gamma(x)}.$$

Comme $(H_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers γ, on en déduit par continuité de l'exponentielle,

$$x\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{e^{-\gamma x}}{\Gamma(x)},$$

ce qui se récrit

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x} \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \Big(1+\frac{x}{k}\Big)e^{-\frac{x}{k}}.$$

III.6.a. Soit $x \in \,]0,+\infty[$. Nous avons la convergence de la suite de terme général $\prod_{k=1}^{n}\Big(1+\frac{x}{k}\Big)e^{-\frac{x}{k}}$ (strictement positif) vers le réel strictement positif $\dfrac{1}{x\,e^{\gamma x}\,\Gamma(x)}$, donc par continuité du logarithme

$$\ln\Big(\prod_{k=1}^{n}\Big(1+\frac{x}{k}\Big)e^{-\frac{x}{k}}\Big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln\Big(\frac{1}{x\,e^{\gamma x}\,\Gamma(x)}\Big),$$

soit

$$\sum_{k=1}^{n}\Big[\ln\Big(1+\frac{x}{k}\Big)-\frac{x}{k}\Big] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\ln x-\gamma x-\ln\Gamma(x).$$

Autrement dit, la série de fonctions $\sum_{k\geqslant 1}\Big[\ln\Big(1+\frac{x}{k}\Big)-\frac{x}{k}\Big]$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa somme est la fonction $x \mapsto -\ln x-\gamma x-\ln\Gamma(x)$.

III.6.b. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, posons $g_k : x \in \,]0,+\infty[\, \longmapsto \ln\Big(1+\frac{x}{k}\Big)-\frac{x}{k}$, qui est évidemment une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et de dérivée

$$g_k' : x \mapsto \frac{1}{k+x}-\frac{1}{k} = -\frac{x}{k(k+x)}.$$

On a immédiatement, pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\forall x \in \,]0,a]\,,\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\quad |g_k'(x)| \leqslant \frac{a}{k^2},$$

et la série de terme général $\sum_{k\geqslant 1}\dfrac{a}{k^2}$ est convergente. Par suite, $\sum g_k'$ converge normalement — donc uniformément — sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.

Par dérivation terme à terme, g est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\forall x>0,\quad g'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} g_k'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty}\Big(\frac{1}{k+x}-\frac{1}{k}\Big).$$

III.6.c. Comme Γ est dérivable, l'expression trouvée en **III.6.a**, combinée avec **III.6.b**, donne, pour tout $x>0$,

$$-\frac{1}{x}-\gamma-\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \sum_{k=1}^{+\infty}\Big(\frac{1}{k+x}-\frac{1}{k}\Big),$$

et donc

$$\psi(x) = -\frac{1}{x}-\gamma+\sum_{k=1}^{+\infty}\Big(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+x}\Big).$$

III.7.a. La formule trouvée en **III.6.c** donne

$$\psi(1) = -1 - \gamma + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right).$$

Par sommation d'une série téléscopique, on a par ailleurs

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \lim_{k \to +\infty} \frac{1}{k} = 1.$$

Ainsi,

$$\psi(1) = -\gamma.$$

Or,

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1.$$

Par retour à la définition de la fonction ψ, il vient $\Gamma'(1) = -\gamma$. Compte tenu de **III.1.c**, on en déduit

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t)\, dt = -\gamma.$$

III.7.b. Soit $x > 0$. La formule de **III.6.c** donne

$$\begin{aligned}\psi(x+1) - \psi(x) &= -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k+x} - \frac{1}{k+x+1}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{k+x} - \frac{1}{k+x+1}\right).\end{aligned}$$

Par sommation d'une série téléscopique, on en déduit, comme à la question précédente, que

$$\psi(x+1) - \psi(x) = \frac{1}{x}.$$

Puis, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\psi(n) - \psi(1) = \sum_{k=1}^{n-1} \psi(k+1) - \psi(k) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k},$$

d'où, en utilisant **III.7.a**,

$$\psi(n) = -\gamma + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

III.7.c. On considère que x est fixé une bonne fois pour toutes dans $]0, +\infty[$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $y > 0$, on a

$$j_k(y) = \frac{x-1}{(k+y+1)(k+y+x)}$$

et donc

$$|j_k(y)| \leqslant \frac{|x-1|}{(k+1)(k+x)}.$$

Enfin, la série $\sum\limits_{k \geqslant 0} \dfrac{|x-1|}{(k+1)(k+x)}$ a un terme général équivalent à $\dfrac{|x-1|}{k^2}$, et elle est donc absolument convergente. Ainsi, $\sum\limits_{k \geqslant 0} j_k$ converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}_+^*$.

Or, $j_k(y) \underset{y \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ pour tout $k \geqslant 0$. Donc, par interversion limite-somme,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} j_k(n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{+\infty} 0 = 0.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on déduit de **III.6.c** que

$$\begin{aligned}\psi(x+n) - \psi(1+n) &= -\frac{1}{x+n} + \frac{1}{1+n} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k+1+n} - \frac{1}{k+x+n} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} j_k(n),\end{aligned}$$

et donc

$$\psi(x+n) - \psi(1+n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

III.8. D'après **III.7.a**, **III.7.b** et **III.7.c**, la fonction ψ vérifie les trois conditions souhaitées. Réciproquement, soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ vérifiant ces conditions. Posons $g := f - \psi$.

- Grâce à la première condition, $g(1) = 0$.
- La deuxième condition donne $\forall x > 0,\ g(x+1) = g(x)$. Il vient alors que, pour tout $x > 0$, la suite $\big(g(x+n)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante de valeur $g(x)$. En particulier, $\forall n \geqslant 1,\ g(n) = 0$.
- Fixons $x > 0$. La troisième condition donne que pour tout $x > 0$ la suite $\big(g(x+n) - g(1+n)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0. Or, nous venons de voir que cette suite est constante de valeur $g(x)$. Ainsi, $g(x) = 0$.

Finalement, $g = 0$, donc $f = \psi$. Ainsi, ψ est l'unique solution du problème proposé.

III.9.a. La variable X suit la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$, et ainsi

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} k\,P(X=k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n}\,\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

III.9.b. Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Si la i^{e} boule est sortie au premier tirage, alors l'urne contient, au moment du deuxième tirage, $i+1$ boules de numéro i, et une boule de numéro k pour tout $k \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}$. Puisque l'événement $(X=i)$ est de probabilité non nulle, cela s'écrit :

$$\forall (i,k) \in [\![1,n]\!]^2,\ P(Y=k \mid X=i) = \begin{cases} \dfrac{i+1}{n+i} & \text{si } k=i \\ \dfrac{1}{n+i} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Fixons $k \in [\![1,n]\!]$. La famille $\big((X=i)\big)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est un système complet d'événements non négligeables, et la formule des probabilités totales donne donc

$$\begin{aligned} P(Y=k) &= \sum_{i=1}^{n} P(Y=k \mid X=i)\,P(X=i) \\ &= \frac{k+1}{n(n+k)} + \frac{1}{n}\sum_{i\in[\![1,n]\!]\setminus\{k\}} \frac{1}{n+i} \\ &= \frac{k}{n(n+k)} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, la formule de **III.7.b** donne, par soustraction,

$$\psi(2n+1) - \psi(n+1) = \sum_{j=n+1}^{2n} \frac{1}{j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i},$$

et donc

$$P(Y=k) = \frac{1}{n}\Big(\psi(2n+1) - \psi(n+1) + \frac{k}{n+k}\Big).$$

Comme Y est à valeurs dans $[\![1,n]\!]$, cela suffit à décrire sa loi.

III.9.c. Par retour à la définition,

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{k=1}^{n} k\,P(Y=k) \\ &= \frac{\psi(2n+1)-\psi(n+1)}{n}\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n(n+k)} \\ &= \frac{\psi(2n+1)-\psi(n+1)}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1-n}{2} \\ &\qquad + n\big(\psi(2n+1)-\psi(n+1)\big). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$E(Y) = \frac{3n+1}{2}\big(\psi(2n+1)-\psi(n+1)\big) + \frac{1-n}{2}.$$

COMMENTAIRES

Il fallait lire très précisément l'énoncé de l'exercice **I** : il ne s'agissait pas simplement de déterminer s'il existe une somme de série entière qui est solution non nulle de (E) !

En **II.1**, il était aussi possible d'étudier la sommabilité de $\left(\dfrac{i}{2^{i+j}}\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ à l'aide de deux sommations successives de séries. Par ailleurs, la question **II.2.a** permettait de contrôler la validité du résultat obtenu en **II.1**.

On établissait en **III.8** une caractérisation de la fonction Digamma. Il en existe une autre qui en découle sans effort surhumain et s'énonce comme suit : la fonction Digamma est l'unique fonction convexe f de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la condition initiale $f(1) = -\gamma$ et l'équation fonctionnelle

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x+1) - f(x) = \frac{1}{x}.$$

Notons que la convexité de Digamma peut se déduire facilement de l'expression obtenue en **III.6.c**, par retour à la définition de la convexité et utilisation de celle de $u \mapsto 1/u$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

L'énoncé contenait une erreur, facilement détectable, à la question **III.9.b** : il fallait, dans la formule finale, prendre k dans $[\![1,n]\!]$ et non dans $\mathbb{N}^*$.

La formule admise en **III.9.c** peut être établie à l'aide d'une décomposition en éléments simples de la fraction $\dfrac{X^2}{n(n+X)}$ (ici, la division euclidienne de X^2 par $n(n+X)$ donne immédiatement cette décomposition).

THÉORÈMES UTILISÉS

- **Théorème 19, p. 284.** Théorème de dérivation des séries entières
- **Théorème 11, p. 282.** Théorème de sommation par paquets
- **Théorème 25, p. 286.** Théorème de dérivation sous l'intégrale (à l'ordre k)
- **Théorème 20, p. 284.** Théorème de comparaison série-intégrale
- **Théorème 22, p. 285.** Théorème de convergence dominée
- **Théorème 18, p. 284.** Théorème de dérivation terme à terme
- **Théorème 14, p. 283.** Théorème d'interversion des limites, version somme d'une série de fonctions

CENTRALE MP 1988 PREMIERE EPREUVE

Eléments de correction

Partie I

1. Dans cette question $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désignent deux suites de nombres réels telles que les séries entières $\sum a_n\, x^n$ et $\sum b_n\, x^n$ aient un rayon de convergence infini. On note

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n \qquad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\, x^n$$

On suppose de plus que a_n est strictement positif à partir d'un certain rang.

(a) On suppose b_n négligeable devant a_n quand n tend vers $+\infty$.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un entier naturel N tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Longrightarrow \left(a_n > 0 \ et\ |b_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} a_n\right)$$

On fixe un tel entier naturel N dans ce qui suit. Soit x un réel positif ou nul. On a

$$|g(x)| \leqslant \sum_{n=0}^{N} |b_n|\, x^n + \sum_{n=N+1}^{+\infty} |b_n|\, x^n \leqslant \sum_{n=0}^{N} |b_n|\, x^n + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n\, x^n$$

ou encore

$$|g(x)| \leqslant \sum_{n=0}^{N} |b_n|\, x^n + \frac{\varepsilon}{2} \left(f(x) - \sum_{n=0}^{N} a_n\, x^n \right)$$

Notant $P = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \left(|b_n| - \frac{\varepsilon}{2} a_n\right) X^n$ (P est un polynôme de degré inférieur ou égal à N), ceci s'écrit aussi

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ |g(x)| \leqslant P(x) + \frac{\varepsilon}{2} f(x)$$

Ayant $\dfrac{P(x)}{x^{N+1}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il existe un réel A strictement positif, que l'on fixe désormais, tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x \geqslant A \Longrightarrow P(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{4} a_{N+1} x^{N+1}$$

On a en outre

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ a_{N+1} x^{N+1} \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n\, x^n \leqslant f(x) + \sum_{n=0}^{N} |a_n|\, x^n$$

(puisque $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n\, x^n = f(x) - \sum_{n=0}^{N} a_n\, x^n$).
De même il existe un réel B strictement positif, que l'on fixe désormais, tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x \geqslant B \Longrightarrow \sum_{n=0}^{N} |a_n|\, x^n \leqslant \frac{1}{2} a_{N+1} x^{N+1}$$

et ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x \geqslant B \Longrightarrow a_{N+1} x^{N+1} \leqslant f(x) + \frac{1}{2} a_{N+1} x^{N+1}$$

c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x \geqslant B \Longrightarrow a_{N+1} x^{N+1} \leqslant 2\, f(x)$$

Par conséquent on peut écrire

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x \geqslant \max(A,B) \Longrightarrow P(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} f(x)$$

puis

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x \geqslant \max(A,B) \Longrightarrow |g(x)| \leqslant \varepsilon f(x)$$

En conclusion g est négligeable devant f au voisinage de $+\infty$.

(b) Par définition si on suppose $a_n \sim b_n$ cela s'écrit $a_n - b_n = o(a_n)$ et selon la question précédente $f - g$ est négligeable devant f au voisinage de $+\infty$: dans ce cas on a $f \underset{+\infty}{\sim} g$.

2. (a) Soit t un nombre réel. Posons : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \dfrac{n^t}{n!}$. On a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n > 0$, et comme $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, la règle de d'Alembert assure que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} n^t \dfrac{x^n}{n!}$ est infini : sa somme est donc définie sur $\mathbb{R}$.

(b) On considère la fonction Φ définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2,\ \Phi(x,t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^t \frac{x^n}{n!}$.

Pour montrer la continuité de Φ sur $\mathbb{R}^2$ justifions la convergence uniforme (en fait normale) de la série de fonctions dont elle est la somme sur tout compact de $\mathbb{R}^2$.

Soit donc C un compact de $\mathbb{R}^2$.

Il existe un réel A strictement positif tel que $C \subset [-A,+A]^2$: fixons un tel réel A.

Pour tout entier naturel n non nul considérons la fonction u_n définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2,\ u_n(x,t) = n^t \frac{x^n}{n!}$$

Tout d'abord pour tout entier naturel non nul n la fonction u_n est continue sur $\mathbb{R}^2$.

La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement sur C puisque

$$\forall (x,t) \in C,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ |u_n(x,t)| \leqslant n^A \frac{A^n}{n!}$$

et la série $\sum n^A \dfrac{A^n}{n!}$ est convergente (selon la règle de d'Alembert par exemple).

Ceci étant valable pour tout compact C de $\mathbb{R}^2$, on sait alors que la somme de cette série de fonctions, à savoir Φ, est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Soit $t \in \mathbb{R}$: la série entière $\sum_{n\geqslant 1} n^t \dfrac{x^n}{n!}$ ayant un rayon de convergence infini, sa somme est notamment dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée s'obtient par dérivation terme à terme :

$\forall x \in \mathbb{R},\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\partial u_n}{\partial x}(x,t)$, avec

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{\partial u_n}{\partial x}(x,t) = n^{t+1} \frac{x^{n-1}}{n!}$$

et, attention !, on sait alors seulement que $\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}$ est une fonction partiellement continue par rapport à la première variable.

Soit $x \in \mathbb{R}$. La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} n^t \dfrac{x^n}{n!}$ (fonction de t) n'est pas une série entière : il est nécessaire de justifier la dérivabilité de la somme, c'est-à-dire l'existence de $\dfrac{\partial \Phi}{\partial t}$.

On a (x est fixé) :

- la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} u_n(x,\cdot)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$
- pour tout n, $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $t \longmapsto u_n(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$
- la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{\partial u_n}{\partial t}(x,\cdot)$ converge uniformément (car normalement) sur tout

compact de $\mathbb{R}$ (car pour tout réel A strictement positif la série $\sum \ln(n)\, n^A \dfrac{A^n}{n!}$ est convergente)

On en déduit l'existence de la dérivée partielle $\dfrac{\partial \Phi}{\partial t}$ sur $\mathbb{R}^2$, dont l'expression s'obtient par dérivation terme à terme, à savoir $\dfrac{\partial \Phi}{\partial t} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\partial u_n}{\partial t}$.

De même que pour la dérivée partielle par rapport à la première variable, ce n'est pas terminé car, avec le raisonnement précédent, le cours ne justifie que la continuité partielle de $\dfrac{\partial \Phi}{\partial t}$ par rapport à sa deuxième variable.

Il reste à prouver la continuité de $\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial \Phi}{\partial t}$ fonctions de deux variables, ce que l'on fait en adaptant pour chacune de ces deux fonctions le raisonnement qui a permis de justifier la continuité de Φ sur $\mathbb{R}^2$ (exercice).

(c) Soit $(x,t) \in \mathbb{R}^2$. Selon la question précédente $\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^{t+1} \dfrac{x^{n-1}}{n!}$ et ainsi

$$\boxed{\Phi(x,t+1) = x \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t)} \qquad (1)$$

(d) Soit t un nombre réel. On a

$$\Phi(x,t+1) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{t+1} \frac{x^n}{n!} \qquad x\,\Phi(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^t \frac{x^{n+1}}{n!} = \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)^t \frac{x^n}{(n-1)!} = \sum_{n=2}^{+\infty} n\,(n-1)^t \frac{x^n}{n!}$$

Ayant en outre

$$\frac{n^{t+1}}{n!} \sim \frac{n\,(n-1)^t}{n!} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{n^{t+1}}{n!} > 0$$

la question I 1. (b) permet d'affirmer que $\Phi(x,t+1)$ est équivalent à $x\,\Phi(x,t)$ quand x tend vers $+\infty$.

3. (a) Soit x un nombre réel. Ayant

$$\boxed{\Phi(x,0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x) - 1}$$

deux utilisations successives de la relation (1) fournissent

$$\boxed{\Phi(x,1) = x \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,0) = x \exp(x)} \qquad \boxed{\Phi(x,2) = x \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,1) = x\,(x+1)\exp(x)}$$

(b) Soit x un nombre réel. Montrons le résultat demandé par récurrence. A tout entier naturel non nul t associons le prédicat

$\mathcal{P}(t)$: il existe un polynôme unitaire de degré t, P_t, tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\Phi(x,t) = P_t(x)\, e^x$.

Selon la question précédente, $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ sont vraies.

Soit t un entier naturel supérieur ou égal à 2 tel que $\mathcal{P}(t)$ soit vraie. Montrons $\mathcal{P}(t+1)$. On a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi(x, t+1) = x\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t) = x\left(P_t(x) + P_t'(x)\right)e^x$$

et en posant $P_{t+1} = X\ (P_t + P_t')$, on définit un polynôme unitaire de degré $t+1$ vérifiant la relation voulue.

Ainsi $\mathcal{P}(t+1)$ est vraie, puis on a $\forall t \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}(t)$.

(c) Soit t un entier relatif.

D'une part si t est un entier naturel non nul, selon la question précédente, $\Phi(x,t)$ est équivalent à $x^t \exp(x)$ quand x tend vers $+\infty$, ce qui reste vrai dans le cas $t = 0$.

D'autre part, si t est strictement négatif, la question I 2. (d) permet d'écrire

$$\Phi(x,t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}\Phi(x,t+1)$$

ce qui conduit aisément (la récurrence n'est pas indispensable ici) à

$$\Phi(x,t) \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{1}{x}\right)^{-t}\Phi(x,0)$$

En conclusion : $\boxed{\forall t \in \mathbb{Z},\ \Phi(x,t) \underset{+\infty}{\sim} x^t \exp(x)}$.

Partie II

Dans cette partie, on impose les conditions $t \in [0,1]$ et $x > 0$.

1. Soit n un entier naturel non nul. La formule de Taylor avec reste intégrale appliquée à la fonction $u \longmapsto u^t$ entre les points $n+1$ et n s'écrit

$$n^t = (n+1)^t - t\ (n+1)^{t-1} + \int_{n+1}^{n} (n-u)\ t\ (t-1)\ u^{t-2}du$$

ou encore

$$(n+1)^t - n^t - t\ (n+1)^{t-1} = t\ (1-t)\int_n^{n+1}(u-n)\ u^{t-2}du$$

Ayant $t - 2 < 0$, on en déduit

$$0 \leqslant (n+1)^t - n^t - t\ (n+1)^{t-1} \leqslant t\ (1-t)\ n^{t-2}\underbrace{\int_n^{n+1}(u-n)\,du}_{=1/2}$$

et sachant que l'on a $t\ (1-t) \leqslant \dfrac{1}{4}$ on aboutit à :

$$0 \leqslant (n+1)^t - n^t - t\ (n+1)^{t-1} \leqslant \frac{t-t^2}{2}n^{t-2} \leqslant \frac{1}{8}n^{t-2} \qquad (2)$$

2. Soit n un entier naturel non nul. Considérons la fonction $f :]0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall u \in]0,1],\ f(u) = 6\ (1+2u)^{t-1} - u - 1$$

f est dérivable sur $]0,1]$ et

$$\forall u \in]0,1],\ f'(u) = 12\ (t-1)(1+2u)^{t-2} - 1$$

Ainsi $f' \leqslant 0$ et la fonction f est décroissante sur $]0,1]$. Ayant $f(1) \geqslant 0$ on en déduit $f \geqslant 0$ c'est-à-dire

$$\forall u \in]0,1],\ 1+u \leqslant 6\ (1+2u)^{t-1}$$

Remplaçant u par $\frac{1}{n}$ on obtient $\frac{n+1}{n} \leqslant 6\left(\frac{n+2}{n}\right)^{t-1}$ ou encore :

$$n^{t-2} \leqslant 6\frac{(n+2)^{t-1}}{n+1} \tag{3}$$

Le coefficient 6 ne peut pas être remplacé par une constante plus petite puisqu'il y a égalité dans le cas $t=0$ et $n=1$.

3. Soit $(x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times [0,1]$. Posons $\Delta(x,t) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t) - \left(1+\frac{t}{x}\right)\Phi(x,t)$. Les développements en série obtenus précédemment permettent d'écrire

$$\begin{aligned}\Delta(x,t) &= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)^t\frac{x^n}{n!} - \sum_{n=1}^{+\infty} n^t\frac{x^n}{n!} - t\sum_{n=1}^{+\infty} n^t\frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)^t\frac{x^n}{n!} - \sum_{n=1}^{+\infty} n^t\frac{x^n}{n!} - t\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)^{t-1}\frac{x^n}{n!}\\ &= 1-t+\sum_{n=1}^{+\infty}\left((n+1)^t - n^t - t\,(n+1)^{t-1}\right)\frac{x^n}{n!}\end{aligned}$$

Les relations (2) et (3) permettent d'écrire

$$0 \leqslant \Delta(x,t) \leqslant 1 + \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}(n+2)^t\frac{x^n}{(n+2)!}$$

ce qui après réindexation aboutit à

$$\boxed{\forall t \in [0,1],\ \forall x>0,\ 0 \leqslant \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t) - \left(1+\frac{t}{x}\right)\Phi(x,t) \leqslant \frac{3}{4\,x^2}\Phi(x,t)+1}$$

4. (a) Soit $(x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times [0,1]$. Ayant $\Phi(x,t)>0$, on peut poser

$$\omega(x,t) = x^2\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t)}{\Phi(x,t)} - x^2 - t\,x$$

On définit ainsi une application ω de $\mathbb{R}_+^* \times [0,1]$ dans $\mathbb{R}$ qui est clairement continue et vérifie

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times [0,1],\ \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t) = \Phi(x,t)\left(1+\frac{t}{x}+\frac{\omega(x,t)}{x^2}\right) \tag{4}$$

Selon la question précédente, la fonction Φ étant à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, la fonction ω est positive et vérifie

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times [0,1],\ \omega(x,t) \leqslant \frac{3}{4} + \frac{x^2}{\Phi(x,t)}$$

On peut minorer la fonction Φ de la façon suivante :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times [0,1],\ \Phi(x,t) \geqslant 2^t\frac{x^2}{2!} \geqslant \frac{x^2}{2}$$

Par conséquent on obtient

$$\boxed{\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times [0,1],\ 0 \leqslant \omega(x,t) \leqslant \frac{11}{4}}$$

(b) Soit $(x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times [0,1]$. Considérons la fonction $\delta : \begin{array}{ccc}[x,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}\\ u & \longmapsto & \frac{\omega(u,t)}{u^2}\end{array}$.

La fonction δ est continue à valeurs positives sur $[x,+\infty[$.

Ayant de plus $\forall u \in [x, +\infty[\,,\ \delta(u) \leqslant \dfrac{11}{4\,u^2}$ cette comparaison à une fonction de référence assure l'intégrabilité de la fonction δ sur $[x, +\infty[\,$, donc l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\omega(u,t)}{u^2} du$.

5. (a) On peut proposer deux démonstrations de cette question :

(i) *Première démonstration :*
Soit $t \in [0,1]$. L'équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$

$$(E) : y' = \left(1 + \frac{t}{x} + \frac{\omega(x,t)}{x^2}\right) y$$

est une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre. L'ensemble de ses solutions est la droite vectorielle engendrée par l'une de ses solutions non nulles.
Considérons la fonction

$$\begin{array}{rccl} \varphi_0 : & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^t\, e^x \exp\left(-\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\omega(u,t)}{u^2} du\right) \end{array}$$

Elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$, et sa dérivée logarithmique est définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)} = 1 + \frac{t}{x} + \frac{\omega(x,t)}{x^2}$$

Ainsi φ_0 est une solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle (E).
Selon la relation (4) la fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \Phi(x,t) \end{array}$$

est une solution strictement positive de l'équation différentielle (E) : selon la remarque préliminaire il existe une constante strictement positive, notée $K(t)$, telle que

$$\forall x > 0,\ \Phi(x,t) = K(t)\, x^t\, e^x \exp\left(-\int_x^{+\infty} \frac{\omega(u,t)}{u^2} du\right)$$

(ii) *Deuxième démonstration :*
Posons

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times [0,1],\ K(x,t) = \Phi(x,t)\, x^{-t}\, e^{-x} \exp\left(\int_x^{+\infty} \frac{\omega(u,t)}{u^2} du\right)$$

Cette relation définit une fonction dérivable par rapport à la première variable et

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times [0,1],\ \frac{\partial K}{\partial x}(x,t) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t) - \Phi(x,t)\left(1 + \frac{t}{x} + \frac{\omega(x,t)}{x^2}\right)\right) x^{-t}\, e^{-x} \exp\left(\int_x^{+\infty} \frac{\omega(u,t)}{u^2} d\right.$$
$$= 0$$

Ainsi, comme $\mathbb{R}_+^* \times [0,1]$ est convexe, la fonction K ne dépend que de la seconde variable.
Pour tout t, $t \in [0,1]$, il existe donc un réel strictement positif, noté $K(t)$, tel que

$$\forall x > 0,\ \Phi(x,t) = K(t)\, x^t\, e^x \exp\left(-\int_x^{+\infty} \frac{\omega(u,t)}{u^2} du\right)$$

(b) Soit $(x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times [0,1]$. Ayant $0 \leqslant \omega(x,t) \leqslant M$, on obtient

$$0 \leqslant \int_x^{+\infty} \frac{\omega(u,t)}{u^2} du \leqslant \frac{M}{x}$$

puis

$$K(t)\, x^t \exp\left(x - \frac{M}{x}\right) \leqslant \Phi(x,t) \leqslant K(t)\, x^t\, e^x$$

Comme $\exp\left(-\frac{M}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, on trouve

$$\boxed{\forall t \in [0,1]\,,\ \Phi(x,t) \underset{+\infty}{\sim} K(t)\, x^t\, e^x}$$

Partie III

1. On considère l'application $\varphi: \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\omega(u,t)}{u^2} du \end{array}$. Montrons la continuité de φ à l'aide du théorème du cours. On a :
   - pour tout t, $t \in [0,1]$, la fonction $u \longmapsto \dfrac{\omega(u,t)}{u^2}$ est continue par morceaux (car continue) sur $[1,+\infty[$
   - pour tout u, $u \in [1,+\infty[$, la fonction $t \longmapsto \dfrac{\omega(u,t)}{u^2}$ est continue sur $[0,1]$
   - on a $\forall (t,u) \in [0,1] \times [1,+\infty[,\ 0 \leqslant \dfrac{\omega(u,t)}{u^2} \leqslant \dfrac{M}{u^2}$, ce qui fournit la condition de domination

   Le théorème de continuité d'intégrale à paramètre assure la continuité de la fonction φ sur $[0,1]$.

   Enfin la fonction K est continue en tant que produit de fonctions continues puisque
   $$\forall t \in [0,1]\,,\ K(t) = \frac{1}{e}\Phi(1,t)\exp(\varphi(t))$$

2. Soient t et β deux réels positifs ou nuls vérifiant $t+\beta \leqslant 1$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$. Effectuant le produit de Cauchy des deux séries entières de somme $\Phi(x,t)$ et $\Phi(x,\beta)$ (de rayon de convergence infini) on a
   $$\Phi(x,t)\,\Phi(x,\beta) = \sum_{n=2}^{+\infty} c_n\, x^n \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2,\ c_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k^t\,(n-k)^\beta}{k!\,(n-k)!} = \frac{n^{t+\beta}}{n!}\sum_{k=1}^{n-1}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}\left(\frac{k}{n}\right)^t\left(1-\frac{k}{n}\right)^\beta$$
   Tenant compte du rappel de l'énoncé on peut écrire
   $$c_n \sim \frac{n^{t+\beta}}{n!}\, 2^{n-t-\beta} \qquad \left(\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2,\ \frac{n^{t+\beta}}{n!}\, 2^{n-t-\beta} > 0\right)$$
   Le résultat de la question I 1. (b) prouve alors que l'on a
   $$\Phi(x,t)\,\Phi(x,\beta) \underset{+\infty}{\sim} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{t+\beta}}{n!}\, 2^{n-t-\beta} x^n$$
   c'est-à-dire
   $$\Phi(x,t)\,\Phi(x,\beta) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2^{t+\beta}}\Phi(2\,x, t+\beta)$$
   puis, grâce à la question II 5.,
   $$\boxed{\Phi(x,t)\,\Phi(x,\beta) \underset{+\infty}{\sim} e^{2x}\, x^{t+\beta} K(t+\beta)}$$

3. Soit H une application continue sur $[0,1]$ à valeurs strictement positives vérifiant $H(0) = H(1) = 1$ et telle que

$$\forall (t,\beta) \in \mathbb{R}_+^2,\ t+\beta \leqslant 1 \Longrightarrow H(t+\beta) = H(t)\, H(\beta) \tag{5}$$

Soit $\beta \in [0,1[$. L'hypothèse s'écrit : $\forall t \in [0, 1-\beta]$, $H(t+\beta) = H(t)\, H(\beta)$.
Intégrant cette égalité de 0 à $1-\beta$, on obtient

$$\int_0^{1-\beta} H(t+\beta)\, dt = H(\beta) \int_0^{1-\beta} H(t)\, dt$$

ou encore (par changement de variable)

$$\int_\beta^1 H(t)\, dt = H(\beta) \int_0^{1-\beta} H(t)\, dt$$

Comme H est continue, les deux fonctions $\begin{array}{ccc} [0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \beta & \longmapsto & \displaystyle\int_\beta^1 H(t)\, dt \end{array}$ et $\begin{array}{ccc} [0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \beta & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{1-\beta} H(t)\, dt \end{array}$
sont de classe C^1 et la seconde ne s'annule pas sur $[0,1[$ (car H est à valeurs strictement positives).
Ainsi la fonction H est de classe C^1 sur $[0,1[$. Dérivant la relation (5) par rapport à t et remplaçant t par 0, on obtient

$$\forall \beta \in [0,1[,\ H'(\beta) = H'(0)\, H(\beta)$$

Ainsi il existe un réel k tel que

$$\forall \beta \in [0,1[,\ H(\beta) = k \exp\left(H'(0)\, \beta\right)$$

(égalité valable en remplaçant β par 1 par continuité de h en 1). Ayant $H(0) = H(1) = 1$, on a alors $k = 1$ et $H'(0) = 0$: par conséquent la fonction H est la fonction constante égale à 1.
Soient t, β deux réels positifs ou nuls vérifiant $t + \beta \leqslant 1$. Selon la question précédente et la question II 5., on a

$$\Phi(x,t)\, \Phi(x,\beta) \underset{+\infty}{\sim} e^{2x}\, x^{t+\beta} K(t+\beta) \qquad \Phi(x,t)\, \Phi(x,\beta) \underset{+\infty}{\sim} e^{2x}\, x^{t+\beta} K(t)\, K(\beta)$$

Par identification, on en déduit : $K(t+\beta) = K(t)\, K(\beta)$.
En outre la question I 3. donne

$$\Phi(x,0) \underset{+\infty}{\sim} \exp(x) \qquad \Phi(x,1) \underset{+\infty}{\sim} x \exp(x)$$

et ainsi $K(0) = K(1) = 1$.
Le résultat de l'exercice de la première moitié de la question prouve

$$\boxed{\forall t \in [0,1],\ K(t) = 1}$$

4. Tout d'abord, ce qui précède fournit

$$\forall t \in [0,1],\ \Phi(x,t) \underset{+\infty}{\sim} x^t\, e^x$$

En outre pour tout réel t la question I 2. (d) donne

$$\Phi(x, t+1) \underset{+\infty}{\sim} x \Phi(x,t)$$

et ainsi on obtient aisément

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \forall t \in [n, n+1[,\ \Phi(x,t) \underset{+\infty}{\sim} x^t\, e^x$$

En conclusion

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ \Phi(x,t) \underset{+\infty}{\sim} x^t\, e^x}$$

Partie IV

1. (a) Soit t un nombre réel. Posons : $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2,\ a_n = \dfrac{1}{\ln n} \dfrac{n^t}{n!}$. On a $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2,\ a_n > 0$, et comme $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, la règle de d'Alembert assure que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{n^t}{\ln n} \dfrac{x^n}{n!}$ est infini : sa somme est donc définie sur $\mathbb{R}$.

   On définit la fonction Ψ sur $\mathbb{R}^2$ par $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2,\ \Psi(x,t) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^t}{\ln n} \frac{x^n}{n!}$.

   (b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Par définition de Φ on a

$$\forall u \in \mathbb{R},\ \Phi(x,u) - x = \sum_{n=2}^{+\infty} n^u \frac{x^n}{n!}$$

   Soit t un nombre réel. Utilisons le théorème d'intégration terme à terme pour établir l'intégrabilité de la fonction S, $S : \begin{array}{ccc}]-\infty,t] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & \Phi(x,u) - x \end{array}$ et calculer la valeur de son intégrale. Pour cela à tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 on associe la fonction $f_n : \begin{array}{ccc}]-\infty,t] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & n^u \dfrac{x^n}{n!} \end{array}$. On a :

   • pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 la fonction f_n est continue par morceaux et intégrable sur $]-\infty,t]$ car

$$u^2 \exp(u \ln n) \frac{x^n}{n!} \underset{u\to-\infty}{\longrightarrow} 0$$

   • $\sum f_n$ converge simplement sur $]-\infty,t]$ et sa somme (égale à S par construction) est continue par morceaux sur $]-\infty,t]$

   • établissons la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \int_{]-\infty,t]} |f_n|$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2,\ \int_{]-\infty,t]} |f_n| = \int_{-\infty}^{t} n^u \frac{x^n}{n!} du = \frac{n^t}{\ln n} \frac{x^n}{n!}$$

   et la question précédente (série entière de rayon de convergence infini) justifie la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{n^t}{\ln n} \frac{x^n}{n!}$.

   Par conséquent le théorème d'intégration terme à terme assure l'intégrabilité de la fonction S et fournit la valeur de son intégrale à savoir

$$\int_{]-\infty,t]} S = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^t}{\ln n} \frac{x^n}{n!}$$

   En conclusion l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{t} (\Phi(x,u) - x)\, du$ est assurée et

$$\boxed{\int_{-\infty}^{t} (\Phi(x,u) - x)\, du = \Psi(x,t)}$$

2. Soient t et β deux réels vérifiant $t < \beta$.
Ayant
$$\frac{n^t}{\ln n}\frac{1}{n!} = o\left(\frac{n^\beta}{\ln n}\frac{1}{n!}\right) \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2,\ \frac{n^\beta}{\ln n}\frac{1}{n!} > 0$$
le résultat de la question I 1. (a) prouve $\Psi(x,t)$ est négligeable devant $\Psi(x,\beta)$ quand x tend vers $+\infty$.

3. Soit t un élément de $]0,1]$. En utilisant l'inégalité obtenue dans la question II 5., et sachant que la fonction $K_{|[0,1]}$ est constante égale à 1, on a
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall u \in [0,1],\ x^u \exp\left(x - \frac{M}{x}\right) \leqslant \Phi(x,u) \leqslant x^u \exp(x)$$
puis (par croissance de l'intégrale)
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \int_0^t x^u \exp\left(x - \frac{M}{x}\right) du - x\,t \leqslant \int_0^t (\Phi(x,u) - x)\,du \leqslant \int_0^t x^u \exp(x)\,du - x\,t$$
c'est-à-dire
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \exp\left(x - \frac{M}{x}\right)\frac{x^t - 1}{\ln x} - x\,t \leqslant \Psi(x,t) - \Psi(x,0) \leqslant \exp(x)\frac{x^t - 1}{\ln x} - x\,t$$
Par encadrement, on en déduit
$$\Psi(x,t) - \Psi(x,0) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^t e^x}{\ln x}$$
et finalement, comme $\Psi(x,0)$ est négligeable devant $\Psi(x,t)$ quand x tend vers $+\infty$ (question précédente)
$$\boxed{\Psi(x,t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^t e^x}{\ln x}}$$

4. Soit maintenant t un réel quelconque. On a (par réindexation)
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \Psi(x,t+1) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^{t+1}}{\ln n}\frac{x^n}{n!} = x\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)^t}{\ln(n+1)}\frac{x^n}{n!}$$
On a
$$\frac{(n+1)^t}{\ln(n+1)}\frac{1}{n!} \sim \frac{n^t}{\ln n}\frac{1}{n!} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2,\ \frac{n^t}{\ln n}\frac{1}{n!} > 0$$
Une nouvelle utilisation de la question I 1. permet d'écrire $\Psi(x,t+1) \underset{+\infty}{\sim} x\,\Psi(x,t)$.
Selon le principe déjà appliqué à la fonction Φ on en déduit
$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \forall t \in [n, n+1[,\ \Psi(x,t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^t e^x}{\ln x}$$
En conclusion
$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ \Psi(x,t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^t e^x}{\ln x}}$$

MP 21-22

MINES PC 2001 DEUXIEME EPREUVE

Eléments de correction

PREMIERE PARTIE

1. **Solution de l'équation différentielle définie sur toute la droite réelle :**

(a) Avec les notations de l'énoncé, la fonction f_λ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$, et ses dérivées successives s'obtiennent par dérivation terme à terme (propriété des séries entières). Ecrivant que f_λ est solution de l'équation différentielle E_λ sur $]-R, R[$, on obtient

$$\forall x \in]-R, R[,\ x\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + (1-x)\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \lambda\left(1+\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right) = 0$$

ce qui après arrangement donne :

$$\forall x \in]-R, R[,\ \sum_{n=1}^{\infty}\Big((n+1)^2 a_{n+1} - (n+\lambda)a_n\Big)x^n - \lambda + a_1 = 0$$

Par unicité d'un développement en série entière, on en conclut que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la suite définie par

$$\begin{cases} a_1 = \lambda \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\quad a_{n+1} = \dfrac{n+\lambda}{(n+1)^2}a_n \end{cases} \qquad \text{puis} \qquad \boxed{\forall n \in \mathbb{N},\quad a_n = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+\lambda)}{(n!)^2}}$$

Les exemples proposés par l'énoncé conduisent à :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x) = e^x \qquad f_0(x) = 1 \qquad f_{-1}(x) = 1-x \qquad f_{-2}(x) = 1-2x+\frac{x^2}{2}}$$

(b) La fonction f_λ est une fonction polynôme si et seulement si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang. D'après le résultat du (a), on en déduit que f_λ est un polynôme si et seulement si il existe un entier naturel n tel que $n+\lambda = 0$.
Par conséquent $\boxed{f_\lambda \text{ est un polynôme si et seulement si } -\lambda \in \mathbb{N}}$.
Dans ce cas, en notant p l'entier naturel tel que $\lambda = -p$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad a_n = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k-p)}{(n!)^2}$$

notamment $\boxed{f_{-p} \text{ est un polynôme de degré } p \text{ et de coefficient dominant } \frac{(-1)^p}{p!}}$.

(c) Supposons que f_λ ne soit pas une fonction polynôme, alors, pour tout entier naturel n, $a_n \neq 0$ (car d'après l'expression trouvée pour a_n, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang si et seulement si il existe un entier naturel n tel que $a_n = 0$).
On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+\lambda}{(n+1)^2} \qquad \text{puis} \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

La règle de d'Alembert permet alors d'affirmer que la série entière $\sum a_n x^n$ a pour rayon de convergence $\boxed{R = +\infty}$.

Il reste à préparer les deux derniers termes, à savoir

$$-\frac{r}{z}\frac{\partial F}{\partial z}=\frac{1}{r^{3/2}}\left(\frac{1}{2}f_\lambda(r)-rf'_\lambda(r)\right)\qquad \frac{1}{4r^2}F=\frac{1}{4}\frac{1}{r^{5/2}}f_\lambda(r)$$

Finalement

$$\Delta F-\frac{r}{z}\frac{\partial F}{\partial z}+\frac{1}{4r^2}F=\frac{1}{r^{3/2}}\left(rf''_\lambda(r)+(1-r)f'_\lambda(r)+\frac{1}{2}f_\lambda(r)\right)$$

En conclusion, pour répondre à la question posée, on est amené à choisir $\boxed{\lambda=-\frac{1}{2}}$.

SECONDE PARTIE

1. **Détermination de l'intégrale I_p :**
On reconnaît des intégrales de Wallis, dont l'étude est classique. Une intégration par parties donne

$$\forall p\in\mathbb{N},\ I_{p+1}=\frac{2p+1}{2p+2}I_p$$

ce qui conduit à

$$\boxed{\forall p\in\mathbb{N},\ I_p=\frac{1}{2^{2p}}\binom{2p}{p}\frac{\pi}{2}}$$

2. **Relation entre les fonctions φ et $f_{1/2}$:**
L'agencement de l'énoncé n'est pas optimal puisque, d'après le cours, toute fonction développable en série entière sur $\mathbb{R}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Néanmoins jouons le jeu et répondons aux questions dans l'ordre dans lequel elles sont posées.

(a) A l'aide d'un théorème de cours, montrons que la fonction φ est de classe C^k pour tout entier naturel non nul k.
Soit $k\in\mathbb{N}^*$. Considérons la fonction $h:\ \begin{array}{ccc}\mathbb{R}\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,\theta) & \longmapsto & \exp\left(x\sin^2\theta\right)\end{array}$. On a :

• $\forall\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $h(\cdot,\theta)\in C^k(\mathbb{R})$ et $\forall p\in[\![0,k]\!]$, $\forall(x,\theta)\in\mathbb{R}\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{\partial^p h}{\partial x^p}(x,\theta)=\sin^{2p}\theta\exp\left(x\sin^2\theta\right)$

• $\forall x\in\mathbb{R}$, $\forall p\in[\![0,k-1]\!]$, $\frac{\partial^p h}{\partial x^p}(x,\cdot)\in\mathcal{L}^1\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$ (la continuité sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ assurant l'intégrabilité sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$)

• $\forall x\in\mathbb{R}$, $\frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,\cdot)\in\mathcal{CM}\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$ (la continuité sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ assurant la continuité par morceaux sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$)

• (HDL). Soit K un segment de $\mathbb{R}$. Alors $\exists a\in\mathbb{R}_+^*: K\subset[-a+a]$ (on fixe un tel a). Ainsi $\forall(x,\theta)\in K\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\left|\frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,\theta)\right|\leqslant e^a$, et cette fonction constante est bien intégrable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Selon un résultat de cours, la fonction φ est de classe C^k sur $\mathbb{R}$ et, ceci étant vrai pour tout entier naturel k, φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ avec

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \varphi^{(k)}(x) = \int_0^{\pi/2} \sin^{2k}\theta \exp\left(x\sin^2\theta\right) d\theta$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Le développement en série entière de l'exponentielle, de rayon de convergence égal à $+\infty$, donne

$$\forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ \exp\left(x\sin^2\theta\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin^{2n}\theta}{n!} x^n$$

Il s'agit d'intervertir intégration et sommation. A tout entier naturel n, associons la fonction u_n, définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, par $\forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $u_n(\theta) = \frac{\sin^{2n}\theta}{n!} x^n$. On a :

- $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathcal{L}^1\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$
- La série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ car

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ |u_n(\theta)| \leqslant \frac{|x|^n}{n!}$$

et sa somme est (continue donc) continue par morceaux sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Par théorème de cours (convergence uniforme d'une série de fonctions sur un intervalle borné), on obtient notamment

$$\varphi(x) - \int_0^{\pi/2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin^{2n}\theta}{n!} x^n\right) d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^{\pi/2} \sin^{2n}(\theta)\, d\theta\right) \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n \frac{x^n}{n!}$$

ou encore

$$\boxed{\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \binom{2n}{n} \frac{\pi}{2} \frac{x^n}{n!}}$$

Ce développement étant valable pour tout réel x, le rayon de convergence de la série entière, dont φ est la somme, est égal à $+\infty$.

Notant $\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_n = \frac{I_n}{n!}$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{n + \frac{1}{2}}{(n+1)^2}$$

On reconnaît la relation de récurrence explicitée à la question I 1. (a) avec $\lambda = \frac{1}{2}$. Ayant $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$, on en déduit $\boxed{\varphi = \frac{\pi}{2} f_{1/2}}$.

3. **Encadrement de $\varphi(x)$:**

(a) Comme la fonction exp est convexe, son graphe est "au-dessus" de sa tangente en 0, ce qui s'écrit

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geqslant 1 + x$$

Etant donné u strictement plus petit que 1, remplaçant x par $-u$ dans l'inégalité précédente, on obtient $e^u \leqslant \frac{1}{1-u}$.

(b) Soit $x \in]-\infty, 1[$. On peut signaler que la fonction $\begin{array}{ccc} \left[0, \frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ \theta & \longmapsto & 1 - x\sin^2\theta \end{array}$ est continue et ne s'annule pas : ainsi la quantité notée $J(x)$ est bien définie.

Pour le calcul de cette intégrale, les règles de Bioche incitent à effectuer le changement de variable défini par $t = \tan\theta$ (qui définit une bijection C^1 de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbf{R}_+$) ou $t = \operatorname{cotan}\theta$ (qui définit une bijection C^1 de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $\mathbf{R}_+$). Optant pour le second, on trouve

$$J(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{d(\operatorname{cotan}\theta)}{1 - x + \operatorname{cotan}^2\theta} = \frac{1}{\sqrt{1-x}}\left[\arctan\left(\frac{\operatorname{cotan}\theta}{\sqrt{1-x}}\right)\right]_0^{\pi/2}$$

et ainsi

$$\boxed{J(x) = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x}}}$$

(c) Soit $x \in]-\infty, 1[$. D'une part, exp étant à valeurs positives, on a $\varphi(x) \geqslant 0$.

D'autre part $\forall\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $x\sin^2\theta < 1$ et alors, selon (a), $\forall\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\exp\left(x\sin^2\theta\right) \leqslant \frac{1}{1 - x\sin^2\theta}$.

Par croissance de l'intégrale, on conclut

$$0 \leqslant \varphi(x) \leqslant J(x) \qquad \text{ou encore} \qquad \boxed{0 \leqslant \varphi(x) \leqslant \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x}}}$$

(d) Soit $x \in]-\infty, -1]$. Il existe ainsi un réel a, supérieur ou égal à 1, tel que $x = -a^2$. Ceci donne

$$\sqrt{-x}\varphi(x) = a\varphi\left(-a^2\right) = a\int_0^{\pi/2} \exp\left(-a^2\sin^2\theta\right) d\theta$$

Ainsi ($\forall\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leqslant \cos\theta \leqslant 1$)

$$\sqrt{-x}\varphi(x) \geqslant a\int_0^{\pi/2} \exp\left(-a^2\sin^2\theta\right)\cos(\theta)\, d\theta$$

ce qui permet de faire apparaître le changement de variable défini par $u = \sin\theta$ dans la dernière intégrale. Ainsi

$$\sqrt{-x}\varphi(x) \geqslant \int_0^a \exp\left(-u^2\right) du \geqslant \int_0^1 \exp\left(-u^2\right) du$$

D'où la réponse à la question posée en choisissant $\boxed{A = \int_0^1 \exp\left(-u^2\right) du}$.

(e) Selon la question 2. (b), on a $f_{1/2} = \frac{2}{\pi}\varphi$. De plus, selon le (c), on a $\forall x \in]-\infty, 1[$, $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x}}$, ce qui donne

$$\forall x \in]-\infty, 1[,\ 0 \leqslant f_{1/2}(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

Par encadrement la limite de $f_{1/2}$ en $-\infty$ existe et $\boxed{f_{1/2}(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0}$.

Par ailleurs, selon le (d), $\forall x \in]-\infty, -1]$, $f_{1/2}(x) \geqslant \frac{2}{\pi}\frac{A}{\sqrt{-x}}$ et, par référence à un exemple de Riemann, on en déduit que $f_{1/2}$ n'est pas intégrable sur $]-\infty, -1]$.

4. **Etude de la fonction h :**

(a) Le résultat de la question I 3. (b) fournit

$$\forall x \in \mathbf{R},\ h(-x) = \exp\left(\frac{x}{2}\right) f_{1/2}(-x) = \exp\left(\frac{x}{2}\right) \exp(-x)\, f_{1/2}(x) = h(x)$$

et ainsi la fonction h est paire.

Soit $x \in \mathbf{R}$. Par définition et grâce à une formule de trigonométrie, on a

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{2}{\pi} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) \int_0^{\pi/2} \exp\left(x \sin^2 \theta\right) d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \exp\left(x\left(-\frac{1}{2} + \sin^2 \theta\right)\right) d\theta \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \exp\left(-\frac{x}{2} \cos(2\theta)\right) d\theta \end{aligned}$$

Ensuite, utilisant la parité de h, on a

$$h(x) = \frac{1}{2}\left(h(x) + h(-x)\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \operatorname{ch}\left(\frac{x}{2} \cos(2\theta)\right) d\theta \underset{cdv\ t=2\theta}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{ch}\left(\frac{x}{2} \cos t\right) dt$$

et enfin, la fonction intégrée étant $\pi-$périodique et paire, on aboutit à

$$\boxed{h(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \operatorname{ch}\left(\frac{x}{2} \cos t\right) dt}$$

(b) A partir du développement en série entière (par exemple) de la fonction ch, on justifie

$$\forall u \in \mathbf{R}_+,\ \operatorname{ch} u \geqslant 1 + \frac{u^2}{2} \geqslant \frac{u^2}{2}$$

Par conséquent

$$\forall (x,t) \in \mathbf{R}_+^* \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ \operatorname{ch}\left(\frac{x}{2} \cos t\right) \geqslant \frac{x^2}{8} \cos^2 t$$

puis

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*,\ h(x) \geqslant \frac{x^2}{8} I_1$$

Notamment, on en déduit

$$\boxed{h(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty \qquad \frac{h(x)}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty}$$

(c) Sachant que la fonction φ est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$, il en est de même de la fonction h. Néanmoins, sans expliciter h', on remarque que la croissance de la fonction ch sur $\mathbf{R}_+$ entraîne celle de la fonction h sur $\mathbf{R}_+$.

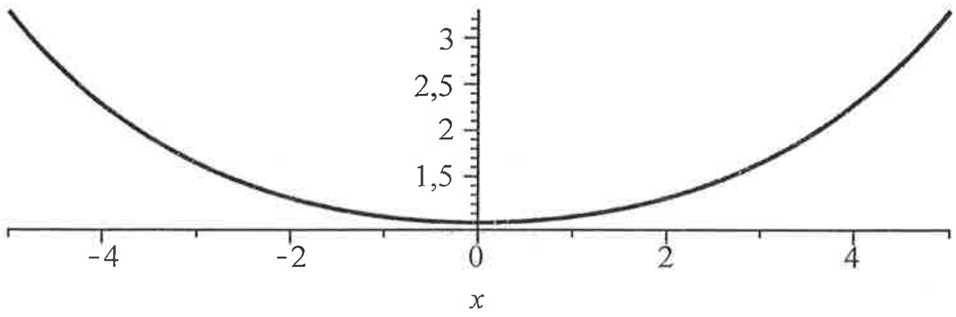
L'allure du graphe de h est la suivante :

> *restart* :

> $h := \frac{2}{\mathrm{Pi}} \cdot int\left(\cosh\left(\frac{x \cdot \cos(t)}{2}\right), t = 0 .. \frac{\mathrm{Pi}}{2}\right);$

$$h := \mathrm{BesselI}\left(0, \frac{1}{2}\, x\right) \tag{1}$$

> *plot*(*h*, *x* =- 5 ..5, *color* = *black*, *numpoints* = 1000);



>

MP 21-22

X PC 2003 PREMIERE EPREUVE

Eléments de correction

Pour toute fonction f bornée sur un intervalle I, on note $\|f\|_{\infty,I} = \sup_I |f|$.

1. $\boxed{\mathcal{E} \text{ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel } \mathbb{C}^{\mathbb{R}}}$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. En effet $\mathcal{E}$ est inclus dans $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$, non vide car la fonction nulle en est un élément et $\mathcal{E}$ est stable par combinaison linéaire à coefficients complexes.

2. Pour tout réel t, on a :
$$W'_{x_1,x_2}(t) = \left(x_1 x_2'' - x_1'' x_2\right)(t) = (q(t) - \lambda)(x_1 x_2 - x_1 x_2)(t) = 0$$
donc $\boxed{W_{x_1,x_2} \text{ est une fonction constante sur } \mathbb{R}}$.

3. (a) Soit $f \in \mathcal{E}$. Pour tout réel t, on a $\mathcal{T}(f)(t) = f(t+T)$, donc, en utilisant la T-périodicité de q, on peut écrire :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ \mathcal{T}(f)''(t) = f''(t+T) = (q(t+T) - \lambda) f(t+T) = (q(t) - \lambda)\mathcal{T}(f)(t)$$
ce qui prouve $\boxed{\mathcal{T}(f) \in \mathcal{E}}$.

   (b) L'application $\boxed{\tau \text{ est donc un endomorphisme de } \mathcal{E}}$.
   Soit $f \in \operatorname{Ker}\tau$, alors : $\forall t \in \mathbb{R},\ \tau(f)(t) = 0$, ou encore $\forall t \in \mathbb{R}, f(t+T) = 0$, donc f est la fonction nulle. Ainsi $\operatorname{Ker}\tau = \{0\}$, par suite τ est injectif.
   Par théorème du cours, (1) étant une équation linéaire, homogène, résolue sur $\mathbb{R}$, du deuxième ordre, la dimension de $\mathcal{E}$ est finie égale à 2, donc, d'après le théorème du rang, $\boxed{\tau \text{ est bijective}}$.

4. (a) L'équation (1) étant linéaire, homogène, résolue sur $\mathbb{R}$, du deuxième ordre, l'existence et l'unicité des solutions x_1 et x_2 sont données par le $\boxed{\text{théorème de Cauchy}}$ qui, pour tout couple (y_0, z_0) de nombres complexes, assure l'existence et l'unicité d'une solution x de (1) telle que $x(0) = y_0$ et $x'(0) = z_0$.

   (b) Le wronskien W_{x_1,x_2} des solutions x_1 et x_2 est non nul en 0, car $W_{x_1,x_2}(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, donc par théorème :
$$\boxed{(x_1, x_2) \text{ est une base de } \mathcal{E}}$$

5. (a) Pour tout élément x de $\mathcal{E}$, il existe donc deux constantes γ_1 et γ_2 telles que $x = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2$. On a donc $x' = \gamma_1 x_1' + \gamma_2 x_2'$, d'où $\gamma_1 = x(0)$ et $\gamma_2 = x'(0)$. On en déduit :
$$\forall x \in \mathcal{E},\ x = x(0)\, x_1 + x'(0)\, x_2$$
   Ainsi, pour tout $j, j \in \{1, 2\}$,
$$\tau(x_j) = [\tau(x_j)](0)\, x_1 + [\tau(x_j)]'(0)\, x_2 = x_j(T)\, x_1 + x_j'(T)\, x_2$$
   On en déduit la matrice de τ dans la base (x_1, x_2) :
$$\boxed{M = \begin{pmatrix} x_1(T) & x_2(T) \\ x_1'(T) & x_2'(T) \end{pmatrix}}$$

(b) $\det M = W_{x_1,x_2}(T)$. Or, W_{x_1,x_2} est constant d'après 2., donc :

$$\boxed{\det M = W_{x_1,x_2}(0) = 1}$$

(c) D'après la forme de M, on a : $\boxed{\Delta = \frac{1}{2}\left(x_1(T) + x_2'(T)\right)}$

6. Les valeurs propres de τ sont les racines de son polynôme caractéristique, donc de celui de M, à savoir :

$$\boxed{P = X^2 - \operatorname{tr}(M)\, X + \det M = X^2 - 2\Delta X + 1}$$

7. On suppose Δ réel et $|\Delta| \neq 1$.

(a) Le discriminant de P est $\Delta_P = 4\left(\Delta^2 - 1\right)$ et $\Delta_P \neq 0$: ainsi P est scindé à racines simples. Par théorème, τ est donc diagonalisable et $\boxed{\mathcal{E} \text{ est somme directe des deux sous-espaces propres de } \tau}$ qui sont tous deux de dimension 1.

(b) Supposons $|\Delta| < 1$, alors $\Delta_P < 0$, donc, comme P est à coefficients réels, τ admet deux valeurs propres complexes non réelles conjuguées λ_1, λ_2 ($\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$). Comme leur produit est égal à 1, on a $\lambda_1\overline{\lambda_1} = 1$, d'où $|\lambda_1| = 1$. Par conséquent il existe un réel θ_1, non congru à 0 modulo π, tel que $\lambda_1 = e^{i\theta_1}$.

Soit (φ_1, φ_2) une base de vecteurs propres de τ, où φ_1, φ_2 sont respectivement associés à λ_1, λ_2.

* Soit $x \in \mathcal{E}$. Il existe deux nombres complexes γ_1 et γ_2 telles que $x = \gamma_1\varphi_1 + \gamma_2\varphi_2$. On fixe γ_1 et γ_2.

  Pour tout réel t et tout entier naturel k on a :

  $$x(t + kT) = \tau^k(x)(t) = \gamma_1\tau^k(\varphi_1)(t) + \gamma_2\tau^k(\varphi_2)(t) = \gamma_1\,\lambda_1^k\varphi_1(t) + \gamma_2\overline{\lambda_1}^k\varphi_2(t)$$

  Or, pour tout réel t appartenant à $\mathbb{R}_+$ il existe un entier naturel k tel que $t - kT \in [0, T[$, à savoir $k = \left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor$, puisque $0 \leq t - kT < T$ équivaut à $k \leq \frac{t}{T} < k + 1$. Par conséquent :

  $$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ x(t) = \gamma_1\,\lambda_1^{\left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor}\varphi_1(t - kT) + \gamma_2\overline{\lambda_1}^{\left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor}\varphi_2(t - kT)$$

  Les fonctions φ_1 et φ_2 étant continues sur le segment $[0, T]$, elles y sont bornées, d'où :

  $$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ |x(t)| \leq |\gamma_1|\ \|\varphi_1\|_{\infty,[0,T]} + |\gamma_2|\ \|\varphi_2\|_{\infty,[0,T]}$$

  On conclut donc que $\boxed{\text{tout élément } x \text{ de } E \text{ est stable}}$.

* Soit φ une fonction propre associée à la valeur propre λ. Comme par définition d'une fonction propre, φ est non nulle, il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(t_0) \neq 0$. On fixe t_0. On a :

  $$\forall k \in \mathbb{N},\ \varphi(t_0 + kT) = \lambda^k\varphi(t_0)$$

  Comme λ est un complexe de module 1 différent de ± 1, la suite $\left(\lambda^k\right)_{k \geq 0}$ diverge, d'où $\varphi(t_0 + kT)$ n'a pas de limite quand k tend vers $+\infty$, ce qui entraîne que $\varphi(t)$ n'a pas de limite quand t tend vers $+\infty$, donc $\boxed{\varphi \text{ n'est pas fortement stable}}$.

(c) Supposons $|\Delta| > 1$, alors $\Delta_P > 0$. Ainsi τ admet deux valeurs propres λ_1 et λ_2 réelles et distinctes. Comme $\lambda_1\lambda_2 = 1$, on a $\lambda_1 \notin \{-1, +1\}$ (sinon $\lambda_1 = \lambda_2$) et l'une des deux valeurs propres a une valeur absolue strictement inférieure à 1 (par exemple $|\lambda_1| < 1$) et

$|\lambda_2| = \dfrac{1}{|\lambda 1|}\ (> 1)$. Considérons encore une base (φ_1, φ_2) de vecteurs propres de τ, où φ_1, φ_2 sont respectivement associés à λ_1, λ_2.

* Comme dans le cas précédent, on peut écrire :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \varphi_1(t) = \lambda_1^{\left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor} \varphi_1\left(t - \left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor T\right)$$

donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad |\varphi_1(t)| \leq |\lambda_1|^{\left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor} \|\varphi_1\|_{\infty,[0,T]}$$

Or, $|\lambda_1| < 1$, donc $\lim\limits_{t \to +\infty} |\lambda_1|^{\left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor} = 0$, d'où :

$$\boxed{\lim_{t \to +\infty} \varphi_1(t) = 0}$$

* φ_1 n'est pas la seule solution fortement stable puisque toute fonction de la forme $\gamma_1 \varphi_1$ avec $\gamma_1 \in \mathbb{C}^*$ l'est.

* Soit $x \in \mathcal{E}$. Il existe deux nombres complexes γ_1, γ_2 tels que $x = \gamma_1 \varphi_1 + \gamma_2 \varphi_2$. On fixe γ_1, γ_2. Si $\gamma_2 \neq 0$, et si t_0 est un réel tel que $\varphi_2(t_0) \neq 0$, alors

$$\forall k \in \mathbb{N},\ x(t_0 + kT) = \gamma_1 \lambda_1^k \varphi_1(t_0) + \gamma_2 \lambda_2^k \varphi_2(t_0)$$

puis

$$\forall k \in \mathbb{N},\ |x(t_0 + kT)| = |\gamma_2| \left|\lambda_2^k\right| |\varphi_2(t_0)| \left| \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^k \frac{\varphi_1(t_0)}{\varphi_2(t_0)} + 1 \right|$$

donc $\lim\limits_{k \to +\infty} |x(t_0 + kT)| = +\infty$ puisque $\lim\limits_{k \to +\infty} \left(\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^k = 0$ et $\lim\limits_{k \to +\infty} \left|\lambda_2^k\right| = +\infty$. On en déduit que les fonctions de la forme $\gamma_1 \varphi_1$ sont les seules solutions stables et ces fonctions sont fortement stables.

Donc dans ce cas $\boxed{\text{il n'existe pas de solution stable non fortement stable}}$.

8. (a) Supposons $\Delta = \varepsilon$. Dans ce cas, le polynôme caractéristique de τ est égal à $(X - \varepsilon)^2$. Comme χ_τ est scindé on peut affirmer, selon le cours sur la réduction, que l'endomorphisme τ de $\mathcal{E}$ est trigonalisable. Comme la seule valeur propre de τ est égale à ε, il existe donc une base (φ_1, φ_2) de $\mathcal{E}$, telle que :

$$\boxed{\mathrm{mat}_{(\varphi_1, \varphi_2)} \tau = \begin{pmatrix} \varepsilon & a \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}}$$

(b) On suppose $a \neq 0$.

* Comme précédemment, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \varphi_1(t) = \varepsilon^{\left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor} \varphi_1\left(t - \left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor\right)$$

donc : $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ |\varphi_1(t)| \leq \|\varphi_1\|_{\infty,[0,T]}$, ce qui prouve que φ_1 est stable.

* De plus, φ_1 n'est pas fortement stable car si t_0 est un réel tel que $\varphi_1(t_0) \neq 0$, on a $\forall k \in \mathbb{N}$, $\varphi_1(t_0 + kT) = \varepsilon^k \varphi_1(t_0)$ et $\varphi_1(t_0 + kT)$ ne tend pas vers 0 quand k tend vers $+\infty$, donc $\varphi_1(t)$ ne tend pas vers 0 quand t tend vers $+\infty$.

* Soit $x \in \mathcal{E} \setminus \{0\}$. Il existe deux nombres complexes γ_1, γ_2 tels que $x = \gamma_1\varphi_1 + \gamma_2\varphi_2$. On fixe γ_1, γ_2.

  Si $\gamma_2 = 0$, alors, d'après ce qui précède, x n'est pas fortement stable.

  Supposons $\gamma_2 \neq 0$.

  On a $\begin{pmatrix} \varepsilon & a \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} = \varepsilon I_2 + a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc, comme les matrices I_2 et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ commutent, la formule du binôme donne :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \begin{pmatrix} \varepsilon & a \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}^k = \varepsilon^k I_2 + k\, a\varepsilon^{k-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon^k & ka\varepsilon^{k-1} \\ 0 & \varepsilon^k \end{pmatrix}$$

  Si $\varphi_1(t_0) \neq 0$, on en déduit que pour tout entier naturel k :

$$\begin{aligned} x(t_0 + kT) = \tau^k(x)(t) &= \left(\gamma_1\varepsilon^k + \gamma_2 ka\varepsilon^{k-1}\right)\varphi_1(t_0) + \gamma_2\varepsilon^k\varphi_2(t_0) \\ &= \gamma_2 ka\varepsilon^{k-1}\left[\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2 ka\varepsilon} + 1\right)\varphi_1(t_0) + \gamma_2\varepsilon^k\varphi_2(t_0)\right] \end{aligned}$$

  puis :

$$|x(t_0 + kT)| = k\,|\gamma_2 a| \left|\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2 ka\varepsilon} + 1\right)\varphi_1(t_0) + \frac{\varepsilon}{ka\gamma_2}\varphi_2(t_0)\right|,$$

  donc $\lim\limits_{k\to+\infty} |x(t_0 + kT)| = +\infty$, et x n'est pas fortement stable.

$$\boxed{\text{Ainsi, il n'existe pas de solution non nulle fortement stable}}$$

9. (a) * Supposons $\lambda > 0$, et notons $w = \sqrt{\lambda}$ ainsi $\lambda = w^2$. Alors les solutions de l'équation (1) : $x'' + w^2x = 0$, sont les fonctions de la forme $t \longmapsto \gamma_1\cos(wt) + \gamma_2\sin(wt)$, $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{C}$. On obtient alors :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ x_1(t) = \cos(wt) \text{ et } x_2(t) = \frac{\sin(wt)}{w}$$

Dans ce cas, $\Delta_0(\lambda) = \frac{1}{2}(x_1(\pi) + x_2'(\pi)) = \cos(w\pi) = \cos\left(\sqrt{\lambda}\pi\right)$.

* Supposons $\lambda < 0$, et notons $w = \sqrt{-\lambda}$ ainsi $\lambda = -w^2$. Alors les solutions de l'équation (1) : $x'' - w^2x = 0$, sont les fonctions de la forme $t \longmapsto \gamma_1\operatorname{ch}(wt) + \gamma_2\operatorname{sh}(wt)$, $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{C}$. On obtient alors :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ x_1(t) = \operatorname{ch}(wt) \text{ et } x_2(t) = \frac{\operatorname{sh}(wt)}{w}$$

Dans ce cas, $\Delta_0(\lambda) = \frac{1}{2}(x_1(\pi) + x_2'(\pi)) = \operatorname{ch}(w\pi) = \operatorname{ch}\left(\sqrt{-\lambda}\pi\right)$.

* Supposons $\lambda = 0$. Alors les solutions de l'équation (1) : $x'' = 0$, sont les fonctions de la forme $t \longmapsto \gamma_1 + \gamma_2 t$, $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{C}$. On obtient alors :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ x_1(t) = 1 \text{ et } x_2(t) = t$$

Dans ce cas, $\Delta_0(\lambda) = \frac{1}{2}(x_1(\pi) + x_2'(\pi)) = 1$.

En conclusion : $\boxed{\Delta_0(\lambda) = \begin{cases} \cos\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) & \text{si } \lambda \geq 0 \\ \operatorname{ch}\left(\sqrt{-\lambda}\pi\right) & \text{si } \lambda \leq 0 \end{cases}}$

On remarque que l'on a :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \Delta_0(\lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n \pi^{2n}}{(2n)!}$$

donc Δ_0 est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, ce qui entraîne par théorème, que $\boxed{\Delta_0 \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}}$.

Cet argument très "seconde année" évite une justification fondée sur l'utilisation de la conséquence du théorème des accroissements finis.

(b) On a : $\boxed{\Delta_0'(\lambda) = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2\sqrt{\lambda}} \sin\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) & \text{si } \lambda > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2\sqrt{-\lambda}} \operatorname{sh}\left(\sqrt{-\lambda}\pi\right) & \text{si } \lambda < 0 \end{cases}}$ d'où le tableau de variations de Δ_0 :

λ	$-\infty$		0		1		2^2		3^2		4^2	.....	$+\infty$
Δ_0'		$-$	$-\frac{\pi^2}{2}$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	.....	
Δ_0	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+1$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+1$	......	

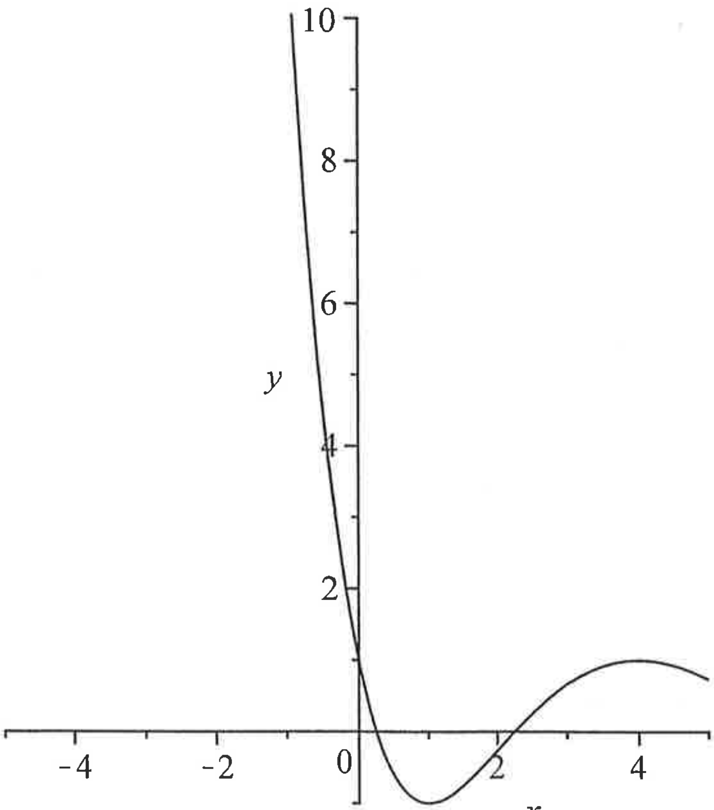
puis son graphe :

restart : *with*(*plots*) :

G1 := *plot*(cos($\sqrt{x}$·Pi), *x* = 0 ..5, *y* = −1 ..10, *color* = *black*, *numpoints* = 500) :

G2 := *plot*(cosh($\sqrt{-x}$·Pi), *x* = −5 ..0, *y* = −1 ..10, *color* = *black*, *numpoints* = 500) :

display([*G1*, *G2*]);



(c) On suppose $q = 0$.
S'il existe un entier naturel non nul n tel que $\lambda = n^2$, alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $x_1(t) = \cos(nt)$ et $x_2(t) = \dfrac{\sin(nt)}{n}$. Dans ce cas :

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} x_1(\pi) & x_2(\pi) \\ x_1'(\pi) & x_2'(\pi) \end{pmatrix} = (-1)^n I_2}$$

Si $\lambda = 0$ alors

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} x_1(\pi) & x_2(\pi) \\ x_1'(\pi) & x_2'(\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \pi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

10. *Remarque :* La fonction $|q|$ est continue donc bornée sur le segment $[0, \pi]$. Étant π-périodique, elle est aussi bornée sur $\mathbb{R}$, ce qui assure l'existence de Q.
Nous démontrons à la fois l'existence de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ et l'inégalité demandée par récurrence. A tout entier naturel associons le prédicat :

$$H_n = \begin{cases} \text{la fonction } u_n \text{ est bien définie sur } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \\ \text{Pour tout réel strictement positif } w, \text{ la fonction } t \longmapsto u_n(t, w) \text{ est continue sur } \mathbb{R}, \\ \forall (t, w) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \ |u_n(t, w)| \leq \dfrac{Q^n |t|^n}{w^n n!}. \end{cases}$$

- H_0 est vraie par construction.
- Soit n un entier naturel non nul tel que H_{n-1} soit vraie. Montrons H_n.
  Soit $w \in \mathbb{R}_+^*$. La continuité de la fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ s & \longmapsto & u_{n-1}(s, w) \end{array}$ assure celle de la fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ s & \longmapsto & \dfrac{\sin(w(t-s))}{w} q(s)\, u_{n-1}(s, w) \end{array}$ donc l'existence de $u_n(t, w)$ pour tout réel t.
  Pour tout réel t, $u_n(t, w)$ s'écrit aussi :
$$u_n(t, w) = \frac{\sin(wt)}{w} \int_0^t \cos(ws)\, q(s)\, u_{n-1}(s, w)\, ds - \frac{\cos(wt)}{w} \int_0^t \sin(ws)\, q(s)\, u_{n-1}(s, w)\, ds$$
  Ainsi la fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & u_n(t, w) \end{array}$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme somme et produit de fonctions continues d'après le théorème de continuité (en fait de classe C^1) des intégrales dépendant de leur borne supérieure.
  Pour tout réel t, on a :
$$\begin{aligned} |u_n(t, w)| &\leq \left| \int_0^t \left| \frac{\sin(w(t-s))}{w} q(s)\, u_n(s, w) \right| ds \right| \leq \frac{Q}{w} \left| \int_0^t |u_n(s, w)|\, ds \right| \\ &\leq \frac{Q}{w} \left| \int_0^t \frac{Q^{n-1} |s|^{n-1}}{w^{n-1}(n-1)!} ds \right| \end{aligned}$$
  puis (en calculant la dernière intégrale en distinguant deux cas selon le signe de t) $|u_n(t, w)| \leq \dfrac{Q}{w} \displaystyle\int_0^{|t|} \frac{Q^{n-1} s^{n-1}}{w^{n-1}(n-1)!} ds$ donc $\boxed{|u_n(t, w)| \leq \dfrac{Q^n |t|^n}{w^n n!}}$. On a ainsi prouvé H_n. On a donc bien $\forall n \in \mathbb{N}$, H_n.

On procéderait exactement de la même manière pour la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

11. Soit $w \in \mathbb{R}_+^*$. On a les propriétés suivantes :
• Pour tout entier naturel n la fonction $u_n(\cdot, w)$ est continue sur $\mathbb{R}$
• Soit K un segment inclus dans $\mathbb{R}$. Il existe un réel strictement positif A, tel que $K \subset [-A, +A]$: on fixe A. En utilisant le résultat de la question précédente, on a :

$$\forall t \in K\ ,\ |u_n(t, w)| \leq \frac{Q^n A^n}{w^n n!}$$

et ainsi $\|u_n(\cdot, w)\|_{\infty,[-A,A]} \leq \dfrac{Q^n A^n}{w^n n!}$. Or, ce majorant est le terme général d'une série convergente d'après la règle de d'Alembert (ou aussi terme général d'une série exponentielle), donc la série de fonctions $\sum u_n(\cdot, w)$ est normalement convergente sur tout segment de $\mathbb{R}$.
On en déduit que sa somme $x_1(\cdot, w)$ est définie continue sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions continues.
On procéderait exactement de la même manière pour prouver l'existence et la continuité de la fonction $x_2(\cdot, w)$.

12. Soit $w \in \mathbb{R}_+^*$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour montrer que la fonction $t \longmapsto u_n(t, w)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, écrivons :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ u_n(t, w) = \frac{\sin(wt)}{w} \int_0^t \cos(ws)\ q(s)\ u_{n-1}(s, w)\ ds - \frac{\cos(wt)}{w} \int_0^t \sin(ws)\ q(s)\ u_{n-1}(s, w)\ ds$$

Les fonctions sous les signes intégrales étant continues, le théorème de dérivation des intégrales dépendant de leur borne supérieure assure que la fonction $t \longmapsto u_n(t, w)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et permet d'écrire pour tout réel t :

$$\begin{aligned} u_n'(t, w) &= \cos(wt) \int_0^t \cos(ws)\ q(s)\ u_{n-1}(s, w)\ ds + \frac{\sin(wt)}{w} \cos(wt)\ q(t)\ u_{n-1}(t, w) \\ &\quad + \sin(wt) \int_0^t \sin(ws)\ q(s)\ u_{n-1}(s, w)\ ds - \frac{\cos(wt)}{w} \sin(wt)\ q(t)\ u_{n-1}(t, w) \end{aligned}$$

d'où :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ u_n'(t, w) = \int_0^t \cos(w(t-s))\ q(s)\ u_{n-1}(s, w)\ ds}$$

On démontre de la même manière que $t \longmapsto v_n(t, w)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ v_n'(t, w) = \int_0^t \cos(w(t-s))\ q(s)\ v_{n-1}(s, w)\ ds}$$

(b) Soient n un entier naturel non nul et un nombre réel t. Utilisant l'expression de la question précédente et les propriétés de l'intégrale on a

$$|u_n'(t, w)| \leqslant \left| \int_0^t |\cos(w(t-s))\ q(s)\ u_{n-1}(s, w)|\ ds \right| \leqslant \left| \int_0^t Q \frac{Q^{n-1} |s|^{n-1}}{w^{n-1}(n-1)!} ds \right|$$

puis (en calculant la dernière intégrale en distinguant deux cas selon le signe de t)

$$\boxed{|u_n'(t, w)| \leqslant \frac{Q^n |t|^n}{w^{n-1} n!}}$$

On procéderait exactement de la même manière pour prouver

$$\boxed{|v_n'(t, w)| \leqslant \frac{Q^n |t|^n}{w^n n!}}$$

(c) Utilisons le théorème de dérivation de la somme d'une série de fonction de classe C^1.

* Pour tout entier naturel n, la fonction $u_n(\cdot, w)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
* La série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} u_n(\cdot, w)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
* Soit S un segment inclus dans $\mathbb{R}$. Il existe un réel strictement positif A tel que $S \subset [-A, A]$. On fixe A. On a alors, selon ce qui précède, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|u_n'(\cdot, w)\|_{\infty,[-A,A]} \leq \dfrac{Q^n\,|A|^n}{w^{n-1}n!}$ terme général d'une série convergente d'après la règle de D'Alembert (terme général de série exponentielle). Ainsi la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} u_n'(\cdot, w)$ converge normalement sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}$.

On en déduit, d'après le théorème précité, que sa somme à savoir $x_1(\cdot, w)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

On procéderait exactement de la même manière pour prouver que $x_2(\cdot, w)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

13. Soient w un réel strictement positif et t un nombre réel. On a :

$$x_1(t, w) = u_0(t, w) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t, w) = u_0(t, w) + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^t \frac{\sin(\omega(t-s))}{\omega} q(s) u_{n-1}(s, w)ds.$$

Notons $S_t = [0, t]$ ou $S_t = [t, 0]$ selon le signe de t et $\delta_n : \begin{array}{ccc} S_t & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ s & \longmapsto & \dfrac{\sin(\omega(t-s))}{\omega} q(s) u_{n-1}(s, w) \end{array}$

On a :

- Pour tout entier naturel n la fonction δ_n est continue, donc intégrable, sur S_t
- La série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} \delta_n$ est normalement, donc uniformément, convergente sur S_t car :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall s \in S_t,\ |\delta_n(s)| \leq \frac{Q}{w} |u_{n-1}(s, w)| \leq \frac{Q}{w} \frac{Q^{n-1}\,|s|^{n-1}}{w^{n-1}\,(n-1)!}$$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\|\delta_n\|_{\infty,S_t} \leq \dfrac{Q^n\,|t|^{n-1}}{w^n\,(n-1)!}$ qui est le terme général d'une série convergente.

La somme de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} \delta_n$ est continue par morceaux, car continue en tant que limite uniforme de suite de fonctions continues, sur S_t et selon le théorème d'intégration de la somme d'une série de fonctions uniformément convergente sur un segment, on peut intégrer terme à terme pour obtenir :

$$x_1(t, w) = u_0(t, w) + \int_0^t \frac{\sin \omega(t-s))}{\omega} q(s) \sum_{n=1}^{+\infty} u_{n-1}(s, w)ds$$

ou encore

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ x_1(t, w) = u_0(t, w) + \int_0^t \frac{\sin(\omega(t-s))}{\omega} q(s) x_1(t, w)ds}$$

On procéderait de la même manière pour x_2.

L'égalité précédente peut s'écrire :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ x_1(t, w) = u_0(t, w) + \frac{\sin(wt)}{w} \int_0^t \cos(ws)\, q(s)\, x_1(s, w)ds - \frac{\cos(wt)}{w} \int_0^t \sin(ws)\, q(s)\, x_1(s, w)ds$$

La réponse concernant la régularité des fonctions $x_1(\cdot, w)$ et $x_2(\cdot, w)$ est donnée dans la suite.

14. Soit $w \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $\lambda = w^2$.

(a) En dérivant deux fois $x_1(\cdot, w)$ avec l'expression :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ x_1(t,w) = u_0(t,w) + \frac{\sin(wt)}{w} \int_0^t \cos(ws)\ q(s)\, x_1(s,w) ds - \frac{\cos(wt)}{w} \int_0^t \sin(ws)\ q(s)\, x_1(s,w) ds,$$

on obtient, pour tout réel t,

$$x_1'(t,w) = -w\sin(wt) + \cos(wt) \int_0^t \cos(ws)\ q(s)\, x_1(s,w) ds + \sin(wt) \int_0^t \sin(ws)\ q(s)\, x_1(s,w) ds$$

$$\begin{aligned} x_1''(t,w) &= -w^2\cos(wt) + q(t)\ x_1(t,w) - w\sin(wt) \int_0^t \cos(ws)\ q(s)\, x_1(s,w) ds \\ &\quad + w\cos(wt) \int_0^t \sin(ws)\ q(s)\, x_1(s,w) ds \end{aligned}$$

puis :

$$x_1''(t,w) = -w^2\cos(wt) + q(t)\ x_1(t,w) - w^2 \int_0^t \frac{\sin(w(t-s))}{w} q(s)\, x_1(s,w) ds$$

ou encore :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ x_1''(t,w) + (\lambda - q(t))\, x_1(t,w) = 0}$$

On procéderait de la même manière pour $x_2(\cdot, w)$.

Ainsi $x_1(\cdot, w)$ et $x_2(\cdot, w)$ sont solutions de l'équation différentielle (1) et, à ce titre, sont de classe C^2. Néanmoins, sans hypothèse supplémentaire sur la fonction q, elles ne sont en général pas de classe C^3 et, a fortiori, pas de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

(b) Il suffit de vérifier que les fonctions $x_1(\cdot, w)$ et $x_2(\cdot, w)$ précédentes sont bien les solutions de (1) aux problèmes de Cauchy de la question 4.a). Or

$*$ $x_1(0,w) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(0,w) = u_0(0,w) = 1,\ x_1'(0,w) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n'(0,w) = u_0'(0,w) = 0.$

(car pour tout entier naturel non nul n, $u_n(0,w)$ et $u_n'(0,w)$ sont définis par des intégrales $\int_0^0$, donc sont nuls).

$*$ De même : $x_2(0,w) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n(0,w) = v_0(0,w) = 0,\ x_2'(0,w) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n'(0,w) = v_0'(0,w) = 1.$

En conclusion, on a bien $\boxed{\Delta_q(\lambda) = \frac{1}{2}(x_1(\pi,w) + x_2'(\pi,w))}$.

15. On a : $\Delta_q(\lambda) = \frac{1}{2}(x_1(\pi,w) + x_2'(\pi,w)) = \frac{1}{2}\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(\pi,w) + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n'(\pi,w)\right)$.

Or, $\frac{1}{2}(u_0(\pi,w) + v_0'(\pi,w)) = \cos\left(\sqrt{\lambda}w\right) = \Delta_0(\lambda)$, donc :

$$|\Delta_q(\lambda) - \Delta_0(\lambda)| = \frac{1}{2}\left|\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(\pi,w) + \sum_{n=1}^{+\infty} v_n'(\pi,w)\right|$$

donc en utilisant les résultats des questions 10. et 12.(b)) :

$$|\Delta_q(\lambda) - \Delta_0(\lambda)| \leq \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{Q^n \pi^n}{w^n n!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{Q^n \pi^n}{w^n n!}\right)$$

Or

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{Q^n\pi^n}{w^n n!}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{Q^n\pi^n}{w^n n!}\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{Q^n\pi^n}{w^n n!}=\exp\frac{Q\pi}{w}-1$$

donc :

$$\boxed{\left|\Delta_q(\lambda)-\Delta_0(\lambda)\right|\le\exp\left(\frac{Q\pi}{\sqrt{\lambda}}\right)-1}$$

16. Dans cette question on suppose de plus $\int_{[0,\pi]} q = 0$.

(a) On a :

$$u_1(\pi,\omega)+v_1'(\pi,\omega)=\int_0^\pi\frac{\sin(\omega(\pi-s))}{\omega}q(s)\cos(\omega s)ds+\int_0^\pi\cos(\omega(\pi-s))q(s)\frac{\sin(\omega s)}{\omega}ds$$

d'où : $\boxed{u_1(\pi,\omega)+v_1'(\pi,\omega)=\dfrac{\sin(\omega\pi)}{\omega}\displaystyle\int_0^\pi q(s)\,ds=0}$.

(b) On a :

$$\left|\Delta_q(\lambda)-\Delta_0(\lambda)\right|=\frac{1}{2}\left|\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(\pi,w)+\sum_{n=1}^{+\infty}v_n'(\pi,w)\right|$$

donc, en utilisant le résultat précédent :

$$\begin{aligned}\left|\Delta_q(\lambda)-\Delta_0(\lambda)\right| &= \frac{1}{2}\left|\sum_{n=2}^{+\infty}u_n(\pi,w)+\sum_{n=2}^{+\infty}v_n'(\pi,w)\right|\\ &\le \frac{1}{2}\left(\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{Q^n\pi^n}{w^n n!}+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{Q^n\pi^n}{w^n n!}\right)\end{aligned}$$

Or

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{Q^n\pi^n}{w^n n!}+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{Q^n\pi^n}{w^n n!}\right)=\exp\left(\frac{Q\pi}{w}\right)-1-\frac{Q\pi}{w}$$

et ainsi :

$$\left|\Delta_q(\lambda)-\Delta_0(\lambda)\right|\le\exp\left(\frac{Q\pi}{\sqrt{\lambda}}\right)-1-\frac{Q\pi}{\sqrt{\lambda}}$$

ce qui donne

$$\boxed{\Delta_q(\lambda)-\Delta_0(\lambda)\underset{+\infty}{=}O\left(\frac{1}{\lambda}\right)}$$

17. Soit $\alpha>0$.

– Supposons $\alpha<\dfrac{1}{2}$.

Si $\lambda>0$ et $\lambda\notin\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left[(n-\alpha)^2,(n+\alpha)^2\right]$, alors $\sqrt{\lambda}\pi\notin\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[n\pi-\alpha\pi,n\pi+\alpha\pi]$ et alors

$$\left|\cos\left(\sqrt{\lambda}\pi\right)\right|<\left|\cos(\alpha\pi)\right|<1$$

Donc, en utilisant le résultat de la question 15., on a

$$\left|\Delta_q(\lambda)\right|<\left|\Delta_0(\lambda)\right|+\exp\left(\frac{Q\pi}{\sqrt{\lambda}}\right)-1\le\left|\cos(\alpha\pi)\right|+\exp\left(\frac{Q\pi}{\sqrt{\lambda}}\right)-1$$

Comme $\lim_{\lambda \to +\infty} \exp\left(\dfrac{Q\pi}{\sqrt{\lambda}}\right) - 1 = 0$, il existe un réel strictement positif λ_0 tel que :

$$\forall \lambda \geq \lambda_0 \,, \ |\cos(\alpha\pi)| + \exp\left(\frac{Q\pi}{\sqrt{\lambda}}\right) - 1 < 1$$

donc $\boxed{\{\lambda \in [\lambda_0, +\infty[\ | \ |\Delta_q(\lambda)| \geq 1\} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[(n-\alpha)^2 \,;\, (n+\alpha)^2\right] \,,}$ ce qui prouve le résultat.

- Supposons $\alpha \geq \frac{1}{2}$, alors en appliquant le cas précédent à $\alpha_1 = \frac{1}{4}$ par exemple, on a l'existence d'un réel strictement positif λ_0 tel que :

$$\{\lambda \in [\lambda_0, +\infty[\ | \ |\Delta_q(\lambda)| \geq 1\} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[\left(n - \frac{1}{4}\right)^2, \left(n + \frac{1}{4}\right)^2\right]$$

donc a fortiori :

$$\boxed{\{\lambda \in [\lambda_0, +\infty[\ | \ |\Delta_q(\lambda)| \geq 1\} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[(n-\alpha)^2 , (n+\alpha)^2\right]}$$

puisque $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[\left(n - \frac{1}{4}\right)^2, \left(n + \frac{1}{4}\right)^2\right] \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[(n-\alpha)^2 , (n+\alpha)^2\right]$.

Ainsi les intervalles d'instabilité sont "asymptotiquement" centrés sur les carrés d'entiers naturels : ils sont donc "de plus en plus éloignés" sans pouvoir conclure quand à leur diamètre.

I Fonctions harmoniques : quelques propriétés

Q 1. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $i \in [\![1, n]\!]$, l'application $f \in \mathcal{C}^{k+1}(\mathrm{U}) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_i} \in \mathcal{C}^k(\mathrm{U})$ est linéaire.
Donc par composition et somme l'application Δ est linéaire de $\mathcal{C}^2(\mathrm{U})$ vers $\mathcal{C}^0(\mathrm{U})$
or $\mathcal{H}(\mathrm{U})$ est le noyau de cette application linéaire ainsi $\boxed{\mathcal{H}(\mathrm{U}) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{C}^2(\mathrm{U}, \mathbb{R})}$.

Q 2. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur U Ainsi toutes les dérivées partielles de f est aussi de classe $\mathcal{C}^2$ sur U.
Soit $j \in [\![1, n]\!]$. En utilisant le théorème de Schwarz et la linéarité de la dérivation, on a :

$$\Delta\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i^2 \partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^3 f}{\partial x_j \partial x_i^2} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i^2}\right) - \frac{\partial}{\partial x_j}(\Delta f)$$

Comme f est harmonique et par dérivation de la fonction nulle, on a : $\forall x \in \mathrm{U},\ \Delta\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(x) = 0$.

Ainsi $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in \mathcal{H}(\mathrm{U})$. Puis on peut procéder par récurrence ; l'initialisation étant triviale et pour l'hérédité, on utilise ce qui précède en remarquant que :

$$\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^* \text{ et } i_1, \ldots, i_{k+1} \in [\![1, n]\!], \text{ on a : } \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_{k+1}} \partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_{k+1}}}\left(\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}}\right)$$

On a montré $\boxed{\text{toute dérivée partielle à tout ordre de } f \text{ appartient à } \mathcal{H}(\mathrm{U})}$.

Q 3. Analyse : Soit $f \in \mathcal{H}(\mathrm{U})$ telle que $f^2 \in \mathcal{H}(\mathrm{U})$.

Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on a $\frac{\partial f^2}{\partial x_i} = 2f \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}$ et ainsi $\frac{\partial^2 f^2}{\partial x_i^2} = 2f \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + 2\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2$ d'où

$$\Delta(f^2) = 2f \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + 2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2$$

Alors $\forall x \in \mathrm{U},\ \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right)^2 = 0$

Comme il s'agit de sommes de réels positifs, on a $\forall x \in \mathrm{U},\ \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = 0$

donc $\forall x \in \mathrm{U},\ \nabla f(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$ or U est un ouvert connexe par arcs

donc f est constante sur U.

Synthhèse : On suppose que f est constante sur U alors f^2 également d'où

$$\forall x \in \mathrm{U},\ \Delta f(x) = 0 \ \text{ et } \ \Delta\left(f^2\right)(x) = 0$$

Ainsi f et f^2 sont harmoniques sur U.

Conclusion : Si U est connexe par arcs,

$\boxed{\text{les fonctions } f \text{ de } \mathcal{H}(\mathrm{U}) \text{ telles que } f^2 \text{ appartienne aussi à } \mathcal{H}(\mathrm{U}) \text{ sont les fonctions constantes}}$

Q 4. Comme U est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, ceci nous fournit $a = (a_1, \ldots, a_n)$ et $r > 0$ tels que $\mathrm{D}(a, r) \subset \mathrm{U}$.
Ainsi pour tout $t \in]a_1 - r, a_1 + r[$ (ensemble infini), on a $(t, a_2, \ldots, a_n) \in \mathrm{U}$
ainsi $\boxed{\text{la fonction } \varphi : (x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{U} \longmapsto x_1 \in \mathbb{R} \text{ est clairement harmonique sur U sans y être constante}}$.
De plus $\forall x \in \mathrm{U},\ \Delta\left(\varphi^2\right)(x) = 2 \neq 0$ donc $\varphi^2 = \varphi \times \varphi$ n'est pas harmonique sur U.
$\boxed{\text{Le produit de deux fonctions harmoniques n'est pas une fonction harmonique, en général}}$.

II Exemples de fonctions harmoniques

II.A -

Q 5. *Remarque : on a f de classe $\mathcal{C}^2$ par produit car $(x,y) \longmapsto u(x)$ et $(x,y) \longmapsto v(y)$ le sont*

On a $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $0 = \Delta f(x,y) = u''(x)v(y) + u(x)v''(y)$.

Comme v est non identiquement nulle, ceci nous fournit $t \in \mathbb{R}$ tel que $v(t) \neq 0$.

En posant $\lambda = \frac{v''(t)}{v(t)}$, on a alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $u''(x) + \lambda u(x) = 0$

donc $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $0 = \Delta f(x,y) = -\lambda u(x)v(y) + u(x)v''(y) = (v''(y) - \lambda v(y))\, u(x)$.

En prenant $t' \in \mathbb{R}$ tel que $u(t') \neq 0$, on a $\forall y \in \mathbb{R}$, $0 = v''(y) - \lambda v(y)$. Ainsi

$\boxed{\text{il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } u \text{ et } v \text{ soient solutions respectives des équations } z'' + \lambda z = 0 \text{ et } z'' - \lambda z = 0}$.

Q 6. Je note les équations différentielles E_1 : $z'' + \lambda z = 0$ et E_2 : $z'' - \lambda z = 0$.

Si $\lambda = 0$ Les solutions de E_1 (ou E_2) sont les fonctions de la forme $x \mapsto \mathrm{A}x + \mathrm{B}$ avec A et B $\in \mathbb{R}$.

Si $\lambda > 0$ Les solutions de E_1 sont les fonctions de la forme $t \mapsto \mathrm{A}\cos\left(t\sqrt{\lambda}\right) + \mathrm{B}\sin\left(t\sqrt{\lambda}\right)$ avec A et B $\in \mathbb{R}$.

Les solutions de E_2 sont les fonctions de la forme $t \mapsto \mathrm{A}'\,\mathrm{ch}\left(t\sqrt{\lambda}\right) + \mathrm{B}'\,\mathrm{sh}\left(t\sqrt{\lambda}\right)$ avec A' et B' $\in \mathbb{R}$.

Si $\lambda < 0$ Les solutions de E_2 sont les fonctions de la forme $t \mapsto \mathrm{A}\cos\left(t\sqrt{-\lambda}\right) + \mathrm{B}\sin\left(t\sqrt{-\lambda}\right)$ avec A et B $\in \mathbb{R}$.
Les solutions de E_1 sont les fonctions de la forme $t \mapsto \mathrm{A}'\,\mathrm{ch}\left(t\sqrt{-\lambda}\right) + \mathrm{B}'\,\mathrm{sh}\left(t\sqrt{-\lambda}\right)$ avec A' et B' $\in \mathbb{R}$.

Réciproquement : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et u et v solutions non nulles respectives de E_1 : $z'' + \lambda z = 0$ et E_2 : $z'' - \lambda z = 0$.

Alors u et v sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et ainsi $f : (x,y) \longmapsto u(x)v(y)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Et on a : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\Delta f(x,y) = u''(x)v(y) + u(x)v''(y) = \lambda u(x)v(y) - \lambda u(x)v(y) = 0$

donc f est harmonique sur $\mathbb{R}^2$.

Conclusion : Les équations différentielles étant linéaires homogènes d'ordre 2, leurs solutions forment un plan vectoriel.

Une fonction f à variables séparables sur $\mathbb{R}^2$ est harmonique non nulles si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, (A, B) et (A', B') $\in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tels que
si $\lambda = 0$ alors $f : (x,y) \longmapsto (\mathrm{A}x + \mathrm{B})(\mathrm{A}'y + \mathrm{B}')$
si $\lambda > 0$ alors $f : (x,y) \longmapsto \left(\mathrm{A}\cos\left(x\sqrt{\lambda}\right) + \mathrm{B}\sin\left(x\sqrt{\lambda}\right)\right)\left(\mathrm{A}'\,\mathrm{ch}\left(y\sqrt{\lambda}\right) + \mathrm{B}'\,\mathrm{sh}\left(y\sqrt{\lambda}\right)\right)$
si $\lambda < 0$ alors $f : (x,y) \longmapsto \left(\mathrm{A}\,\mathrm{ch}\left(x\sqrt{-\lambda}\right) + \mathrm{B}\,\mathrm{sh}\left(x\sqrt{-\lambda}\right)\right)\left(\mathrm{A}'\cos\left(y\sqrt{-\lambda}\right) + \mathrm{B}'\sin\left(y\sqrt{-\lambda}\right)\right)$

II.B -

Q 7. Les fonctions $(r,\theta) \longmapsto r\cos(\theta)$ et $(r,\theta) \longmapsto r\sin(\theta)$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$ par produits donc la fonction $(r,\theta) \longmapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$ par composantes de plus cette fonction est à valeurs dans l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ où f y est de classe $\mathcal{C}^2$

donc par composition $\boxed{g \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}}$.

Q 8. On utilise la formule de la chaîne dont l'écriture abusive est :

$\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial y} = \cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x} + \sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial g}{\partial \theta} = \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial y} = -r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}$

Ainsi $\boxed{\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + \sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))}$

et $\boxed{\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = -r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))}$

Q 9. On continue à appliquer la formule de la chaîne avec une écriture abusive en servant du calcul ci-dessus : $\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} = \cos(\theta)\left(\cos(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \sin(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) + \sin(\theta)\left(\cos(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \sin(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}\right)$
puis à l'aide du théorème de Schwarz avec f de classe $\mathcal{C}^2$: on a

$$\boxed{\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) = \cos^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + \sin(2\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + \sin^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))}$$

Puis
$\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} = -r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x} - r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y} - r\sin(\theta)\left(-r\sin(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + r\cos(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) + r\cos(\theta)\left(-r\sin(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + r\cos(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$
puis à l'aide du théorème de Schwarz avec f de classe $\mathcal{C}^2$, on a :

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) = -r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) - r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + \\ r^2\sin^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) - r^2\sin(2\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + r^2\cos^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\end{gathered}}$$

Q 10. Soit $(r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$, on a à l'aide des calculs précédents :

$$r^2\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) + r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = r^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\right)$$

On suppose que pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$, $r^2\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) + r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = 0$
avec ce qui précède :

$$\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R},\ \Delta f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = 0$$

Or pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, en prenant $r = \sqrt{x^2+y^2}$,
on a $r > 0$ et il existe $\theta \in \mathbb{R}$, tel que $(x,y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$
et ainsi $\forall (x,y)\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\Delta f(x,y) = 0$ d'où $f \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$.
La réciproque est immédiate. Ainsi on a bien :

$$\boxed{f \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) \text{ si et seulement si, pour tout } (r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R},\ r^2\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) + r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = 0}$$

Q 11. **Analyse :** On considère f une fonction harmoniques radiales de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. On note g comme ci dessus.
On peut alors trouver h fonction définie sur $]0,+\infty[$ telle que $\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$, $g(r,\theta) = h(r)$.
Comme g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$ alors h l'est sur $]0,+\infty[$ et

$$\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R},\ \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) = 0 \text{ et } \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = h'(r) \text{ et } \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) = h''(r)$$

La question précédente donne alors : $\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$, $r^2 h''(r) + rh'(r) = 0$
donc h' est solution sur $]0,+\infty[$ de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 : $tz' + z = 0$.
Une solution évidente est $t \mapsto 1/t$ ce qui nous fournit $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$ tel que $h' : r \longmapsto \mathrm{A}/r$.
Ce qui nous fournit $\mathrm{B} \in \mathbb{R}$ tel que $h : r \longmapsto \mathrm{A}\ln(r) + \mathrm{B}$
donc $g : (r,\theta) \longmapsto \mathrm{A}\ln(r) + \mathrm{B}$ puis $f : (x,y) \longmapsto \mathrm{A}\ln(\sqrt{x^2+y^2}) + \mathrm{B}$.

Synthèse : On suppose qu'il existe A et $\mathrm{B} \in \mathbb{R}$ tels que $f : (x,y) \longmapsto \mathrm{A}\ln(x^2+y^2) + \mathrm{B}$
alors f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et radiale car
la fonction $g : (r,\theta) \longmapsto f(r\cos(\theta), r\sin(\theta) = 2\mathrm{A}\ln(r) + \mathrm{B}$ est indépendante de θ

et on vérifie facilement que $\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$, $r^2 \dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \dfrac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) + r\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = 0$
donc $f \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ d'après Q10.

$\boxed{\text{les fonctions harmoniques radiales de } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \text{ sont les fonctions : } (x,y) \longmapsto \mathrm{A}\ln(x^2+y^2) + \mathrm{B} \text{ avec } \mathrm{A},\mathrm{B} \in \mathbb{R}}$

Q 12. En me servant de la question précédente, on cherche A et B $\in \mathbb{R}$ tels que $\begin{cases} 2\mathrm{A}\ln(r_1) + \mathrm{B} = a \\ 2\mathrm{A}\ln(r_2) + \mathrm{B} = b \end{cases}$

On remarque que $\mathrm{A} = \dfrac{b-a}{2\left(\ln(r_2) - \ln(r_1)\right)}$ et $\mathrm{B} = \dfrac{\ln(r_2)a - \ln(r_1)b}{\ln(r_2) - \ln(r_1)}$ conviennent.
Alors d'après Q11, en prenant

$$\boxed{f : (x,y) \longmapsto \frac{(b-a)\ln(x^2+y^2) + 2\ln(r_2)a - 2\ln(r_1)b}{2\left(\ln(r_2) - \ln(r_1)\right)} \text{ sur } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \text{ on a } \begin{cases} f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \mathbb{R}) \\ \Delta f = 0 \\ f(x,y) = a \text{ si } \|(x,y)\| = r_1 \\ f(x,y) = b \text{ si } \|(x,y)\| = r_2 \end{cases}}$$

II.C -

Q 13. On suppose que f n'est pas identiquement nulle. Ceci nous fournit $r_0 = \|(x_0 + y_0)\|$ tel que $u(r_0) \neq 0$.
Soit $\theta \in \mathbb{R}$ On a $u(r_0)v(\theta + 2\pi) = f(r\cos(\theta+2\pi), r\sin(\theta+2\pi)) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = u(r_0)v(\theta)$
d'où $v(\theta + 2\pi) = v(\theta)$.
Ainsi $\boxed{\text{si } f \text{ n'est pas identiquement nulle, alors } v \text{ est } 2\pi\text{-périodique}}$.

Q 14. On suppose que f est harmonique et non identiquement nulle sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,
On note g comme en II.B. Alors g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$ et

$$\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}, \ \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) = u(r)v''(\theta) \ \text{ et } \ \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = u'(r)v(\theta) \ \text{ et } \ \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) = u''(r)v(\theta)$$

En utilisant Q10 : on a $\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$, $r^2 u''(r)v(\theta) + u(r)v''(\theta) + ru'(r)v(\theta) = 0$

Comme f est non identiquement nulle, il existe $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tel que $v(\theta_0) \neq 0$. En prenant $\lambda = \dfrac{-v''(\theta_0)}{v(\theta_0)}$, alors

$\boxed{u \text{ est solution de l'équation différentielle (II.1) : } r^2 z''(r) + rz'(r) - \lambda z(r) = 0}$.

On choisit $r_0 > 0$ tel que $u(r_0) \neq 0$, on a alors

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \ v''(\theta) + \frac{r_0^2 u''(r_0) + r_0 u'(r_0)}{u(r_0)} v(\theta) = 0$$

comme u est solution de l'équation différentielle (II.1), on a : $\dfrac{r_0^2 u''(r_0) + r_0 u'(r_0)}{u(r_0)} = \lambda$.

Ainsi $\boxed{v \text{ est solution de l'équation différentielle (II.2) : } z''(\theta) + \lambda z(\theta) = 0}$.

II.C.1) On suppose ici que $\lambda = 0$.

Q 15. Les solutions de (II.2) sont les fonctions affines.

$\boxed{\text{Les solutions } 2\pi\text{-périodiques de (II.2) sont les fonctions constantes}}$

Q 16. En faisant comme en Q11. :

$\boxed{\text{Les solutions de (II.1) sur } \mathbb{R}^{+*} \text{ sont les fonctions de la forme } r \longmapsto \mathrm{A}\ln(r) + \mathrm{B}}$

Q 17. D'après Q15. dans le cas où $\lambda = 0$, les fonctions harmoniques à variables polaires séparables sont radiales.
Il est clair que toutes fonctions radiale sur $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$ est à variables polaires séparable. Alors d'après Q11.,

$\boxed{\text{les fonctions harmoniques à variables polaires séparables sont les fonctions : } (x,y) \longmapsto \mathrm{A}\ln(x^2+y^2) + \mathrm{B} \text{ avec } \mathrm{A},\mathrm{B} \in \mathbb{R}}$

II.C.2) On suppose désormais $\lambda \neq 0$.

Q 18. Analyse : Soit $\lambda \in \mathbb{R}*$ tel qu'il existe v solution non nulles 2π-périodiques de (II.2) : $z''(\theta) + \lambda z(\theta) = 0$.

Par l'absurde si $\lambda < 0$, comme en Q6 on peut écrire $v : \theta \longmapsto \mathrm{A}e^{\theta\sqrt{-\lambda}} + \mathrm{B}e^{-\theta\sqrt{-\lambda}}$ avec $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2$.

Si $\mathrm{A} \neq 0$, alors $\lim\limits_{\theta \to +\infty} |v(\theta)| = +\infty$;

Si $\mathrm{A} = 0$, alors $\mathrm{B} \neq 0$ et $\lim\limits_{\theta \to -\infty} |v(\theta)| = +\infty$.

Or $v(\mathbb{R}) = v([0, 2\pi])$ car v est 2π-périodique et d'après le théorème des bornes atteintes v est bornée sur le segment $[0, 2\pi]$ car v y est continue,

d'où v est bornée sur $\mathbb{R}$ ce qui est en contradiction avec les limites

d'où $\lambda > 0$.

Comme en Q6 on peut écrire $v : \theta \longmapsto \mathrm{A}\cos\left(\theta\sqrt{\lambda}\right) + \mathrm{B}\sin\left(\theta\sqrt{\lambda}\right)$ avec $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathbb{R}$

ainsi $v' : \theta \longmapsto -\mathrm{A}\sin\left(\theta\sqrt{\lambda}\right) + \mathrm{B}\cos\left(\theta\sqrt{\lambda}\right)$

or on a $v(0) = v(2\pi)$ et $v'(0) = v'(2\pi)$ donc $\begin{cases} \mathrm{A}\cos\left(2\pi\sqrt{\lambda}\right) = \mathrm{A} \\ \mathrm{B}\cos\left(2\pi\sqrt{\lambda}\right) = \mathrm{B} \end{cases}$

d'où $\cos\left(2\pi\sqrt{\lambda}\right)) = 1$ car $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \neq (0, 0)$

ce qui nous fournit $k \in \mathbb{Z}$ tel que $2\pi\sqrt{\lambda} = k2\pi$

donc $\lambda = k^2$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

Synthèse : Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Prenons $\lambda = k^2$. Alors $\lambda > 0$ et $\sqrt{\lambda} = k$.

Les solution de (II.2) sont les fonctions $\theta \longmapsto \mathrm{A}\cos(k\theta) + \mathrm{B}\sin(k\theta)$ avec $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathbb{R}$.

Elles sont toutes $2\pi/k$ périodiques donc 2π périodiques.

En prenant $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = (1, 0)$, on a une solution non nulle.

Conclusion :

Pour que (II.2) admette des solutions 2π-périodiques non nulles , il faut et il suffit qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\lambda = k^2$

Dans ce cas,

les solutions non nulles 2π-périodiques de (II.2) sont les $\theta \longmapsto \mathrm{A}\cos(k\theta) + \mathrm{B}\sin(k\theta)$ avec $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

Q 19. Soit z de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ On pose $\mathrm{Z} : t \longmapsto z\left(e^t\right)$.

Alors par composition Z est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et on a $\forall r > 0,\ z(r) = \mathrm{Z}(\ln(r))$.

Réciproquement si Z est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ alors $z : r \longmapsto \mathrm{Z}(\ln(r))$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Pour $r > 0$, on a $z(r) = \mathrm{Z}(\ln(r))$ et $z'(r) = \dfrac{\mathrm{Z}'(\ln(r))}{r}$ et aussi $z''(r) = \dfrac{\mathrm{Z}''(\ln(r)) - \mathrm{Z}'(\ln(r))}{r^2}$.

Ainsi $r^2 z''(r) + rz'(r) - \lambda z(r) = \mathrm{Z}''(\ln(r)) - \lambda \mathrm{Z}(\ln(r))$.

Comme ln est bijective de $\mathbb{R}^{+*}$ vers $\mathbb{R}$.

z est solution de (II.1) si et seulement si $\forall t \in \mathbb{R},\ \mathrm{Z}''(t) - \lambda \mathrm{Z}(t) = 0$.

On a déjà vu cette équation en $w : w'' - \lambda w = 0$ (II.1b).

Grâce à la remarque sur la classe $\mathcal{C}^2$, en début de question, on a une bijection (qui à z associe Z)entre les ensembles des solutions de (II.1) et de (II.1b).

Si $\lambda > 0$, les solutions de (II.1), sont les fonctions $r \longmapsto \mathrm{A}\exp\left(\ln(r)\sqrt{\lambda}\right) + \mathrm{B}\exp\left(-\ln(r)\sqrt{\lambda}\right)$ avec $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2$

Si $\lambda < 0$, les solutions de (II.1), sont les fonctions $r \longmapsto \mathrm{A}\cos\left(\ln(r)\sqrt{-\lambda}\right) + \mathrm{B}\sin\left(-\ln(r)\sqrt{-\lambda}\right)$ avec $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2$

Q 20. Analyse : On suppose que f est harmonique à variables polaires séparables non identiquement nulles qui se prolongeant par continuité en 0. Alors d'après les questions précédentes, on peut trouver $k \in \mathbb{N}^*$, $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et $(\mathrm{A}', \mathrm{B}') \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tels que

$$\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R},\ f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = \left(\mathrm{A}' \exp(\ln(r)k) + \mathrm{B}' \exp(-\ln(r)k)\right) \times (\mathrm{A}\cos(k\theta) + \mathrm{B}\sin(k\theta)).$$

Je note $v : \theta \longmapsto \mathrm{A}\cos(k\theta) + \mathrm{B}\sin(k\theta)$ donc $\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R},\ f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = \left(\mathrm{A}'r^k + \mathrm{B}'r^{-k}\right) v(\theta)$.
Il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $v(\alpha) \neq 0$.
Comme il existe $\ell \in \mathbb{R}$, tel que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \ell$ alors $\lim\limits_{r\to 0} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = \ell$
donc $r \longmapsto \mathrm{A}'r^k + \mathrm{B}'r^{-k}$ admet une limite finie en 0 donc $\mathrm{B}' = 0$.

Synthèse On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$, A et B dans $\mathbb{R}$ tel que

$$\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R},\ f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = r^k(\mathrm{A}\cos(k\theta) + \mathrm{B}\sin(k\theta))$$

Remarque : j'ai rajouté la fonction nulle.
Alors f est bien définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ à variables polaires séparables de plus f est alors de classe $\mathcal{C}^2$ d'après l'énoncé (II.C) car $u : r \mapsto r^k$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $v : \theta \longmapsto \mathrm{A}\cos(k\theta) + \mathrm{B}\sin(k\theta)$ est 2π-périodique et $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
On définit g comme en II.B. Pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$:

$$r^2 \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) = k(k-1)g(r,\theta) \quad \text{et} \quad r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = kg(r,\theta) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) = -k^2 g(r,\theta)$$

donc $r^2 \dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \dfrac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) + r\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = 0$ d'où f est harmonique sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ d'après Q10.
De plus $\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R},\ |f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))| \leqslant (|\mathrm{A}| + |\mathrm{B}|)\, r^k$
donc $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x,y)| \leqslant (|\mathrm{A}| + |\mathrm{B}|)(x^2+y^2)^{k/2}$
or $(x^2+y^2)^{k/2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$ donc $f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$.
Ainsi f se prolonge par continuité en 0.

> Les fonctions harmoniques sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ à variables polaires séparables qui se prolongent par continuité en $(0,0)$ sont les fonctions f vérifiant
>
> $$\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R},\ f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = r^k(\mathrm{A}\cos(k\theta) + \mathrm{B}\sin(k\theta))$$
>
> avec $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2$ et $k \in \mathbb{N}^*$

III Principe du maximum faible

III.A -

Q 21. Comme U est bornée, ceci nous fournit $\mathrm{R} > 0$ tel que $\mathrm{U} \subset \overline{\mathrm{D}(0,\mathrm{R})}$
donc comme $\overline{\mathrm{D}(0,\mathrm{R})}$ est fermé alors $\overline{\mathrm{U}} \subset \overline{\mathrm{D}(0,\mathrm{R})}$
donc $\overline{\mathrm{U}}$ est borné et c'est un fermé de $\mathbb{R}^n$ qui est un espace de dimension finie
d'où $\overline{\mathrm{U}}$ est un compact non vide de $\mathbb{R}^n$ or f y est continue.
Ainsi $\boxed{f \text{ admet un maximum en un point } x_0 \in \overline{\mathrm{U}}}$.

Q 22. Par l'absurde on suppose que $x_0 \notin \partial\mathrm{U}$ d'où $x_0 \in \overline{\mathrm{U}} \setminus \partial\mathrm{U}$
or $\partial\mathrm{U} = \overline{\mathrm{U}} \setminus \mathring{\mathrm{U}}$ où $\mathring{\mathrm{U}}$ est l'intérieur de U et $\mathring{\mathrm{U}} = \mathrm{U}$ car U est un ouvert
d'où $x_0 \in \mathrm{U}$ ce qui nous fournit $r > 0$ tel que $\mathrm{D}(x_0, r) \subset \mathrm{U}$.

On a donc : $0 < \Delta f(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0)$.

Ce qui nous fournit $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0) > 0$.

Comme f qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et y admet un maximum en x_0, on a $\nabla f(x_0) = 0$ donc $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0$.

Je note $\varphi : t \longmapsto f(x_0 + te_i)$, où $(e_1, \ldots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$

alors φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-r, r[$ par composition et on a $\varphi'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0$ et $\varphi''(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0) > 0$.

Selon la formule de Taylor-Young, on a $\varphi(t) \underset{t\to 0}{=} \varphi(0) + \frac{\varphi''(0)}{2}t^2 + (t^2)$

ceci nous fournit $\alpha \in]0, r[$, tel que $\forall t \in]-\alpha, \alpha[$, $\varphi(t) - \varphi(0) - \frac{\varphi''(0)}{4}t^2 \geqslant \frac{\varphi''(0)}{4}t^2$

donc $\forall t \in]-\alpha, \alpha[\setminus\{0\}$, $\varphi(t) \geqslant \varphi(0) + \frac{\varphi''(0)}{4}t^2 > \varphi(0)$.

Absurde cas φ admet un maximum en 0 car f admet un maximum en x_0.

Donc $\boxed{x_0 \in \partial \mathrm{U}}$.

Comme $\partial\mathrm{U} \subset \overline{\mathrm{U}}$ donc $f(x_0) = \sup_{y\in\overline{\mathrm{U}}} f(y) \geqslant \sup_{y\in\partial\mathrm{U}} f(y)$ d'où

$$\forall x \in \mathrm{U},\ f(x) \leqslant \sup_{y\in\overline{\mathrm{U}}} f(y) = \sup_{y\in\partial\mathrm{U}} f(y)$$

À l'aide de ce qui est fait ci-dessus on a : $\forall x \in \mathrm{U},\ f(x) \neq \sup_{y\in\partial\mathrm{U}} f(y)$ car $\mathrm{U} = \overline{\mathrm{U}} \setminus \partial\mathrm{U}$.

On en déduit que $\boxed{\forall x \in \mathrm{U},\ f(x) < \sup_{y\in\partial\mathrm{U}} f(y)}$.

III.B -

Q 23. La fonction $\psi : x = (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$

donc ψ est continue sur $\overline{\mathrm{U}}$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur U.

De plus $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\Delta\psi(x) = 2n > 0$ Par somme et par linéarité de Δ, on a :

$\boxed{g_\varepsilon \text{ est continue sur } \overline{\mathrm{U}}, \text{ de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur U, et telle que } \forall x \in \mathrm{U},\ \Delta g_\varepsilon(x) > 0}$.

Q 24. Soit $x \in \mathrm{U}$. Soit $\varepsilon > 0$. On utilise Q22 avec la fonction g_ε donc $g_\varepsilon(x) < \sup_{y\in\partial\mathrm{U}} g_\varepsilon(y)$ (1).

Comme $\overline{\mathrm{U}}$ est bornée, il existe $\mathrm{R} > 0$, tel que $\forall y \in \overline{\mathrm{U}},\ 0 \leqslant \|y\| \leqslant \mathrm{R}$ donc

$$\forall y \in \overline{\mathrm{U}},\ g_\varepsilon(y) = f(y) + \|y\|^2\varepsilon \leqslant f(y) + \mathrm{R}^2\varepsilon \leqslant \sup_{z\in\partial\mathrm{U}} f(z) + \mathrm{R}^2\varepsilon$$

ainsi (1) devient :

$$f(x) \leqslant \sup_{z\in\partial\mathrm{U}} f(z) + \left(\mathrm{R}^2 - \|x\|^2\right)\varepsilon \leqslant \sup_{y\in\partial\mathrm{U}} f(y) + \mathrm{R}^2\varepsilon$$

En passant à la limite quand ε tend vers 0 : on a $\boxed{\forall x \in \mathrm{U},\ f(x) \leqslant \sup_{y\in\partial\mathrm{U}} f(y)}$.

Q 25. On suppose que f_1 et f_2 sont égales sur $\partial\mathrm{U}$ alors $f = f_1 - f_2$, les hypothèses de Q24 et $\forall y \in \partial\mathrm{U},\ f(y) = 0$ donc $\forall x \in \mathrm{U},\ f_1(x) - f_2(x) = f(x) \leqslant 0 = \sup_{y\in\partial\mathrm{U}} f(y)$

En faisant de même avec $f_2 - f_1$, on a $\forall x \in \mathrm{U},\ f_1(x) - f_2(x) \geqslant 0$ d'où $\forall x \in \mathrm{U},\ f_1(x) = f_2(x)$.

$\boxed{\text{Si les fonctions } f_1 \text{ et } f_2 \text{ sont égales sur } \partial\mathrm{U}, \text{ alors } f_1 \text{ et } f_2 \text{ sont égales sur U}}$.

IV Fonctions harmoniques et fonctions développables en série entière

IV.A -

Q 26. On a pour tout $z \in \mathrm{D}(0,\mathrm{R})$, la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$

donc la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égale à R .

Ainsi la fonction $z \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est continue sur $\{z \in \mathbb{C} \mid |z < \mathrm{R}\}$

or la fonction $(x,y) \longmapsto x + \mathrm{i}y$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ car linéaire en dimension finie .

On a montré que, par composition,

si une fonction se développe en série entière sur $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$ où $\mathrm{R} > 0$ alors elle y est continue (1).

D'après le cours la série entière $\sum_{n\geqslant 0} n a_n z^{n-1}$ a également un rayon $\geqslant \mathrm{R}$

donc pour tout $r \in]0,\mathrm{R}[$, la série entière $\sum_{n\geqslant 1} n a_n z^{n-1}$ converge normalement sur $\mathrm{D}(0,r)$ (2).

Soit $y \in]-\mathrm{R},\mathrm{R}[$. Je note $u_n : x \mapsto a_n(x+\mathrm{i}y)^n$ définie sur $\mathrm{I}_y =]-\sqrt{\mathrm{R}-y^2}, \sqrt{\mathrm{R}-y^2}[$
de sorte que $\mathrm{I}_y \times \{y\} \subset \mathrm{D}(0,r)$.

(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I_y.
De plus, $u_n' : x \mapsto n a_n (x+\mathrm{i}y)^{n-1}$ pour $n > 0$ et u_0' est la fonction nulle.

(ii) la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge simplement sur I_y d'après l'énoncé

(iii) Soit $\rho \in]0, \sqrt{\mathrm{R}^2 - y^2}[$.
On a $\forall x \in [-\rho,\rho]$, $|x+\mathrm{i}y| = \sqrt{x^2+y^2} \leqslant \sqrt{\rho^2+y^2} < \mathrm{R}$. Je note $r = \sqrt{\rho^2+y^2}$
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\forall x \in [-\rho,\rho]$, $|u_n'(x)| = |n a_n (x+\mathrm{i}y)^{n-1}| \leqslant n|a_n| r^n$ et $r \in [0,\mathrm{R}[$.
Ainsi d'après (2), la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n'$ converge normalement sur $[-\rho,\rho]$.

donc la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n'$ converge uniformément sur tout segment de I_y

Par théorème avec (i), (ii) et (iii), on a $x \mapsto f(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I_y.

Comme $\mathrm{D}(0,\mathrm{R}) = \bigcup_{z \in]-\mathrm{R},\mathrm{R}[} (\mathrm{I}_z \times \{z\})$ la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x} : (x,y) \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (x+\mathrm{i}y)^{n-1}$ est définie sur $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$

comme la série entière $\sum_{n\geqslant 1} n a_n z^{n-1}$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à R.

Alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$ d'après (1)

et de même $\dfrac{\partial f}{\partial y} : (x,y) \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n \mathrm{i} (x+\mathrm{i}y)^{n-1}$ est continue sur $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$

donc $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathrm{D}(0,\mathrm{R})}$ et $\boxed{\text{ses dérivées partielles se développent en série entière sur } \mathrm{D}(0,\mathrm{R})}$.

Ainsi $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathrm{D}(0,\mathrm{R})}$ par récurrence immédiate.

Q 27. On travaille dans $\mathbb{C}$ plan vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$.
Soit $(x, y) \in \mathrm{D}(0, \mathrm{R})$. En appliquant les calculs de la question précédentes :
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x+\mathrm{i}y)^{n-1}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}(x,y) = -\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x+\mathrm{i}y)^{n-1}$
donc $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$.En prenant parties réelles, et imaginaire, on a :

$$\Delta u(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0 \quad \text{et} \quad \Delta v(x) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

d'où $\boxed{u \text{ et } v \text{ sont harmoniques sur } \mathrm{D}(0,\mathrm{R})}$.

IV.B -

Q 28. On suppose f ne s'annule pas sur $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$, alors $1/f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. (1)
f se développe en série entière sur $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$
donc $\forall (x,y) \in \mathrm{D}(0,\mathrm{R})$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \mathrm{i}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ d'après la propriété admise.
Or $\dfrac{\partial(1/f)}{\partial y}(x,y) = \dfrac{-\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)}{f^2(x,y)}$ et $\dfrac{\partial(1/f)}{\partial x}(x,y) = \dfrac{-\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{f^2(x,y)}$
ainsi $\forall (x,y) \in \mathrm{D}(0,\mathrm{R})$, $\dfrac{\partial(1/f)}{\partial y}(x,y) = \mathrm{i}\dfrac{\partial(1/f)}{\partial x}(x,y)$ (2).
En utilisant la réciproque de la propriété admise : $\boxed{1/f \text{ se développe en série entière sur } \mathrm{D}(0,\mathrm{R})}$.

Q 29. Soit $(x,y) \in \mathrm{D}(0,\mathrm{R})$.
On a : $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \mathrm{i}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ selon la propriété admise.
En prenant partie réelle et imaginaire on a : $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y)$.
De plus en utilisant la dérivation de produits, on a :

$$\Delta(uv)(x,y) = (v(x,y)\Delta u(x,y)) + (u(x,y)\Delta v(x,y)) + 2\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) + 2\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)$$

donc comme u et v sont harmoniques sur $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$ et avec les formules ci-dessus :

$$\Delta(uv)(x,y) = 0 + 0 + 2\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) - 2\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 0$$

Ainsi $\boxed{uv \text{ est harmonique sur } \mathrm{D}(0,\mathrm{R})}$.

IV.C -

Q 30. Comme g est harmonique sur $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$ alors g y est de classe $\mathcal{C}^2$.
Donc h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$ (1).
Soit $(x,y) \in \mathrm{D}(0,\mathrm{R})$.
On a $\dfrac{\partial h}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x,y) - \mathrm{i}\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y)$ et $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) - \mathrm{i}\dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y)$
donc selon le théorème de Schwarz car g est de classe $\mathcal{C}^2$ et comme g est harmonique : on a

$$\mathrm{i}\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \mathrm{i}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x,y) = -\mathrm{i}\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) + \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial h}{\partial y}(x,y) \qquad (2)$$

En utilisant la propriété admise, (1) et (2) donne : $\boxed{h \text{ se développe en série entière sur } \mathrm{D}(0,\mathrm{R})}$.

Q 31. On suppose que g appartient à $\mathcal{H}(\mathrm{D}(0,\mathrm{R}))$.

On définit la fonction h comme en Q30. et ainsi h se développe en série entière sur $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$.

On peut donc trouver une suite complexe (b_n) telle que $\forall(x,y)\in\mathrm{D}(0,\mathrm{R}),\ h(x,y)=\sum_{n=0}^{+\infty} b_n(x+\mathrm{i}y)^n$.

Ainsi la série entière $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ a un rayon $\geqslant \mathrm{R}$ donc il en est de même pour la série entière $g(0,0)+\sum_{n\geqslant 0}\frac{b_n}{n+1}z^{n+1}$.

Ainsi la fonction $\mathrm{H} : (x,y)\longmapsto g(0,0)+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{b_n}{n+1}(x+\mathrm{i}y)^{n+1}$ est définie sur $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$

donc d'après Q26., H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$ et

$$\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x} : (x,y)\longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n(x+\mathrm{i}y)^n = h(x,y) \quad\text{et}\quad \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y} : (x,y)\longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)^n = \mathrm{i}h(x,y)$$

Ainsi $\frac{\partial \operatorname{Re}(\mathrm{H})}{\partial x} : (x,y)\longmapsto \operatorname{Re}(h)(x,y)=\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial \operatorname{Re}(\mathrm{H})}{\partial y} : (x,y)\longmapsto -\operatorname{Im}(h)(x,y)=\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)$

donc la fonctions $g-\operatorname{Re}(\mathrm{H})$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$ de différentielle nulle.

Or $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$ est connexe par arcs donc $g-\operatorname{Re}(\mathrm{H})$ est y est constante or $g-\operatorname{Re}(\mathrm{H})$ est nulle en $(0,0)$

donc $g=\operatorname{Re}(\mathrm{H})$ sur $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$ et H y est développable en série entière.

$\boxed{\text{il existe bien une fonction H se développant en série entière sur } \mathrm{D}(0,\mathrm{R})\text{, telle que } g \text{ est la partie réelle de H}}$.

IV.D -

Q 32. Comme f est développable en série entière sur $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$, ceci nous fournit une suite complexe (a_n) telle que $\forall(x,y)\in\mathrm{D}(0,\mathrm{R}),\ f(x,y)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x+\mathrm{i}y)^n$.

Soit $r\in[0,\mathrm{R}[$. Pour $n\in\mathbb{N}$, on note $u_n : t\longmapsto a_n(r\cos(t)+\mathrm{i}\sin(t))^n = a_n r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$.

(i) Pour chaque $n\in\mathbb{N}$, u_n est continue sur $[0,2\pi]$

(ii) Comme la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge normalement sur tout compact de $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$, on peut montrer comme en Q26., que $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge uniformément sur $[0,2\pi]$

Ainsi par théorème on peut intervertir série et intégrale : $\int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{2\pi} u_n(t)\mathrm{d}t$.

Or $\forall t\in[0,2\pi],\ \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) = f(r\cos(t), r\sin(t))$

et pour $n\in\mathbb{N}$, on a $\int_0^{2\pi} u_n(t)\mathrm{d}t = a_n r^n\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t$

si $n=0$, alors $\int_0^{2\pi} u_n(t)\mathrm{d}t = 2\pi a_0$

et sinon $\int_0^{2\pi} u_n(t)\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}}{n\mathrm{i}}\right]_{t=0}^{t=2\pi} = \frac{1-1}{n\mathrm{i}} = 0$

donc $\int_0^{2\pi} f(r\cos(t), r\sin(t))\,\mathrm{d}t = 2\pi a_0$ or $f(0)=a_0$.

Ainsi $\boxed{\text{pour tout } r\in[0,\mathrm{R}[\text{, on a } f(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r\cos(t), r\sin(t))\,\mathrm{d}t}$.

Q 33. $\boxed{\text{Soit } g \text{ une fonction harmonique sur } \mathrm{D}(0,\mathrm{R}) \text{ et } r \in [0,\mathrm{R}[. \text{ On a } g(0,0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(r\cos(t), r\sin(t))\,\mathrm{d}t}$

on peut écrire $g = \mathrm{Re}(\mathrm{H})$ où H est développable en série entière

alors d'après la question précédente, on a $\mathrm{H}(0) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{H}(r\cos(t), r\sin(t))\,\mathrm{d}t$

On peut alors conclure en prenant la partie réelle de cette égalité.

Q 34. Soit $r \in [0, \mathrm{R}[$, on a $f(0) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(r\cos(t), r\sin(t))\,\mathrm{d}t$ d'après Q32.

La fonction $t \longmapsto f(r\cos(t), r\sin(t))$ est continue sur le segment $[0, 2\pi]$ donc bornée selon le théorème des bornes atteintes

En utilisant l'inégalité de la moyenne (inégalité triangulaire continue), on a :

$$|f(0)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(r\cos(t), r\sin(t))|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(r\cos(t), r\sin(t))|\,\mathrm{d}t$$

donc $\boxed{\forall r \in [0, \mathrm{R}[,\ |f(0)| \leqslant \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(r\cos(t), r\sin(t))|}$

Q 35. On utilise Q33. et on fait comme en Q34. pour obtenir :

$\boxed{\text{Soit } g \text{ une fonction harmonique sur } \mathrm{D}(0,\mathrm{R}) \text{ et } r \in [0,\mathrm{R}[. \text{ On a } |g(0,0)| \leqslant \sup_{t\in\mathbb{R}} |g(r\cos(t), r\sin(t))|}$

Q 36. On suppose que $|f|$ admet un maximum en 0.

Si $f(0,0) = 0$ **alors** f est identiquement nulle et donc constante sur $\mathrm{D}(0, \mathrm{R})$

Si $f(0,0) = 1$ **alors** $\forall (x, y) \in \mathrm{D}(0, \mathrm{R}),\ |f(x, y)| \leqslant 1$.

Je note u et v respectivement les parties réelle et imaginaire de f.

Ainsi $u(0,0) = 1$ et $v(0,0) = 0$.

De plus $\forall (x, y) \in \mathrm{D}(0, \mathrm{R}),\ |u(x, y)| \leqslant |f(x, y)| \leqslant 1$ d'où $\forall (x, y) \in \mathrm{D}(0, \mathrm{R}),\ u(x, y) \leqslant 1$.

D'après Q27., u et v sont harmoniques sur $\mathrm{D}(0, \mathrm{R})$

donc selon Q33., pour $r \in [0, \mathrm{R}[$, on a $u(0) = 1 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} u(r\cos(t), r\sin(t))\,\mathrm{d}t$ donc

$\displaystyle\int_0^{2\pi} (1 - u(r\cos(t), r\sin(t)))\,\mathrm{d}t = 0$ et la fonction $t \longmapsto 1 - u(r\cos(t), r\sin(t))$ est continue et positive sur $[0, 2\pi]$

d'où $\forall r \in [0, \mathrm{R}[\ , \forall t \in [0, 2\pi],\ u(r\cos(t), r\sin(t)) = 1$.

Comme $\mathrm{D}(0, \mathrm{R}) = \{(r\cos(t), r\sin(t)) \mid r \in [0, \mathrm{R}[\ , t \in [0, 2\pi]\}$,

alors $\forall (x, y) \in \mathrm{D}(0, \mathrm{R}),\ u(x, y) = 1$ et $|u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)| \leqslant 1$

donc $\forall (x, y) \in \mathrm{D}(0, \mathrm{R}),\ v(x, y) = 0$ et ainsi $\forall (x, y) \in \mathrm{D}(0, \mathrm{R}),\ f(x, y) = 1$.

Si $f(0,0) \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ **alors** je note $\tilde{f} = \dfrac{1}{f(0,0)} f$.

De sorte que $\tilde{f}$ est développable en série entière sur $\mathrm{D}(0, \mathrm{R})$, $\tilde{f}(0,0) = 1$ et $|\tilde{f}|$ admet un maximum en 0.

En utilisant le cas précédent, on a : $\forall (x, y) \in \mathrm{D}(0, \mathrm{R}),\ \tilde{f}(x, y) = 1$

et donc $\forall (x, y) \in \mathrm{D}(0, \mathrm{R}),\ f(x, y) = f(0, 0)$.

On a montré que $\boxed{\text{si } |f| \text{ admet un maximum en } 0, \text{ alors } f \text{ est constante sur } \mathrm{D}(0, \mathrm{R})}$.

Q 37. Par l'absurde, on suppose que P est un polynôme complexe non constant sans racine dans $\mathbb{C}$.

Donc $\deg \mathrm{P} > 0$ et on peut écrire $\mathrm{P} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \mathrm{X}^i$ où $n \in \mathbb{N}^*, \alpha_n \in \mathbb{C}^*$ et $\alpha_0, \ldots \alpha_{n-1} \in \mathbb{C}$

Pour $z \neq 0$, on a $|P(z)| \geqslant |\alpha_n| \cdot |z|^n \cdot \left(1 - \sum_{i=0}^{n-1} \left|\frac{\alpha_i}{\alpha_n z^{n-i}}\right|\right)$ donc $\lim_{|z| \to +\infty} |P(z)| = +\infty$.
Ceci nous fournit $\rho > 0$ tel que $\forall z \in \mathbb{C},\ |z| \geqslant \rho \Longrightarrow |P(z)| \geqslant |P(0)|$.
La fonction $z \longmapsto |P(z)|$ est continue sur le compact $\overline{D(0,\rho)}$.
Ce qui nous fournit $z_0 \in \overline{D(0,\rho)}$ tel que $\forall z \in \overline{D(0,\rho)},\ |P(z)| \geqslant |P(z_0)|$.
Ainsi $|P(0)| \geqslant |P(z_0)|$ et donc $\forall z \in \mathbb{C},\ |z| \geqslant \rho \Longrightarrow |P(z)| \geqslant |P(z_0)|$.
Ainsi $z \longmapsto |P(z)|$ admet un minimum sur $\mathbb{C}$ atteint en z_0.
Je pose $Q = P(X + z_0)$ alors Q est un polynôme non constant qui ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$ et $z \longmapsto |Q(z)|$ admet un minimum sur $\mathbb{C}$ atteint en 0,
donc la fonction $(x, y) \longmapsto Q(x + iy)$ est une fonction non constante qui ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$ telle que $(x, y) \longmapsto |Q(x + iy)|$ admet un minimum en $(0, 0)$.
Prenons $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ tel que $Q(x_1 + iy_1) \neq Q(0)$.
Je note alors $R = \|(x_1, y_1)\| + 1$, de sorte que $(x, y) \longmapsto Q(x + iy)$ est une fonction non constante sur $D(0, R)$ et $(x, y) \longmapsto |Q(x + iy)|$ y admet un minimum en $(0, 0)$.
De plus $(x, y) \longmapsto Q(x + iy)$ est développable en série entière sur $D(0, R)$ car Q est un polynôme.
Selon Q28., comme Q n'a pas de racine :
la fonction $f : (x, y) \longmapsto \dfrac{1}{Q(x + iy)}$ est développable en série entière sur $D(0, R)$.
De plus $|f|$ admet un maximum en 0, donc f est constante sur $D(0, R)$
d'où $Q(x_1 + iy_1) = \dfrac{1}{f(x_1, y_1)} = \dfrac{1}{f(0, 0)} = Q(0)$ Absurde
d'où $\boxed{\text{le théorème de D'Alembert-Gauss : tout polynôme complexe non constant admet au moins une racine}}$

V Résolution du problème de Dirichlet dans le disque unité de $\mathbb{R}^2$

Q 38. Soit $|z| < 1$. On a $\dfrac{e^{it} + z}{e^{it} - z} = \dfrac{2e^{it} - (e^{it} - z)}{e^{it} - z} = -1 + \dfrac{2}{1 - ze^{-it}}$ or $\left|ze^{-it}\right| < 1$
donc par somme géométrique : $\dfrac{e^{it} + z}{e^{it} - z} = -1 + 2\sum_{k=0}^{+\infty} z^k e^{-kit}$

Ainsi $\boxed{\text{on a le développement en série entière pour } |z| < 1,\ \dfrac{e^{it} + z}{e^{it} - z} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2e^{-kit} z^k}$

Soit $|z| < 1$, je pose $F(z) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} h(t) \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}\, dt$
ce qui est possible car $t \longmapsto h(t)\dfrac{e^{it} + z}{e^{it} - z}$ est continue sur $[0, 2\pi]$
La fonction h est bornée sur le segment $[0, 2\pi]$ car h y est continue.
Ce qui nous fournit $M > 0$ tel que $\forall t \in [0, 2\pi],\ |h(t)| \leqslant M$.
Je pose $u_0 = h$ et pour $n \geqslant 1$, $u_n : t \longmapsto 2e^{-nit} z^n h(t)$.

(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est continue sur $[0, 2\pi]$

(ii) On a $\forall t \in [0, 2\pi],\ |u_0(t)| \leqslant M$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [0, 2\pi],\ |u_n(t)| \leqslant 2M|z|^n$$

or la série $M + \sum_{n \geqslant 1} 2M|z|^n$ converge, donc la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge normalement donc uniformément sur $[0,2\pi]$.

La somme de cette série de fonctions sur $[0,2\pi]$ est $t \longmapsto h(t)\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+z}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-z}$.

Avec (i) et (ii), par théorème de cours, on a

$$2\pi \mathrm{F}(z) = \int_0^{2\pi} h(t)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+z}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-z}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{2\pi} u_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} h(t)\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-n\mathrm{i}t}h(t)\mathrm{d}t\right)z^n$$

Ainsi F est la somme d'une série entière de rayon $\geqslant 1$.
donc la fonction $(x,y)\longmapsto \mathrm{F}(x+\mathrm{i}y)$ est développable en série entière sur $\mathrm{D}(0,1)$.
Or $g=\mathrm{Re}(\mathrm{F})$ donc d'après Q27, $\boxed{\text{la fonction } (x,y)\mapsto g(x+\mathrm{i}y) \text{ est une fonction harmonique sur } \mathrm{D}(0,1)}$.

Q 39. Soit $|z|<1$.
On applique le calcul précédent avec la fonction h constante égale à 1 qui est bien continue 2π-périodique :

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+z}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-z}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 1\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-n\mathrm{i}t}\mathrm{d}t\right)z^n = 2\pi$$

car pour $k\in\mathbb{Z}^*$, on a $\displaystyle\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{k\mathrm{i}t}\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{k\mathrm{i}t}}{k\mathrm{i}}\right]_{t=0}^{t=2\pi} = \frac{1-1}{k\mathrm{i}} = 0$.

En en prenant la partie réelle : $\boxed{\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\mathcal{P}(t,z)\,\mathrm{d}t = 1}$.

Q 40. Soit $|z|<1$.
La fonction $t\longmapsto h(t)\mathcal{P}(t,z)$ est continue et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$.
La fonction $\psi : \alpha\mapsto \displaystyle\int_\alpha^{\alpha+2\pi} h(t)\mathcal{P}(t,z)\,\mathrm{d}t$ est alors de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ par le théorème fondamental de l'analyse de dérivée :

$$\psi' : \alpha\longmapsto h(\alpha+2\pi)\mathcal{P}(\alpha+2\pi,z)-h(\alpha)\mathcal{P}(\alpha,z)=0$$

donc ψ est constante sur $\mathbb{R}$ d'où $\psi(0)=\psi(\varphi)$ ainsi $\boxed{g(z)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\varphi^{\varphi+2\pi} h(t)\mathcal{P}(t,z)\,\mathrm{d}t}$

Q 41. Soit $r\in[0,1[$ et t et $\theta\in\mathbb{R}$. En notant $z=r\mathrm{e}^{i\theta}$ on a bien $|z|<1$.
On a $\mathcal{P}(t,r\mathrm{e}^{i\theta}) = \mathrm{Re}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+r\mathrm{e}^{i\theta}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-r\mathrm{e}^{i\theta}}\right) = \dfrac{\mathrm{Re}\left((\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+r\mathrm{e}^{i\theta})(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}-r\mathrm{e}^{-i\theta})\right)}{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-r\mathrm{e}^{i\theta})(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}-r\mathrm{e}^{-i\theta})}$
On a $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+r\mathrm{e}^{i\theta})(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}-r\mathrm{e}^{-i\theta}) = 1-r^2+r\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}-r\mathrm{e}^{-i\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = 1-r^2+2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\left(r\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\right)$
donc $\mathrm{Re}\left((\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+r\mathrm{e}^{i\theta})(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}-r\mathrm{e}^{-i\theta})\right) = 1-r^2$
et $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-r\mathrm{e}^{i\theta}\right)\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}-r\mathrm{e}^{-i\theta}\right) = 1+r^2-r\left(\exp(\mathrm{i}(\theta-t))+\exp(\mathrm{i}(t-\theta))\right) = 1+r^2-2r\cos(t-\theta)$.

On a bien $\boxed{\mathcal{P}(t,r\mathrm{e}^{i\theta}) = \dfrac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\theta)+r^2}}$.

Q 42. *On peut faire plus simple par majoration en utilisant la question Q41.*
Soit $\delta\in]0,\pi[$.
Je note pour $|z|<1$, $\mathrm{F}_z : t\longmapsto \mathcal{P}(t,z)$ définie sur $[\delta, 2\pi-\delta]$.

(i) Pour tout $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|<1$, la fonction F_z est continue sur $[\delta,2\pi-\delta]$.

(ii) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$ et $\mathrm{Re}(z) > 0$.
On se place sur $\{Z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(Z) > 0 \ \text{ et } \ |Z| < 1\}$ qui est un voisinage de 1 relatif à $\{Z \in \mathbb{C} \mid |Z| < 1\}$
On note $z = re^{i\theta}$ où $r < 0$ et $\theta \in] -\pi/2, \pi/2[$.
Quand $z \longrightarrow 1$, on a $\theta = \arccos\left(\dfrac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}\right) \longrightarrow 0$ et $1 - r^2 \longrightarrow 0$.
Pour $t \in [\delta, 2\pi - \delta]$, on a $1 - 2r\cos(t-\theta) + r^2 \longrightarrow 2 - 2\cos(\delta)$ donc $\mathcal{P}(t,z) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\theta)+r^2} \longrightarrow 0$
donc la famille de fonctions $(\mathrm{F}_z)_z$ "converge simplement" sur $[\delta, 2\pi - \delta]$ vers la fonction $t \longmapsto 0$ quand z tend vers 1.

(iii) la fonction $t \longmapsto 0$ est continue sur $[\delta, 2\pi - \delta]$

(iv) Je note $\mathrm{V}_\delta = \{Z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(Z) > \cos(\delta/2) \ \text{ et } \ |Z| < 1\}$ qui est un voisinage de 1 relatif à $\{Z \in \mathbb{C} \mid |Z| < 1\}$
Soit $z \in \mathrm{V}_\delta$. Soit $t \in [\delta, 2\pi - \delta]$.
On a $\mathrm{F}_z(t) = \mathcal{P}(t, re^{i\theta}) = \dfrac{1 - |z|^2}{|e^{it} - z|^2}$ d'après le calcul fait en Q.43.
donc $|\mathrm{F}_z(t)| = \dfrac{1-|z|^2}{|e^{it} - z|^2}$ or $0 \leqslant 1 - |z|^2 \leqslant 1$ et $|e^{it} - z| \geqslant \mathrm{Re}\left(-e^{it} + z\right) \geqslant \cos(\delta/2) - \cos(\delta) > 0$
d'où l'hypothèse de domination :

$$\forall z \in \mathrm{V}_\delta, \ \forall t \in [\delta, 2\pi - \delta], \ |\mathrm{F}_z(t)| \leqslant \frac{1}{(\cos(\delta/2) - \cos(\delta))^2}$$

et $t \longmapsto \dfrac{1}{(\cos(\delta/2) - \cos(\delta))^2}$ est continue et intégrable sur le segment $[\delta, 2\pi - \delta]$

Conclusion : Avec (i), (ii), (ii) et (iv), l'extension du théorème de convergence dominée s'applique

$$\int_\delta^{2\pi-\delta} \mathcal{P}(t,z)\,\mathrm{d}t \underset{z\to 1}{\longrightarrow} 0$$

Soit maintenant $\varphi \in \mathbb{R}$, on a par changement de variable de classe $\mathcal{C}^1$: $u = t - \varphi$, $\mathrm{d}u = \mathrm{d}t$:
$\displaystyle\int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} \mathcal{P}(t,z)\,\mathrm{d}t = \int_\delta^{2\pi-\delta} \mathcal{P}(u+\varphi, z)\,\mathrm{d}u \int_\delta^{2\pi-\delta} \mathcal{P}(t, ze^{-i\varphi})\,\mathrm{d}t$
Quand $z \longrightarrow e^{i\varphi}$, on a $ze^{-i\varphi} \longrightarrow 1$,
donc en utilisant la limite précédente par composition : $\boxed{\displaystyle\int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} \mathcal{P}(t,z)\,\mathrm{d}t \underset{z\to e^{i\varphi}}{\longrightarrow} 0}$

Q 43. Soit $\varepsilon > 0$. On considère $\delta > 0$.
Soit $\varphi \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$.
On a selon Q39., $2\pi = \displaystyle\int_0^{2\pi} \mathcal{P}(t,z) = \int_{\varphi-\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} \mathcal{P}(t,z)\,\mathrm{d}t$ en faisant comme en 40.
d'où $2\pi h(\varphi) = \displaystyle\int_{\varphi-\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} \mathcal{P}(t,z)h(\varphi)\,\mathrm{d}t$.
Ainsi $2\pi|g(z) - h(\varphi)| = \left|\displaystyle\int_{\varphi-\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} (h(t)\mathcal{P}(t,z) - h(\varphi)\mathcal{P}(t,z))\,\mathrm{d}t\right|$ d'après Q40.
Avec la relation de Chasles et l'inégalité triangulaire et comme $\mathcal{P}(t,z) \geqslant 0$ pour $t \in \mathbb{R}$, on a

$$2\pi|g(z) - h(\varphi)| \leqslant \int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} |h(t) - h(\varphi)|\,\mathcal{P}(t,z)\mathrm{d}t + \int_{\varphi-\delta}^{\varphi+\delta} \mathcal{P}(t,z)\,|h(t) - h(\varphi)|\,\mathrm{d}t$$

La fonction h est continue sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique donc elle est uniformément continue sur le segment $[0,4\pi]$ selon le théorème de Heine. ce qui nous fournit $\delta\in]0,\pi/2]$ tel que

$$\forall t,t'\in[0,4\pi],\ |t-t'|\leqslant\delta\Longrightarrow|h(t)-h(t')|\leqslant\frac{\varepsilon}{2\pi}$$

Ainsi ce δ que nous choisissons ne dépend que de ε, on a en plaçant t et t' dans le bon intervalle $[2k\pi,(2k+4)\pi]$:

$$\forall t,t'\in\mathbb{R},\ |t-t'|\leqslant\delta\Longrightarrow|h(t)-h(t')|\leqslant\frac{\varepsilon}{2\pi}$$

on a donc $\forall t\in[\varphi-\delta,\varphi+\delta],\ |h(t)-h(\varphi)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2\pi}$
et ainsi

$$0\leqslant\int_{\varphi-\delta}^{\varphi+\delta}\mathcal{P}(t,z)\,|h(t)-h(\varphi)|\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{\varphi-\delta}^{\varphi+\delta}\mathcal{P}(t,z)\mathrm{d}t$$

or $0\leqslant\int_{\varphi-\delta}^{\varphi+\delta}\mathcal{P}(t,z)\mathrm{d}t\leqslant\int_{\varphi-\delta}^{\varphi-\delta+2\pi}\mathcal{P}(t,z)\mathrm{d}t\leqslant2\pi$ d'après Q39.
et donc en choisissant ce δ, on a : pour tout nombre réel φ et tout nombre complexe z vérifiant $|z|<1$, on a bien

$$0\leqslant\int_{\varphi-\delta}^{\varphi+\delta}\mathcal{P}(t,z)\,|h(t)-h(\varphi)|\,\mathrm{d}t\leqslant\varepsilon$$

Soit $\varphi\in\mathbb{R}$ et $z\in\mathbb{C}$ vérifiant $|z|<1$.
On a déjà vu que h est borné sur $[0,2\pi]$ or comme h est périodique $h([0,2\pi])=h(\mathbb{R})$ donc h est bornée sur $\mathbb{R}$.
Ainsi pour tout $t\in\mathbb{R}$, $|h(t)-h(\varphi)|\leqslant2\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}|h(t)|$
et donc $\int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta}|h(t)-h(\varphi)|\,\mathcal{P}(t,z)\mathrm{d}t\leqslant2\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}|h(t)|\int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta}\mathcal{P}(t,z)\ \mathrm{d}t$.
Ainsi pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\delta>0$ tel que, pour tout nombre réel φ
et tout nombre complexe z vérifiant $|z|<1$, $\boxed{|g(z)-h(\varphi)|\leqslant\frac{\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}|h(t)|}{\pi}\int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta}\mathcal{P}(t,z)\ \mathrm{d}t+\varepsilon}$

Q 44. On va établir l'existence et l'unicité.

Unicité Soit f_1 et f_2 deux solutions du problème de Dirichlet.
Je note $\mathrm{U}=\mathrm{D}(0,1)$ ainsi $\partial\mathrm{U}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid\|(x,y)\|=1\}$.
Les fonctions f_1 et f_2 sont continues sur $\overline{\mathrm{U}}$, de classe $\mathcal{C}^2$ et harmonique sur U et égales sur $\partial\mathrm{U}$ car $\forall t\in\mathbb{R},\ f_1(\cos(t),\sin(t))=h(t)=f_2(\cos(t),\sin(t))$.
Ainsi Q25. s'applique et on a f_1 f_2 égale sur U donc sur $\overline{\mathrm{D}(0,1)}$.

Existence : Je considère f définie sur $\overline{\mathrm{D}(0,1)}$ par :
pour $(x,y)\in\mathrm{D}(0,1)$, $f(x,y)=g(x+\mathrm{i}y)$ et pour $t\in\mathbb{R}$, $f(\cos(t),\sin(t))=h(t)$.
Selon Q38. f est $\mathcal{C}^2$ et harmonique sur $\mathrm{D}(0,1)$, il reste à établir la continuité de f en tout point de $\partial\mathrm{D}(0,1)$.
Soit $a\in\partial\mathrm{D}(0,1)$. On peut écrire $a=(\cos(\varphi),\sin(\varphi))$ avec $\varphi\in\mathbb{R}$.
Soit $\varepsilon>0$.
Je prends $\delta>0$ comme à la question précédente.
On a quand $(x,y)\longrightarrow a$ avec $\|(x,y)\|<1$, $x+\mathrm{i}y\longrightarrow\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$
donc $|f(x,y)-f(a)|=|g(x+\mathrm{i}y)-h(\varphi)|\leqslant\frac{\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}|h(t)|}{\pi}\int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta}\mathcal{P}(t,z)\ \mathrm{d}t+\varepsilon$.
Or $\frac{\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}|h(t)|}{\pi}\int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta}\mathcal{P}(t,z)\ \mathrm{d}t\longrightarrow0$ d'après Q42.

ce qui nous fournit V_1 un voisinage de a, tel que $\forall (x, y) \in V_1 \cap D(0,1)$, $|f(x,y) - f(a)| \leqslant 2\varepsilon$
de plus l'application définie sur $D(a,1) \cap \partial D(0,1)$: $(\cos(t), \sin(t)) \mapsto t$ est continue en utilisant soit arccos soit arcsin.
Ainsi la fonction f est continue en a sur $\partial D(0,1)$ par composition avec h.
ce qui bous fournit V_2 un voisinage de a relatif $\partial D(0,1)$ tel que $\forall (x, y) \in V_2$, $|f(x,y) - f(a)| \leqslant 2\varepsilon$
d'où $\forall (x,y) \in V_2 \cup (V_1 \cap D(0,1))$, $|f(x,y) - f(a)| \leqslant 2\varepsilon$.
Comme $V_2 \cup (V_1 \cap D(0,1))$ est un voisinage de a relatif à $\overline{D(0,1)}$,
On a bien la continuité voulue en a ce qui termine ce problème.

Eléments de correction

Partie I : Une interprétation du jacobien

1. Soit $(A,b) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \times \mathbf{R}^n$. On définit l'application f sur $\mathbf{R}^n$ par
$$\forall x \in \mathbf{R}^n,\ f(x) = Ax + b$$
Avec des notations explicites, on a
$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \forall x \in \mathbf{R}^n,\ f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j + b_i$$
Les fonctions $f_1, \ldots, f_n$ sont des polynômes, donc notamment de classe C^1 sur $\mathbf{R}^n$. Par conséquent f est de classe C^1 sur $\mathbf{R}^n$ et
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \forall x \in \mathbf{R}^n,\ \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = a_{i,j}$$
ou encore
$$\boxed{\forall x \in \mathbf{R}^n,\ J_f(x) = A}$$

2. Dans cette question, g désigne une fonction de classe C^1 de $\mathbf{R}^n$ sur $\mathbf{R}$.
On fixe un élément a de $\mathbf{R}^n$ et l'on note $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ et on définit la fonction φ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ par
$$\forall t \in \mathbf{R},\ \varphi(t) = g(ta) = g(ta_1, ta_2, \ldots, ta_n)$$
En notant ψ la fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^n$ définie par
$$\forall t \in \mathbf{R},\ \psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t), \ldots, \psi_n(t)) = (ta_1, ta_2, \ldots, ta_n) = ta$$
on a $\varphi = g \circ \psi$ et, par théorème de cours, φ est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ et φ' sa calcule à l'aide d'une dérivation en chaîne, ce qui donne
$$\forall t \in \mathbf{R},\ \varphi'(t) = \sum_{j=1}^{n} D_i g(ta)\, \psi_j'(t) = \sum_{j=1}^{n} D_i g(ta)\, a_j$$
ou encore
$$\forall t \in \mathbf{R},\ \varphi'(t) = dg(\psi(t)) \cdot \psi'(t) \qquad \text{ou} \qquad \forall t \in \mathbf{R},\ \varphi'(t) = \left(\overrightarrow{\mathrm{grad}} g(\psi(t)) \mid \psi'(t)\right)$$
Le développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0 de la fonction φ, à savoir $\varphi(t) =_0 \varphi(0) + t\varphi'(0) + o(t)$, s'écrit
$$g(ta) = g(0) + t\sum_{i=1}^{n} a_i D_i g(0) + o(t) \tag{1}$$

3. Dans cette question, f est une fonction, de classe C^1 de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$, vérifiant $f(0) = 0$.

   (a) Soient $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ des fonctions définies continues sur $\mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathbf{R}^n$: on considère la fonction Φ définie sur $\mathbf{R}$ par
$$\forall t \in \mathbf{R},\ \Phi(t) = \det(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t))$$
D'une part la fonction $\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & (\mathbf{R}^n)^n \\ t & \longmapsto & (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)) \end{array}$ est continue sur $\mathbf{R}$ (puisque ses fonctions coordonnées le sont). D'autre part la fonction déterminant, fonction $n-$linéaire sur un espace vectoriel de dimension finie, est continue sur $(\mathbf{R}^n)^n$. Ainsi la fonction Φ est la composée de deux fonctions continues, donc est continue sur $\mathbf{R}$.

(b) Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. D'après la relation (1) de la question 2., on peut écrire

$$f_i(te_j) =_0 f_i(0) + tD_jf_i(0) + o(t) =_0 tD_jf_i(0) + o(t)$$

puis

$$f(te_j) =_0 tD_jf(0) + o(t)$$

Ensuite, par $n-$ linéarité du déterminant, on obtient

$$\det(f(te_1), f(te_2), \ldots, f(te_n)) =_0 t^n \det(D_1f(0) + o(1), D_2f(0) + o(1), \ldots, D_nf(0) + o(1))$$

Ainsi, selon le (a), on a

$$\det(f(te_1), f(te_2), \ldots, f(te_n)) =_0 t^n (\det(D_1f(0), D_2f(0), \ldots, D_nf(0)) + o(1)) = t^n \operatorname{jac}_f(0) + o(t^n)$$

Finalement, ayant $\forall t \in \mathbb{R},\ \det(te_1, te_2, \ldots, te_n) = t^n$, on en déduit

$$\boxed{\lim_{t\to 0} \frac{\det(f(te_1), f(te_2), \ldots, f(te_n))}{\det(te_1, te_2, \ldots, te_n)} = \operatorname{jac}_f(0)}$$

(c) Dans le cas $n=2$, on a $|\operatorname{jac}_f(0)| = |\det(D_1f(0), D_2f(0))|$: la valeur absolue du jacobien de f en 0 est égale à l'aire du parallélogramme de sommets $(0,0)$, $D_1f(0)$, $D_2f(0)$ et $D_1f(0) + D_2f(0)$.
Dans le cas $n=3$, on a $|\operatorname{jac}_f(0)| = |\det(D_1f(0), D_2f(0), D_3f(0))|$: la valeur absolue du jacobien de f en 0 est égale au volume du parallélépipède de sommets $(0,0,0)$, $D_1f(0)$, $D_2f(0)$, $D_1f(0) + D_2f(0)$, $D_1f(0) + D_3f(0)$, $D_2f(0) + D_3f(0)$ et $D_1f(0) + D_2f(0) + D_3f(0)$.

Partie II : Une interprétation de la divergence dans un cas particulier

Dans cette partie, A est une matrice carrée d'ordre 2, à coefficients réels, et on pose

$$\forall x \in \mathbb{R}^2,\ f(x) = Ax$$

1. D'après la question I 1., pour tout x appartenant à $\mathbb{R}^2$, on a $J_f(x) = A$. Par conséquent

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^2,\ \operatorname{div}_f(x) = \operatorname{tr}(A)}$$

Pour tout élément a de $\mathbb{R}^2$, on note u_a la solution sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy

$$X' = AX \qquad X(0) = a$$

c'est-à-dire que u_a est l'unique fonction, de classe C^1, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ vérifiant

$$u_a(0) = a \qquad \forall t \in \mathbb{R},\ u_a'(t) = Au_a(t)$$

Plus précisément, selon le cours, on a $\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ u_a(t) = \exp(tA)\,a}$.

2. Dans cette question, on suppose la matrice A diagonale

$$A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

(a) Notons $a = (a_1, a_2)$. Pour tout réel t, la matrice tA est diagonale et

$$\forall t \in \mathbb{R},\ u_a(t) = \exp(tA)\,a = \left(a_1e^{\lambda_1 t}, a_2e^{\lambda_2 t}\right)$$

Soient $(a,b) \in \left(\mathbb{R}^2\right)^2$. Avec des notations explicites, on peut écrire

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \det(u_a(t), u_b(t)) = \begin{vmatrix} a_1e^{\lambda_1 t} & b_1e^{\lambda_1 t} \\ a_2e^{\lambda_2 t} & b_2e^{\lambda_2 t} \end{vmatrix} = \det(a,b)\,e^{(\lambda_1+\lambda_2)t}$$

Comme $\det(u_a(0), u_b(0)) = \det(a,b)$, la fonction div_f étant constante, on aboutit à

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ \det(u_a(t), u_b(t)) = \exp(t \operatorname{div}_f(a)) \det(u_a(0), u_b(0))}$$

(b) Pour tout réel t, notons $\mathcal{A}(t)$ l'aire du parallélogramme de sommets $(0,0)$, $u_a(t)$, $u_b(t)$ et $u_a(t) + u_b(t)$. Ainsi qu'on l'a déjà vu, on a $\forall t \in \mathbb{R},\ \mathcal{A}(t) = |\det(u_a(t), u_b(t))|$: la fonction $\mathcal{A}$ est donc strictement croissante si $\operatorname{div}_f(a) > 0$, strictement décroissante si $\operatorname{div}_f(a) < 0$ et constante si $\operatorname{div}_f(a) = 0$.

3. *Exemple.* Dans cette question, on suppose toujours $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$.

(a) On pose $a = (a_1, a_2)$ et $\forall t \in \mathbb{R},\ u_a(t) = (x_1(t), x_2(t))$ et on suppose $\lambda_1 \neq 0$ ainsi que $a_1 > 0$. D'après la question précédente, on a

$$\forall t \in \mathbb{R},\ x_1(t) = a_1 e^{\lambda_1 t} \qquad x_2(t) = a_2 e^{\lambda_2 t}$$

Par conséquent la fonction θ_a demandée est définie par

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \theta_a(x) = a_2 \left(\frac{x}{a_1}\right)^{\lambda_2/\lambda_1}}$$

(b) Dans cette question, on étudie la cas $a = (2,1)$ et $b = (1,2)$. Dans les trois cas proposés par l'énoncé, on obtient :

(i) $(\lambda_1, \lambda_2) = (1,2) : \forall x \in \mathbb{R}_+,\ \theta_a(x) = \dfrac{x^2}{4},\ \theta_b(x) = 2x^2,\ \theta_{a+b}(x) = \dfrac{x^2}{3}$.

(ii) $(\lambda_1, \lambda_2) = (1,-2) : \forall x \in \mathbb{R}_+,\ \theta_a(x) = \dfrac{4}{x^2},\ \theta_b(x) = \dfrac{2}{x^2},\ \theta_{a+b}(x) = \dfrac{27}{x^2}$.

(iii) $(\lambda_1, \lambda_2) = (1,-1) : \forall x \in \mathbb{R}_+,\ \theta_a(x) = \dfrac{2}{x} = \theta_b(x),\ \theta_{a+b}(x) = \dfrac{9}{x}$.

Les schémas demandés figurent en annexe à la fin du corrigé.

4. (a) On se place dans le cas où A est triangulaire (avec $\mu \neq 0$) de la forme $A = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Notons $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ nilpotente, d'indice de nilpotence égal à 2. Pour tout réel t, les matrices I_2 et N commutant, on a ainsi

$$\exp(tA) = \exp(\lambda t I_2 + \mu t N) = e^{\lambda t} \exp(\mu t N) = e^{\lambda t}\left(I_2 + \frac{\mu t}{1!} N\right) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & e^{\lambda t}\mu t \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

Par conséquent

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ u_a(t) = \exp(tA)\, a = \left((a_1 + \mu a_2 t) e^{\lambda t}, a_2 e^{\lambda t}\right)}$$

Soient $(a,b) \in (\mathbb{R}^2)^2$. Avec des notations explicites, on peut écrire

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \det(u_a(t), u_b(t)) = \begin{vmatrix} (a_1 + \mu a_2 t) e^{\lambda t} & (b_1 + \mu b_2 t) e^{\lambda t} \\ a_2 e^{\lambda t} & b_2 e^{\lambda t} \end{vmatrix} = \det(a,b)\, e^{2\lambda t}$$

Comme $\det(u_a(0), u_b(0)) = \det(a,b)$, ayant $\operatorname{div}_f = \operatorname{tr} A = 2\lambda$, on aboutit à

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ \det(u_a(t), u_b(t)) = \exp(t \operatorname{div}_f(a)) \det(u_a(0), u_b(0))}$$

(b) Supposons que le polynôme caractéristique de la matrice A est scindé sur $\mathbb{R}$: A est trigonalisable, voire diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Ainsi il existe une matrice P carrée d'ordre 2 inversible telle que la matrice $P^{-1}AP$ soit égale à une matrice B telle que celle du (a) ou celle de la question 2.. En posant $X = PY$, le problème de Cauchy étudié s'écrit

$$Y' = BY \qquad Y(0) = P^{-1}a$$

Notant v_a la solution de ce problème de Cauchy, on a $u_a = Pv_a$ et les questions précédentes permettent d'écrire

$$\forall t \in \mathbf{R},\ \det(v_a(t), v_b(t)) = \exp(t \operatorname{div}_f(a)) \det(v_a(0), v_b(0))$$

ou encore, pour tout réel t

$$\begin{aligned} \det(u_a(t), u_b(t)) &= \det(P) \det(v_a(t), v_b(t)) \\ &= \exp(t \operatorname{div}_f(a)) \det(P) \det(v_a(0), v_b(0)) = \exp(t \operatorname{div}_f(a)) \det(u_a(0), u_b(0)) \end{aligned}$$

(c) Supposons que le polynôme caractéristique de A ne soit pas scindé sur $\mathbf{R}$. Ce polynôme de degré égal à 2 possède alors deux racines complexes non réelles conjuguées λ et $\overline{\lambda}$. Notamment les valeurs propres de A sont distinctes et la matrice A est diagonalisable dans $\mathbf{C}$. Ensuite on peut adapter les calculs des questions 2. et (b) sans modification puisque, notamment, on a encore

$$\operatorname{div}_f = \operatorname{tr} A = \lambda + \overline{\lambda}$$

En conclusion le résultat précédent s'étend au cas d'une matrice carrée d'ordre 2, à coefficients réels, quelconque.

Partie III : Matrice jacobienne symétrique, antisymétrique

Dans le début de cette partie, f est une fonction, de classe C^2, de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$.

Si i, j, k appartiennent à $[\![1, n]\!]$, la dérivée partielle seconde de f_k par rapport aux variables x_i et x_j en x est notée $D_{i,j} f_k(x)$ ou $\dfrac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}(x)$ ou $f_{i,j,k}(x)$.

1. Par propriété vue en cours, comme f est de classe C^2 sur $\mathbf{R}^n$, il en est de même de ses fonctions coordonnées. Le théorème de Schwarz fournit

$$\forall (i, j, k) \in [\![1, n]\!]^3,\ \forall x \in \mathbf{R}^n,\ f_{i,j,k}(x) = f_{j,i,k}(x)$$

2. Dans cette question, on suppose que pour tout élément x de $\mathbf{R}^n$, la matrice jacobienne $J_f(x)$ est antisymétrique. Soit $x \in \mathbf{R}^n$.

(a) Comme la matrice jacobienne $J_f(x)$ est antisymétrique, on a

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ D_j f_i(x) = -D_i f_j(x)$$

Par conséquent

$$\forall (i, j, k) \in [\![1, n]\!]^3,\ f_{i,j,k}(x) = D_i D_j f_k(x) = -D_i D_k f_j(x) = -f_{i,k,j}(x)$$

(b) Soit $(i, j, k) \in [\![1, n]\!]^3$. En utilisant les deux propriétés obtenues ci-dessus, on obtient

$f_{i,j,k}(x) = -f_{i,k,j}(x) = -f_{k,i,j}(x) = f_{k,j,i}(x) = f_{j,k,i}(x) = -f_{j,i,k}(x) = -f_{i,j,k}(x)$

ce qui donne $f_{i,j,k}(x) = 0$.

(c) Soit $(j, k) \in [\![1, n]\!]^2$. Toutes les dérivées partielles de $D_j f_k$ sont nulles ; signalant que $\mathbf{R}^n$ est convexe, on en déduit que $D_j f_k$ est une constante.

Ainsi la fonction matrice jacobienne J_f est une fonction constante, que l'on peut noter A. Par hypothèse, A est une matrice antisymétrique.

Notons g la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbf{R}^n,\ g(x) = f(x) - Ax$$

Avec des notations claires, on a

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ D_j g_i(x) = D_j f_i(x) - a_{i,j} = 0$$

Ainsi la fonction g est constante (puisque toutes ses fonctions coordonnées le sont).
En conclusion il existe une matrice carrée A d'ordre n, antisymétrique à coefficients réels, et un élément b de $\mathbb{R}^n$ tels que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) = Ax + b}$$

3. Soit f une fonction, de classe C^2, de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.
D'une part, d'après la question précédente, si pour tout élément x de $\mathbb{R}^n$, la matrice jacobienne $J_f(x)$ est antisymétrique, il existe une matrice carrée A d'ordre n, antisymétrique à coefficients réels, et un élément b de $\mathbb{R}^n$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) = Ax + b$.
La réciproque est une conséquence de la question I 1..

4. Dans cette question f est une fonction, de classe C^1, de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.
D'une part, supposons l'existence d'une fonction g, de classe C^2, de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \forall i \in [\![1,n]\!],\ f_i(x) = D_i g(x)$$

Le théorème de Schwarz donne

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ D_j f_i(x) = D_j D_i g(x) = D_i D_j g(x) = D_i f_j(x)$$

et ainsi, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}^n$, la matrice jacobienne $J_f(x)$ est symétrique.
Réciproquement supposons que la matrice jacobienne $J_f(x)$ est symétrique, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}^n$. Suivant l'indication de l'énoncé, considérons l'application g définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ g(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \int_0^1 f_i(tx)\,dt = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(x) \int_0^1 f_i(tx)\,dt$$

($(e_i^*)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est la base duale de la base canonique $\mathcal{B}_n$ de $\mathbb{R}^n$). Commençons par prouver que la fonction g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$. Soit $i \in [\![1,n]\!]$: montrons que la fonction γ_i, $\gamma_i : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_0^1 f_i(tx)\,dt \end{array}$, est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire a des dérivées partielles continues sur $\mathbb{R}^n$. Soient $j \in [\![1,n]\!]$ et $(x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$. On définit la fonction

$$h_{i,j} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (y,t) & \longmapsto & f_i(tx_1,\dots,tx_{j-1},ty,tx_{j+1},\dots,tx_n) \end{array}$$

en vue d'appliquer le théorème de dérivation d'intégrale à paramètre. On a :

- $\forall y \in \mathbb{R},\ h_{i,j}(y,\cdot) \in \mathcal{L}^1([0,1])$ (par continuité sur un segment). On peut alors définir

$$G_{i,j} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \int_0^1 f_i(tx_1,\dots,tx_{j-1},ty,tx_{j+1},\dots,tx_n)\,dt \end{array}$$

- $\forall t \in [0,1]\,,\ h_{i,j}(\cdot,t) \in C^1(\mathbb{R})$ et $\forall (y,t) \in \mathbb{R}\times[0,1]\,,\ \dfrac{\partial h_{i,j}}{\partial y}(y,t) = tD_j f_i(tx_1,\dots,tx_{j-1},ty,tx_{j+1},\dots,tx_n)$
- $\forall y \in \mathbb{R},\ \dfrac{\partial h_{i,j}}{\partial y}(y,\cdot) \in \mathcal{CM}([0,1])$ (par continuité)
- soit K un segment de $\mathbb{R}$: $K\times\ [0,1]$ est un compact sur lequel la fonction $\dfrac{\partial h_{i,j}}{\partial y}$ est bornée, ce qui assure l'hypothèse de domination locale de $\dfrac{\partial h_{i,j}}{\partial y}$

Ainsi le théorème de classe C^1 d'intégrale à paramètre s'applique et la formule de Leibniz s'écrit

$$\forall y \in \mathbb{R},\ G'_{i,j}(y) = D_j\gamma_i(x_1,\ldots,x_{j-1},y,x_{j+1},\ldots,x_n) = \int_0^1 tD_jf_i(tx_1,\ldots,tx_{j-1},ty,tx_{j+1},\ldots,tx_n)\,dt$$

Attention le résultat de cours concerne les fonctions de la variable réelle et assure seulement la continuité partielle de $D_j\gamma_i$ par rapport à la j^{me} variable. En toute rigueur, c'est le théorème de continuité d'intégrale à paramètre appliquée à $D_j\gamma_i$ qui permet de justifier sa continuité sur $\mathbf{R}^n$. Cette vérification, sans difficulté particulière, est laissée en exercice.

On déduit de ce qui précède que, pour tout x appartenant à $\mathbf{R}^n$, on a

$$\begin{aligned} D_jg(x) &= \sum_{i=1}^n D_j(e_i^*\gamma_i)(x) = \gamma_j(x) + \sum_{i=1}^n x_i\int_0^1 tD_jf_i(tx)\,dt = \int_0^1\left(f_j(tx) + t\sum_{i=1}^n x_iD_jf_i(tx)\right)dt \\ &= \int_0^1\left(f_j(tx) + t\sum_{i=1}^n x_iD_if_j(tx)\right)dt \end{aligned}$$

(la dernière égalité étant une conséquence de la symétrie de la matrice $J_f(x)$).

La règle de dérivation en chaîne permet de reconnaître une dérivée "parfaite" dans la dernière intégrale, ce qui donne

$$D_jg(x) = [tf_j(tx)]_0^1 = f_j(x)$$

Enfin comme f est de classe C^1, les dérivées partielles de g sont de classe C^1 et ainsi g est de classe C^2 sur $\mathbf{R}^n$. D'où l'équivalence demandée.

Partie IV : Matrice jacobienne orthogonale

Dans cette partie, f est une fonction, de classe C^2, de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$. De plus, on note

$$\forall(i,j,k) \in [\![1,n]\!]^3,\ \forall x \in \mathbf{R}^n,\ \alpha_{i,j,k}(x) = \sum_{p=1}^n \frac{\partial f_p}{\partial x_i}(x)\frac{\partial^2 f_p}{\partial x_j\partial x_k}(x)$$

1. Dans cette question, on suppose $(\mathcal{P})$.

(a) Par définition d'une matrice orthogonale, on peut écrire ${}^tJ_fJ_f = I_n$, ce qui s'écrit

$$\forall(i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \delta_{i,j} = \sum_{p=1}^n D_if_pD_jf_p$$

Etant donné k appartenant à $[\![1,n]\!]$, la dérivation de cette relation par rapport à x_k fournit

$$\forall(i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ 0 = \sum_{p=1}^n D_{k,i}f_pD_jf_p + \sum_{p=1}^n D_if_pD_{k,j}f_p = \alpha_{j,k,i} + \alpha_{i,k,j}$$

De plus, la fonction f étant supposée de classe C^2, le théorème de Schwarz donne

$$\forall(i,j,k) \in [\![1,n]\!]^3,\ \alpha_{i,j,k} = \alpha_{i,k,j}$$

Finalement on a

$$\boxed{\forall(i,j,k) \in [\![1,n]\!]^3,\ \alpha_{i,j,k} = \alpha_{i,k,j} = -\alpha_{k,j,i}}$$

(b) Une permutation circulaire des indices changeant le signe de ces fonctions, on obtient :

$$\forall(i,j,k) \in [\![1,n]\!]^3,\ \alpha_{i,j,k} = -\alpha_{j,k,i} = \alpha_{k,j,i} = -\alpha_{i,j,k}$$

En conclusion

$$\boxed{\forall(i,j,k) \in [\![1,n]\!]^3,\ \alpha_{i,j,k} = 0}$$

(c) Soit $(j,k) \in [\![1,n]\!]^2$. D'après la question précédente, pour tout i appartenant à $[\![1,n]\!]$ et tout x appartenant à $\mathbb{R}^n$, le vecteur $D_{j,k}f(x)$ est orthogonal à $D_i f(x)$. Comme la matrice $J_f(x)$ est orthogonale, ses vecteurs colonnes forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ et on en déduit

$$\forall (j,k) \in [\![1,n]\!]^2,\ D_{j,k}f = 0$$

Alors, pour tout k appartenant à $[\![1,n]\!]$, la fonction $D_k f$ est constante et il en est de même de la fonction J_f.
Enfin un calcul similaire à celui de la question III 2. (c) permet de justifier l'existence d'une matrice orthogonale A et d'un élément b de $\mathbb{R}^n$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) = Ax + b$.

2. Soit f une fonction, de classe C^2, de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. Selon la question précédente, une condition nécessaire pour que f vérifie la proposition $(\mathcal{P})$ est qu'il existe une matrice orthogonale A et un élément b de $\mathbb{R}^n$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) = Ax + b$.
A nouveau la réciproque est une conséquence de la question I 1..

3. D'une part supposons que $(\mathcal{P})$ est vérifiée. D'après ce qui précède, il existe une matrice orthogonale A et un élément b de $\mathbb{R}^n$, que l'on fixe, tels que $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) = Ax + b$. Soient g une fonction, de classe C^2, de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, de variables notées $y_1, \ldots, y_n$, et $(i,x) \in [\![1,n]\!] \times \mathbb{R}^n$. La règle de dérivation en chaîne donne

$$\frac{\partial g \circ f}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(x)) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(x))\, a_{j,i}$$

puis

$$\frac{\partial^2 g \circ f}{\partial x_i^2}(x) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 g}{\partial y_k \partial y_j}(f(x))\, a_{k,i} a_{j,i}$$

Comme la matrice A est orthogonale, on obtient

$$\Delta_{g\circ f}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 g \circ f}{\partial x_i^2}(x) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 g}{\partial y_k \partial y_j}(f(x)) \sum_{i=1}^{n} a_{k,i}a_{j,i} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 g}{\partial y_k \partial y_j}(f(x))\, \delta_{j,k}$$

Finalement

$$\Delta_{g\circ f}(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 g}{\partial y_j^2}(f(x)) = (\Delta_g) \circ f(x)$$

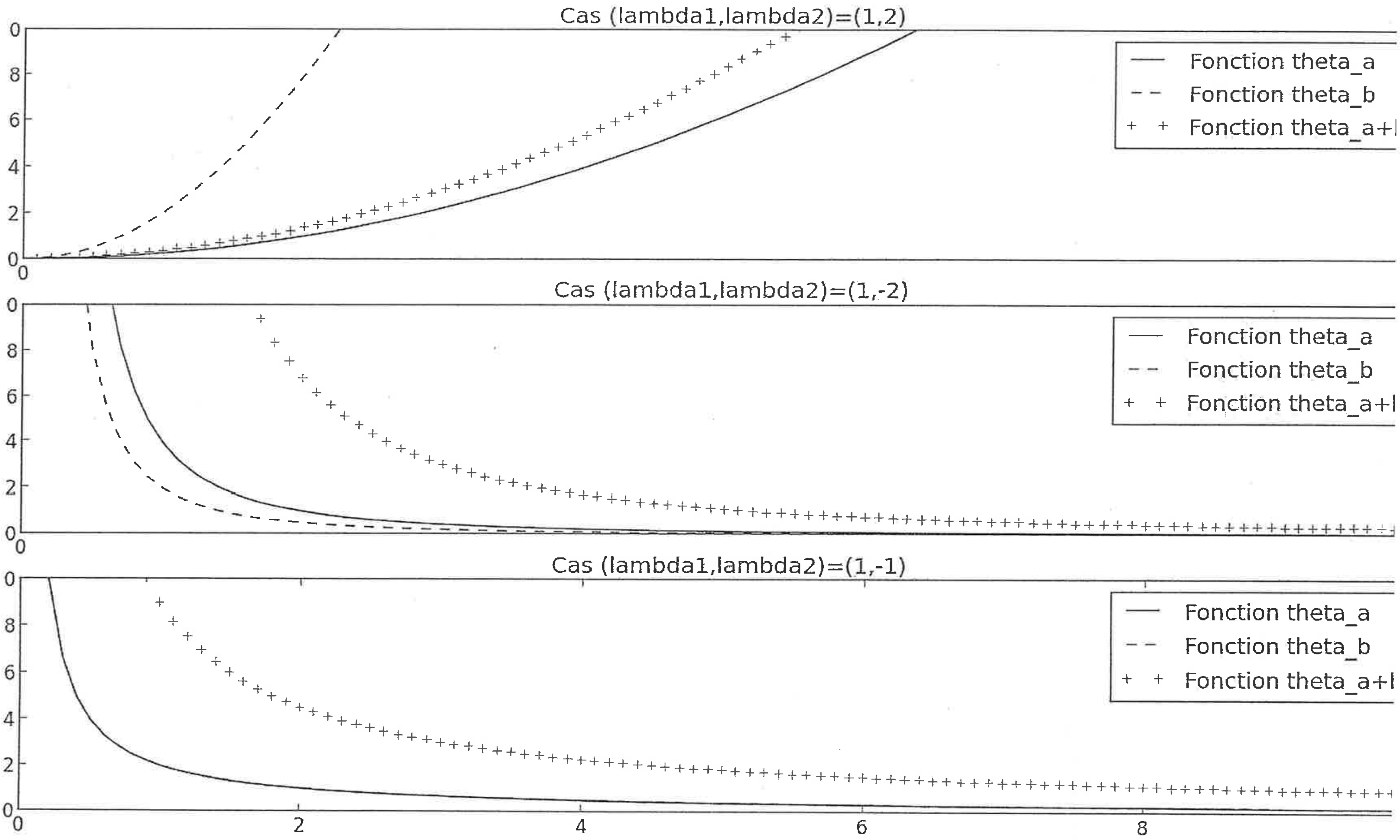
Réciproquement, supposons que pour toute fonction g, de classe C^2, de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, $\Delta_{g\circ f} = (\Delta_g) \circ f$.
Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Remplaçons g par e_i^* (i^{me} forme linéaire coordonnée dans la base $\mathcal{B}_n$). Comme $e_i^* \circ f = f_i$ et $\Delta_{e_i^*} = 0$, on en déduit $\Delta_{f_i} = 0$.
Ensuite remplaçons g par $e_i^* e_j^*$. On a $e_i^* e_j^* \circ f = f_i f_j$ et $\Delta_{e_i^* e_j^*} = 2\delta_{i,j}$. Alors, tenant compte de $\Delta_{f_i} = \Delta_{f_j} = 0$, on trouve

$$\begin{aligned}
\Delta_{e_i^* e_j^* \circ f} &= \Delta_{f_i f_j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 (f_i f_j)}{\partial x_k^2} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k^2} f_j + 2 \frac{\partial f_i}{\partial x_k}\frac{\partial f_j}{\partial x_k} + f_i \frac{\partial^2 f_j}{\partial x_k^2} \right) \\
&= \Delta_{f_i} f_j + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_k}\frac{\partial f_j}{\partial x_k} + f_i \Delta_{f_j} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_k}\frac{\partial f_j}{\partial x_k} = \Delta_{e_i^* e_j^*} \circ f = 2\delta_{i,j}
\end{aligned}$$

Ceci signifie que, pour tout élément x de $\mathbb{R}^n$, la matrice $J_f(x)$ est orthogonale.
D'où l'équivalence demandée.

```
# -*- coding: utf-8 -*-
"""

Courbes du DM Cent14pc

@author: MICHEL
"""

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# cas (lambda1,lambda2)=(1,2)
def ta1(x):
    return 1.0*x**2/4

def tb1(x):
    return 2.0*x**2

def taabb1(x):
    return 1.0*x**2/3

X=np.arange(0,10,0.1)
Ya1=ta1(X)
Yb1=tb1(X)
Yab1=taabb1(X)

plt.subplot(3,1,1)

plt.ylim(0,10)
plt.plot(X,Ya1,'k-',label="Fonction theta_a")
plt.plot(X,Yb1,'k--',label="Fonction theta_b")
plt.plot(X,Yab1,'k+',label="Fonction theta_a+b")

legend(loc='upper right')
plt.xticks([0,10])
plt.title(" Cas (lambda1,lambda2)=(1,2) ")



# cas (lambda1,lambda2)=(1,-2)
def ta2(x):
    return 4.0/x**2

def tb2(x):
    return 2.0/x**2

def taabb2(x):
    return 27.0/x**2

X=np.arange(0,10,0.1)
Ya2=ta2(X)
Yb2=tb2(X)
Yab2=taabb2(X)

plt.subplot(3,1,2)

plt.ylim(0,10)
plt.plot(X,Ya2,'k-',label="Fonction theta_a")
plt.plot(X,Yb2,'k--',label="Fonction theta_b")
plt.plot(X,Yab2,'k+',label="Fonction theta_a+b")
```

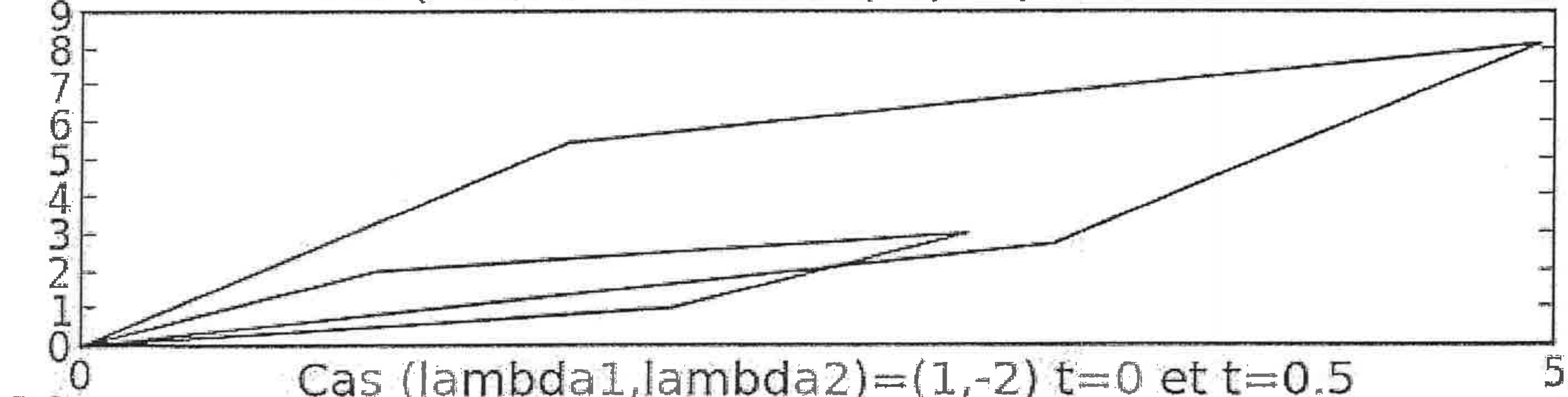
```
legend(loc='upper right')
plt.xticks([0,10])
plt.title(" Cas (lambda1,lambda2)=(1,-2) ")


# cas (lambda1,lambda2)=(1,-1)

def ta3(x):
    return 2.0/x

def tb3(x):
    return 2.0/x

def taabb3(x):
    return 9.0/x

X=np.arange(0,10,0.1)
Ya3=ta3(X)
Yb3=tb3(X)
Yab3=taabb3(X)

plt.subplot(3,1,3)

plt.ylim(0,10)
plt.plot(X,Ya3,'k-',label="Fonction theta_a")
plt.plot(X,Yb3,'k--',label="Fonction theta_b")
plt.plot(X,Yab3,'k+',label="Fonction theta_a+b")

legend(loc='upper right')

plt.title(" Cas (lambda1,lambda2)=(1,-1) ")


plt.show()
```


Cas (lambda1,lambda2)=(1,2)
Fonction theta_a
Fonction theta_b
Fonction theta_a+l
Cas (lambda1,lambda2)=(1,-2)
Fonction theta_a
Fonction theta_b
Fonction theta_a+l
Cas (lambda1,lambda2)=(1,-1)
Fonction theta_a
Fonction theta_b
Fonction theta_a+l
0
2
4
6
8

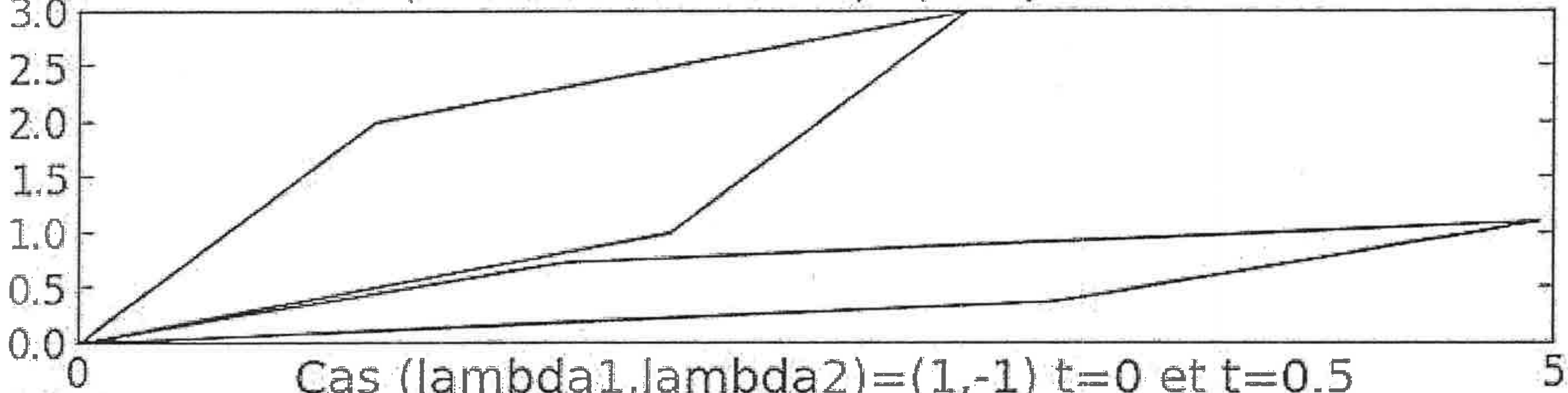
```python
# -*- coding: utf-8 -*-
"""

Parallélogrammes du DM Cent14pc

@author: MICHEL
"""

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# cas (lambda1,lambda2)=(1,2)

def x11(t):
    return 2.0*np.exp(t)

def x21(t):
    return 1.0*np.exp(2.*t)

def y11(t):
    return 1.0*np.exp(t)

def y21(t):
    return 2.0*np.exp(2.*t)

X=np.array([0,x11(0),x11(0)+y11(0),y11(0),0,x11(0.5),x11(0.5)+y11(0.5),y11(0.5),0])
Y=np.array([0,x21(0),x21(0)+y21(0),y21(0),0,x21(0.5),x21(0.5)+y21(0.5),y21(0.5),0])

plt.subplot(3,1,1)

plt.plot(X,Y,'k')

plt.xticks([0,5])
plt.title(" Cas (lambda1,lambda2)=(1,2) t=0 et t=0.5")



# cas (lambda1,lambda2)=(1,-2)

def x12(t):
    return 2.0*np.exp(t)

def x22(t):
    return 1.0*np.exp(-2.*t)

def y12(t):
    return 1.0*np.exp(t)

def y22(t):
    return 2.0*np.exp(-2.*t)

X=np.array([0,x12(0),x12(0)+y12(0),y12(0),0,x12(0.5),x12(0.5)+y12(0.5),y12(0.5),0])
Y=np.array([0,x22(0),x22(0)+y22(0),y22(0),0,x22(0.5),x22(0.5)+y22(0.5),y22(0.5),0])

plt.subplot(3,1,2)

plt.plot(X,Y,'k')

plt.xticks([0,5])
plt.title(" Cas (lambda1,lambda2)=(1,-2) t=0 et t=0.5")
```

```
# cas (Lambda1,lambda2)=(1,-1)

def x13(t):
    return 2.0*np.exp(t)

def x23(t):
    return 1.0*np.exp(-1.*t)

def y13(t):
    return 1.0*np.exp(t)

def y23(t):
    return 2.0*np.exp(-1.*t)

X=np.array([0,x13(0),x13(0)+y13(0),y13(0),0,x13(0.5),x13(0.5)+y13(0.5),y13(0.5),0])
Y=np.array([0,x23(0),x23(0)+y23(0),y23(0),0,x23(0.5),x23(0.5)+y23(0.5),y23(0.5),0])

plt.subplot(3,1,3)

plt.plot(X,Y,'k')

plt.xticks([0,5])
plt.title(" Cas (lambda1,lambda2)=(1,-1) t=0 et t=0.5")


plt.show()
```

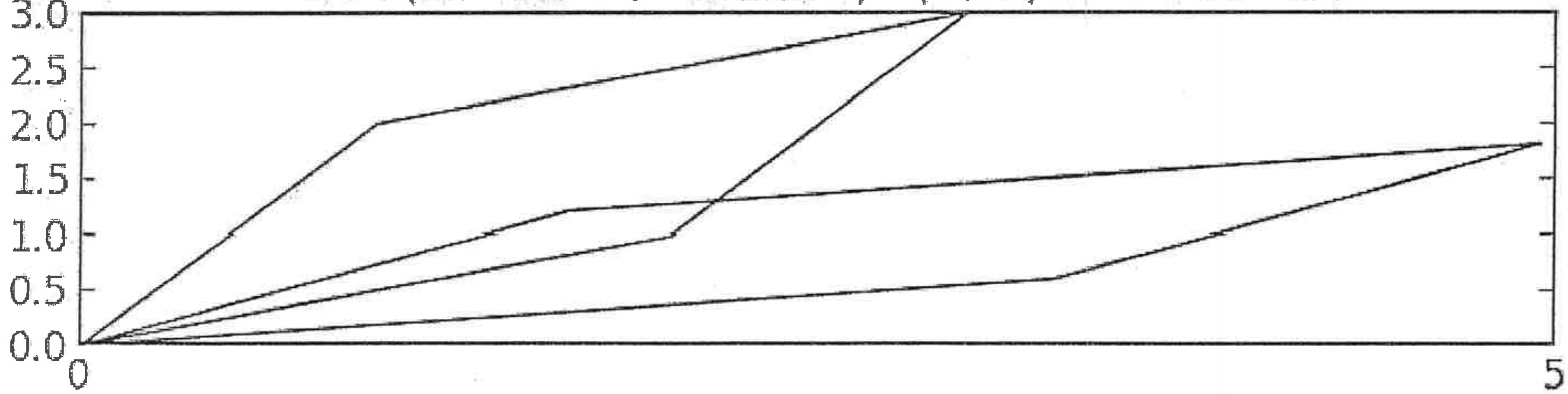
Cas (lambda1,lambda2)=(1,2) t=0 et t=0.5



Cas (lambda1,lambda2)=(1,-2) t=0 et t=0.5



Cas (lambda1,lambda2)=(1,-1) t=0 et t=0.5



MP 21-22

CENTRALE 2018 MP 1

Aplatissement aléatoire d'un ensemble de points en grande dimension

Eléments de correction

I Préliminaires

I.A - Projection sur un convexe fermé

Q 1.

Soit $(a, b) \in E^2$. La bilinéarité et la symétrie du produit scalaire ainsi que la définition de la norme euclidienne donnent

$$\begin{aligned} \|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 &= \langle a+b, a+b\rangle + \langle a-b, a-b\rangle = \langle a,a\rangle + 2\langle a,b\rangle + \langle b,b\rangle + \langle a,a\rangle - 2\langle a,b\rangle + \langle b,b\rangle \\ &= 2\left(\|a\|^2 + \|b\|^2\right) \end{aligned}$$

Il s'agit de l'identité du parallélogramme dont l'interprétation géométrique est la suivante. Etant donné un parallélogramme (A, B, C, D) (c'est-à-dire $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$), on a $AC^2 + BD^2 = 2\left(AB^2 + CD^2\right)$.

Q 2.

Soit $(u, v, v') \in E^3$ vérifiant $v \neq v'$ et $\|u-v\| = \|u-v'\|$. En utilisant le résultat de Q 1. avec $a = u - v$ et $b = u - v'$, on obtient

$$\|2u - v - v'\|^2 + \|v' - v\|^2 = 2\left(\|u-v\|^2 + \|u-v'\|^2\right) = 4\|u-v\|^2$$

Ayant $v \neq v'$, on a $\|v'-v\|^2 > 0$ et ainsi $\|2u - v - v'\|^2 < 4\|u-v\|^2$ ou encore

$$\boxed{\left\|u - \frac{v+v'}{2}\right\| < \|u-v\|}$$

Q 3.

Soient F un fermé non vide de E et $u \in E$. Prenons un élément a de F pour obtenir une "distance de référence" et notons $K = \{x \in F \mid \|u-x\| \leqslant \|u-a\|\}$.

L'ensemble K est non vide ($a \in K$), fermé comme intersection de deux fermés (continuité de la fonction $\delta_u : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \|u-x\| \end{array}$) et borné puisque $\forall x \in K,\ \|x\| \leqslant \|u-a\| + \|u\|$. Comme E est de dimension finie, K est donc un compact non vide de E.

Comme signalé précédemment, l'application δ_u est continue donc, selon le théorème des bornes atteintes, sa restriction à K admet un minimum en un élément v de K, donc de F : notamment $\|u-v\| \leqslant \|u-a\|$.

En outre $F \setminus K \subset \{x \in F \mid \|u-x\| > \|u-a\|\}$ et ainsi

$$\forall x \in F \setminus K,\ \|u-x\| > \|u-a\| \geqslant \|u-v\|$$

En conclusion, $\boxed{\exists v \in F : \forall x \in F,\ \|u-v\| \leqslant \|u-x\|}$.

Q 4.

Soient C un convexe fermé non vide de E et $u \in E$.

Selon la question Q 3., $\exists v \in C : \|u-v\| = \min\limits_{x\in C} \|u-x\|$. Fixons un tel vecteur v.

Supposons, par l'absurde, trouvé un autre vecteur v' de C vérifiant la même propriété. On a alors $\|u-v\| = \min\limits_{x\in C} \|u-x\| = \|u-v'\|$. Selon la question Q 2., on obtient $\left\|u - \frac{v+v'}{2}\right\| < \min\limits_{x\in C} \|u-x\|$.

Comme C est convexe $\frac{v+v'}{2} \in C$ et l'inégalité précédente fournit la contradiction souhaitée.

En conclusion, il existe un unique vecteur v appartenant à C tel que $\forall x \in C,\ \|u-v\| \leqslant \|u-x\|$.

I.B - Inégalité de Hölder pour l'espérance

Q 5.

Soit $(a, b) \in (\mathbf{R}_+)^2$. Si l'un des deux réels a ou b est nul, l'inégalité demandée est clairement vérifiée.

Supposons $ab \neq 0$. La concavité de la fonction ln sur $\mathbf{R}_+^*$ donne

$$\frac{1}{p}\ln(a^p) + \frac{1}{q}\ln(b^q) \leqslant \ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right)$$

ou encore $\ln(ab) \leqslant \ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right)$. Par croissance de la fonction exp, on obtient

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Q 6.

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles sur l'espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Comme Ω est fini, les variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ admettent des moments de tout ordre. En outre, par positivité de l'espérance, on a $E(|X|^p) \geqslant 0$ et $E(|Y|^q) \geqslant 0$.

Suivant l'indication de l'énoncé, étudions plusieurs cas :

- $E(|X|^p) = E(|Y|^q) = 1$. D'après la question Q 5., on a

$$\forall \omega \in \Omega,\ |X(\omega)Y(\omega)| \leqslant \frac{|X(\omega)|^p}{p} + \frac{|Y(\omega)|^q}{q}$$

ou encore $|XY| \leqslant \frac{|X|^p}{p} + \frac{|Y|^q}{q}$. Puis, par croissance et linéarité de l'espérance, on obtient

$$E(|XY|) \leqslant \frac{1}{p}E(|X|^p) + \frac{1}{q}E(|Y|^q)$$

c'est-à-dire $E(|XY|) \leqslant 1$ (d'après les hypothèses du cas étudié) ou encore $E(|XY|) \leqslant (E(|X|^p))^{1/p}(E(|Y|^q))^{1/q}$.

- $E(|X|^p)E(|Y|^q) > 0$. Notons $X' = \dfrac{X}{(E(|X|^p))^{1/p}}$ et $Y' = \dfrac{Y}{(E(|Y|^q))^{1/q}}$. X' et Y' sont deux variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ vérifiant $E(|X'|^p) = E(|Y'|^q) = 1$: selon l'étude précédente, on a donc $E(|X'Y'|) \leqslant (E(|X'|^p))^{1/p}(E(|Y'|^q))^{1/q}$ c'est-à-dire

$$E\left(\left|\frac{X}{(E(|X|^p))^{1/p}}\frac{Y}{(E(|Y|^q))^{1/q}}\right|\right) \leqslant 1$$

Par linéarité de l'espérance, on aboutit à $E(|XY|) \leqslant (E(|X|^p))^{1/p}(E(|Y|^q))^{1/q}$.

- $E(|X|^p)E(|Y|^q) = 0$. Dans ce cas, l'une des deux variables aléatoires $|X|^p$ ou $|Y|^q$ est presque nulle presque sûrement, ce qui implique que l'une des deux variables aléatoires X ou Y est nulle presque sûrement, puis que XY est nulle presque sûrement. Ainsi dans ce cas $E(|XY|) = 0$ et l'inégalité demandée est clairement vérifiée.

I.C - Espérance conditionnelle

Q 7.

Soit $(A_1, A_2, \ldots, A_m)$ un système complet d'événements de probabilités non nulles. La formule des probabilités totales s'écrit

$$\forall x \in X(\Omega),\ P(X = x) = \sum_{i=1}^{m} P(X = x \mid A_i)P(A_i)$$

Ainsi (les sommes doubles suivantes sont finies)

$$\begin{aligned}E(X) &= \sum_{x\in X(\Omega)} xP(X=x) = \sum_{x\in X(\Omega)} x\sum_{i=1}^{m} P(X=x\mid A_i)P(A_i) = \sum_{i=1}^{m} P(A_i)\sum_{x\in X(\Omega)} xP(X=x\mid A_i)\\ &= \sum_{i=1}^{m} P(A_i)E(X\mid A_i)\end{aligned}$$

D'où la formule voulue, dite de l'espérance totale.

I.D - Variables aléatoires à queue sous-gaussienne

Q 8.

Suivant l'indication de l'énoncé, notons $X^2(\Omega)=\{y_1,\dots,y_n\}$ avec $n\in\mathbb{N}^*$ et $0\leqslant y_1<y_2<\cdots<y_n$. On a ainsi $|X|(\Omega)=\left\{\sqrt{y_1},\dots,\sqrt{y_n}\right\}$. Notamment $\forall t\in\left]\sqrt{y_n},+\infty\right[,\ \{|X|\geqslant t\}=\emptyset$.

Notons $y_0=0$. On a alors

$$\forall i\in[\![0,n-1]\!],\ \forall t\in\left]\sqrt{y_i},+\infty\right[,\ \{|X|\geqslant t\}=\left\{X^2\geqslant t^2\right\}=\left\{X^2\geqslant y_{i+1}\right\}$$

Par conséquent, la fonction $\begin{array}{ccc}\mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R}\\ t & \longmapsto & tP(|X|\geqslant t)\end{array}$ est continue par morceaux sur $\mathbf{R}_+$ et nulle sur $\left]\sqrt{y_n},+\infty\right[$. Ainsi

$$\begin{aligned}2\int_0^{+\infty} tP(|X|\geqslant t)\,dt &= 2\sum_{i=0}^{n-1}\int_{\sqrt{y_i}}^{\sqrt{y_{i+1}}} tP(|X|\geqslant t)\,dt = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{\sqrt{y_i}}^{\sqrt{y_{i+1}}} 2tdtP\left(X^2\geqslant y_{i+1}\right)\\ &= \sum_{i=0}^{n-1}\left[t^2\right]_{\sqrt{y_i}}^{\sqrt{y_{i+1}}} P\left(X^2\geqslant y_{i+1}\right) = \sum_{i=0}^{n-1}(y_{i+1}-y_i)P\left(X^2\geqslant y_{i+1}\right)\\ &= \sum_{i=0}^{n-1} y_{i+1}P\left(X^2\geqslant y_{i+1}\right) - \sum_{i=0}^{n-1} y_iP\left(X^2\geqslant y_{i+1}\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n} y_iP\left(X^2\geqslant y_i\right) - \sum_{i=0}^{n-1} y_iP\left(X^2\geqslant y_{i+1}\right)\\ &= y_nP\left(X^2\geqslant y_n\right) + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\left(P\left(X^2\geqslant y_i\right)-P\left(X^2\geqslant y_{i+1}\right)\right) - y_0P\left(X^2\geqslant y_1\right)\end{aligned}$$

Or $y_nP\left(X^2\geqslant y_n\right)=y_nP\left(X^2=y_n\right)$ et $y_0P\left(X^2\geqslant y_1\right)=0$.
De plus $\forall i\in[\![1,n-1]\!],\ P\left(X^2\geqslant y_i\right)-P\left(X^2\geqslant y_{i+1}\right)=P\left(X^2=y_i\right)$. Par conséquent

$$2\int_0^{+\infty} tP(|X|\geqslant t)\,dt = y_nP\left(X^2=y_n\right)+\sum_{i=1}^{n-1} y_iP\left(X^2=y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} y_iP\left(X^2=y_i\right)$$

ou encore

$$\boxed{2\int_0^{+\infty} tP(|X|\geqslant t)\,dt = E\left(X^2\right)}$$

Q 9.

La fonction $\begin{array}{ccc}\mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R}\\ t & \longmapsto & at\exp\left(-bt^2\right)\end{array}$ continue, positive est intégrable car $at\exp\left(-bt^2\right)=_{+\infty} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

En outre

$$2\int_0^{+\infty} at\exp\left(-bt^2\right)dt = \left[-\frac{a}{b}\exp\left(-bt^2\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{a}{b}$$

La croissance de l'intégrale et la question Q 8. conduisent à $\boxed{E\left(X^2\right) \leqslant \frac{a}{b}}$.

Q 10.

Soit $t \in \mathbb{R}$. L'inégalité triangulaire donne $\forall \omega \in \Omega,\ t \leqslant |X(\omega) + \delta| \Longrightarrow t \leqslant |X(\omega)| + |\delta|$, ou encore

$$\{|X + \delta| \geqslant t\} \subset \{|X| \geqslant t - |\delta|\}$$

Par croissance de la probabilité, on obtient $P(|X + \delta| \geqslant t) \leqslant P(|X| \geqslant t - |\delta|)$.

Q 11.

Soit $t \in \mathbb{R}$. On a

$$a - \frac{1}{2}bt^2 + b(t - |\delta|)^2 = \frac{1}{2}bt^2 - 2b|\delta|t + a + b\delta^2 = \frac{b}{2}(t - 2|\delta|)^2 + a - b\delta^2$$

Par hypothèse, la quantité précédente est positive car somme de deux réels positifs.

Finalement $\boxed{-b(t - |\delta|)^2 \leqslant a - \frac{1}{2}bt^2}$.

Q 12.

Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $t \geqslant |\delta|$ c'est-à-dire $t - |\delta| \geqslant 0$. Utilisant le résultat de la question Q 10. ainsi que l'hypothèse formulée en I.D, on obtient

$$P(|X + \delta| \geqslant t) \leqslant P(|X| \geqslant t - |\delta|) \leqslant a \exp\left(-b(t - |\delta|)^2\right)$$

Ensuite le résultat de la question Q 11. et la croissance de $\exp$ fournissent

$$\boxed{P(|X + \delta| \geqslant t) \leqslant a \exp(a) \exp\left(-\frac{1}{2}bt^2\right)}$$

Q 13.

Soit $t \in [0, |\delta|[$. Notamment $t^2 \leqslant \delta^2 \leqslant \frac{a}{b}$. Ainsi $-\frac{1}{2}bt^2 \geqslant -\frac{a}{2}$ puis, par croissance de $\exp$, on a

$$a \exp(a) \exp\left(-\frac{1}{2}bt^2\right) \geqslant a \exp\left(\frac{a}{2}\right)$$

En outre l'hypothèse formulée en I.D avec $t = 0$ donne $P(|X| \geqslant 0) \leqslant a$, c'est-à-dire $1 \leqslant a$. Ainsi

$$a \exp(a) \exp\left(-\frac{1}{2}bt^2\right) \geqslant \exp\left(\frac{1}{2}\right) \geqslant 1 \geqslant P(|X + \delta| \geqslant t)$$

En conclusion l'inégalité obtenue à la question Q 12. reste valable dans le cas présent.

II L'inégalité de concentration de Talagrand

II.A - Etude de deux cas particuliers

Q 14.

Supposons que C soit un convexe fermé (non vide) de E ne rencontrant pas $X(\Omega)$. Cela signifie que l'on a $\{X \in C\} = \emptyset$, a fortiori $P(X \in C) = 0$. Dans ce cas, l'inégalité souhaitée est clairement vérifiée.

Dans la fin de la sous-partie II.A, on suppose que C est un convexe fermé de E rencontrant $X(\Omega)$ en un seul vecteur u.

Q 15.

L'écriture de u dans la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est de la forme $u = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i$ avec $\forall i \in [\![1, n]\!],\ u_i \in \{-1, +1\}$, puisque $u \in X(\Omega)$.

Avec les notations de l'énoncé, comme $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E, on a

$$\forall \omega \in \Omega,\ \frac{1}{4} d(X(\omega), u)^2 = \frac{\|X(\omega) - u\|^2}{4} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(\varepsilon_i(\omega) - u_i)^2}{4}$$

Pour tout i appartenant à $[\![1, n]\!]$, $\dfrac{(\varepsilon_i - u_i)^2}{4}$ est une variable aléatoire de Bernoulli, de paramètre $\dfrac{1}{2}$. En outre, par transfert d'indépendance, les variables aléatoires $\dfrac{(\varepsilon_1 - u_1)^2}{4}, \dfrac{(\varepsilon_2 - u_2)^2}{4}, \dots, \dfrac{(\varepsilon_n - u_n)^2}{4}$ sont indépendantes. Par conséquent, $\dfrac{1}{4} d(X, u)^2$ est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \dfrac{1}{2}\right)$.

Q 16.

Par définition de la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \dfrac{1}{2}\right)$, on a

$$\frac{1}{4} d(X, u)^2(\Omega) = [\![0, n]\!] \qquad \forall k \in [\![0, n]\!],\ P\left(\frac{1}{4} d(X, u)^2 = k\right) = \binom{n}{k} \frac{1}{2^n}$$

D'après la formule de transfert, utilisée avec la variable aléatoire $\dfrac{1}{4} d(X, u)^2$ et la formule du binôme, on a

$$\begin{aligned} E\left(\exp\left(\frac{1}{8} d(X, u)^2\right)\right) &= E\left(\exp\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} d(X, u)^2\right)\right)\right) = \sum_{k=0}^{n} \exp\left(\frac{k}{2}\right) P\left(\frac{1}{4} d(X, u)^2 = k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \exp\left(\frac{k}{2}\right) \binom{n}{k} \frac{1}{2^n} = \left(\frac{\sqrt{e} + 1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

Comme $\dfrac{\sqrt{e} + 1}{2} \leqslant 2$. on obtient notamment $E\left(\exp\left(\dfrac{1}{8} d(X, u)^2\right)\right) \leqslant 2^n$.

Q 17.

Par définition $d(X, C) = \inf_{x \in C} \|X - x\|$ et notamment $d(X, C) \leqslant \|X - u\|$ donc, par croissance de exp et de l'espérance, $E\left(\exp\left(\dfrac{1}{8} d(X, C)^2\right)\right) \leqslant E\left(\exp\left(\dfrac{1}{8} d(X, u)^2\right)\right)$.

En outre, dans le cadre de cet exemple, on a $\{X \in C\} = \{X = u\} = \bigcap_{i=1}^{n} \{\varepsilon_i = u_i\}$ (utilisation des notations de la question Q 15.). Comme les variables aléatoires $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ sont indépendantes, on en tire

$$P(X \in C) = \prod_{i=1}^{n} P(\varepsilon_i = u_i) = \frac{1}{2^n}$$

Finalement

$$P(X \in C) E\left(\exp\left(\frac{1}{8} d(X, C)^2\right)\right) \leqslant \frac{1}{2^n} E\left(\exp\left(\frac{1}{8} d(X, u)^2\right)\right) \leqslant 1$$

ce qui est le résultat voulu dans le cas présent.

Q 18.

On étudie le cas $n = 1$. Comme $C \cap X(\Omega)$ contient au moins deux éléments et que l'on a $X(\Omega) = \{-e_1, +e_1\}$, cela signifie notamment que l'on a $X(\Omega) \subset C$. Par conséquent $\{X \in C\} = \Omega$ et notamment $P(X \in C) = 1$ et, par ailleurs, $d(X, C) = 0$ ce qui entraîne $\exp\left(\dfrac{1}{8} d(X, C)^2\right) = 1$.

Dans ce cas

$$P(X \in C)\, E\left(\exp\left(\frac{1}{8} d(X,C)^2\right)\right) = 1$$

et l'inégalité $(II.1)$ est bien vérifiée. D'où l'initialisation de la récurrence.

Q 19.

Soit $(x', t) \in E' \times \{-1, +1\}$. Procédons par double implication pour justifier l'équivalence souhaitée.

• $\Longrightarrow$

Supposons $x' \in C_t$: par définition, il existe y appartenant à $C \cap H_t$, que l'on fixe, tel que $x' = \pi(y)$. Par définition de H_t,

$$\exists y' \in E' : y = y' + te_n$$

et ainsi $y' = \pi(y) = x'$. Par conséquent $x' + te_n = y$ et notamment, par construction, $x' + te_n \in C$.

• $\Longleftarrow$

Supposons $x' + te_n \in C$. Par définition, on a ainsi $x' + te_n \in C \cap H_t$, car $x' \in E'$, et aussi $x' = \pi(x' + te_n)$. On a donc bien $x' \in C_t$.

Q 20.

(a) Par définition, C_{+1} et C_{-1} sont des parties de $\operatorname{Im}\pi$, donc de E'.

(b) Par hypothèse, $C \cap X(\Omega)$ contient au moins deux éléments y, z, que l'on fixe, qui diffèrent par leurs dernières coordonnées. Ainsi

$$\exists\,(y', z') \in E' : y = y' + e_n\ z = z' - e_n$$

L'équivalence (seconde implication) montrée à la question Q 19. donne $y' \in C_{+1}$ et $z' \in C_{-1}$. Notamment C_{+1} et C_{-1} sont non vides.

(c) Justifions la convexité de C_{+1} (par symétrie on en déduit la convexité de C_{-1}).

Soit $(x', y', \lambda) \in C_{+1} \times C_{+1} \times [0,1]$. Comme E' est un sous-espace vectoriel de E, on a $(1-\lambda)x' + \lambda y' \in E'$ et, selon la question Q 19., on a $x' + e_n \in C$ et $y + e_n \in C$. En outre

$$(1-\lambda)x' + \lambda y' + e_n = (1-\lambda)\left(x' + e_n\right) + \lambda(y + e_n)$$

Par convexité de C, on a ainsi $(1-\lambda)x' + \lambda y' + e_n \in C$, et l'équivalence (seconde implication) montrée à la question Q 19. donne $(1-\lambda)x' + \lambda y' \in C_{+1}$. Par conséquent C_{+1} est bien une partie convexe de E'.

(d) Montrons que C_{+1} est fermé (par symétrie on en déduit que C_{-1} est fermé). Plus généralement, l'image d'un fermé de E par une projection est un fermé de E.

Soit $(u'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de C_{+1} convergeant (vers x' appartenant à E'). D'après la question Q 19., on a

$$\forall k \in \mathbb{N},\ u'_k + e_n \in C$$

La suite $(u'_k + e_n)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de C converge, vers $x' + e_n$, dans C car C est un fermé de E. Une nouvelle utilisation de l'équivalence (seconde implication) montrée à la question Q 19. donne $x' \in C_{+1}$. On en déduit, par caractérisation séquentielle, que C_{+1} est un fermé de E'.

En conclusion, C_{+1} et C_{-1} sont des convexes fermés non vides de E'.

Q 21.

Avec les notations de l'énoncé, on peut écrire $X = X' + \varepsilon_n e_n$, où (moyennant une légère adaptation du lemme des coalitions) les deux variables aléatoires X' et ε_n sont indépendantes.

De plus $(\{\varepsilon_n = -1\}, \{\varepsilon_n = +1\})$ est un système complet d'événements et ainsi

$$P(X \in C) = P(X \in C, \varepsilon_n = -1) + P(X \in C, \varepsilon_n = +1)$$

En outre, selon la question Q 19., on a

$$\forall(\omega, t) \in \Omega \times \{-1, +1\},\ \left\{\begin{array}{l} X(\omega) \in C \\ \varepsilon_n(\omega) = t \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} X'(\omega) \in C_t \\ \varepsilon_n(\omega) = t \end{array}\right.$$

Finalement

$$\begin{aligned} P(X \in C) &= P\left(X' \in C_{-1}, \varepsilon_n = -1\right) + P\left(X' \in C_{+1}, \varepsilon_n = +1\right) \\ &= P\left(X' \in C_{-1}\right) P\left(\varepsilon_n = -1\right) + P\left(X' \in C_{+1}\right) P\left(\varepsilon_n = +1\right) \\ &= \frac{1}{2} P\left(X' \in C_{-1}\right) + \frac{1}{2} P\left(X' \in C_{+1}\right) \end{aligned}$$

II.D - Une inégalité cruciale

Q 22.

Soit $\omega \in \Omega$. Par définition $Y_{\varepsilon_n(\omega)} \in C_{\varepsilon_n(\omega)}$ puis, selon la question Q 19., $Y_{\varepsilon_n(\omega)} + \varepsilon_n(\omega)\, e_n \in C$. De même $Y_{-\varepsilon_n(\omega)} - \varepsilon_n(\omega)\, e_n \in C$. Par convexité de C, on a ainsi

$$(1-\lambda)\left(Y_{\varepsilon_n(\omega)} + \varepsilon_n(\omega)\, e_n\right) + \lambda\left(Y_{-\varepsilon_n(\omega)} - \varepsilon_n(\omega)\, e_n\right) \in C$$

Par définition de la distance à une partie on en déduit

$$d(X(\omega), C) \leqslant \left\|(1-\lambda)\left(Y_{\varepsilon_n(\omega)} + \varepsilon_n(\omega)\, e_n\right) + \lambda\left(Y_{-\varepsilon_n(\omega)} - \varepsilon_n(\omega)\, e_n\right) - X(\omega)\right\|$$

puis

$$\boxed{d(X, C) \leqslant \left\|(1-\lambda)\left(Y_{\varepsilon_n} + \varepsilon_n e_n\right) + \lambda\left(Y_{-\varepsilon_n} - \varepsilon_n e_n\right) - X\right\|}$$

Q 23.

Ayant $X = X' + \varepsilon_n e_n$, on a

$$(1-\lambda)\left(Y_{\varepsilon_n} + \varepsilon_n e_n\right) + \lambda\left(Y_{-\varepsilon_n} - \varepsilon_n e_n\right) - X = (1-\lambda)\left(Y_{\varepsilon_n} - X'\right) + \lambda\left(Y_{-\varepsilon_n} - X'\right) - 2\lambda\varepsilon_n e_n$$

Comme les deux variables aléatoires $(1-\lambda)\left(Y_{\varepsilon_n} - X'\right) + \lambda\left(Y_{-\varepsilon_n} - X'\right)$ et $2\lambda\varepsilon_n e_n$ sont respectivement à valeurs dans E' et $\mathbb{R}e_n$, qui sont deux sous-espaces vectoriels orthogonaux de E, le théorème de Pythagore donne

$$\left\|(1-\lambda)\left(Y_{\varepsilon_n} + \varepsilon_n e_n\right) + \lambda\left(Y_{-\varepsilon_n} - \varepsilon_n e_n\right) - X\right\|^2 = 4\lambda^2 + \left\|(1-\lambda)\left(Y_{\varepsilon_n} - X'\right) + \lambda\left(Y_{-\varepsilon_n} - X'\right)\right\|^2$$

ce qui, grâce à la question Q22., implique

$$d(X, C)^2 \leqslant 4\lambda^2 + \left\|(1-\lambda)\left(Y_{\varepsilon_n} - X'\right) + \lambda\left(Y_{-\varepsilon_n} - X'\right)\right\|^2$$

Soit $(u, v) \in E^2$. Etablissons l'inégalité $\|(1-\lambda)u + \lambda v\|^2 \leqslant (1-\lambda)\|u\|^2 + \lambda\|v\|^2$. Par différence (et propriétés usuelles du produit scalaire), on a

$$\begin{aligned} & (1-\lambda)\|u\|^2 + \lambda\|v\|^2 - \|(1-\lambda)u + \lambda v\|^2 \\ =\ & (1-\lambda)\|u\|^2 + \lambda\|v\|^2 - (1-\lambda)^2\|u\|^2 - \lambda^2\|v\|^2 - 2\lambda(1-\lambda)\langle u, v\rangle \\ =\ & \lambda(1-\lambda)\left(\|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\langle u, v\rangle\right) = \lambda(1-\lambda)\|u - v\|^2 \end{aligned}$$

On a donc bien $\|(1-\lambda)u + \lambda v\|^2 \leqslant (1-\lambda)\|u\|^2 + \lambda\|v\|^2$. Etant donné ω appartenant à Ω, en remplaçant u par $\left(Y_{\varepsilon_n} - X'\right)(\omega)$ et v par $\left(Y_{-\varepsilon_n} - X'\right)(\omega)$, on obtient

$$\left\|(1-\lambda)\left(Y_{\varepsilon_n} - X'\right)(\omega) + \lambda\left(Y_{-\varepsilon_n} - X'\right)(\omega)\right\|^2 \leqslant (1-\lambda)\left\|\left(Y_{\varepsilon_n} - X'\right)(\omega)\right\|^2 + \lambda\left\|\left(Y_{-\varepsilon_n} - X'\right)(\omega)\right\|^2$$

puis, cette inégalité étant vraie pour tout ω appartenant à Ω, on en tire

$$4\lambda^2 + \left\|(1-\lambda)\left(Y_{\varepsilon_n} - X'\right) + \lambda\left(Y_{-\varepsilon_n} - X'\right)\right\|^2 \leqslant 4\lambda^2 + (1-\lambda)\left\|\left(Y_{\varepsilon_n} - X'\right)\right\|^2 + \lambda\left\|\left(Y_{-\varepsilon_n} - X'\right)\right\|^2$$

Finalement

$$d(X, C)^2 \leqslant 4\lambda^2 + (1-\lambda)\left\|\left(Y_{\varepsilon_n} - X'\right)\right\|^2 + \lambda\left\|\left(Y_{-\varepsilon_n} - X'\right)\right\|^2$$

puis

$$\boxed{d(X, C)^2 \leqslant 4\lambda^2 + (1-\lambda)\, d\left(X', C_{\varepsilon_n}\right)^2 + \lambda d\left(X', C_{-\varepsilon_n}\right)^2}$$

II.E - Espérances conditionnelles

Q 24.

Reprenons des notations utilisées à la question Q 20.. Par hypothèse, $C \cap X(\Omega)$ contient au moins deux éléments y, z, que l'on fixe, qui diffèrent par leurs dernières coordonnées. Ainsi

$$\exists (y', z') \in E' : y = y' + e_n \; z = z' - e_n$$

L'équivalence (seconde implication) montrée à la question Q 19. donne notamment $z' \in C_{-1}$, ou encore $\{X' = z'\} \subset \{X' \in C_{-1}\}$. Par croissance de la probabilité, on en tire $P(X' \in C_{-1}) \geqslant P(X' = z')$.

Par ailleurs, en notant $z' = \sum_{i=1}^{n-1} z_i e_i$, on a $\{X' = z'\} = \bigcap_{i=1}^{n-1} \{\varepsilon_i = z_i\}$ et l'indépendance des variables aléatoires $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ donne

$$P(X' = z') = \prod_{i=1}^{n-1} P(\varepsilon_i = z_i) = \frac{1}{2^{n-1}}$$

Finalement $p_- \geqslant \dfrac{1}{2^{n-1}} > 0$.

Q 25.

Soit $\lambda \in [0, 1]$. Utilisant l'inégalité conclusive de la question Q 23., par croissance de exp, on a

$$\exp\left(\frac{1}{8} d(X, C)^2\right) \leqslant \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right) \exp\left(\frac{(1-\lambda)}{8} d(X', C_{\varepsilon_n})^2 + \frac{\lambda}{8} d(X', C_{-\varepsilon_n})^2\right)$$

Notons $Z = \dfrac{(1-\lambda)}{8} d(X', C_{\varepsilon_n})^2 + \dfrac{\lambda}{8} d(X', C_{-\varepsilon_n})^2$ en vue de calculer $E(\exp(Z) \mid \varepsilon_n = -1)$.

Soit $z \in Z(\Omega)$. On a

$$\begin{aligned}
P(Z = z \mid \varepsilon_n = -1) &= \frac{P(Z = z, \varepsilon_n = -1)}{P(\varepsilon_n = -1)} \\
&= \frac{1}{P(\varepsilon_n = -1)} P\left(\frac{(1-\lambda)}{8} d(X', C_{-1})^2 + \frac{\lambda}{8} d(X', C_{+1})^2 = z, \varepsilon_n = -1\right) \\
&= P\left(\frac{(1-\lambda)}{8} d(X', C_{-1})^2 + \frac{\lambda}{8} d(X', C_{+1})^2 = z\right)
\end{aligned}$$

la dernière égalité étant due à l'indépendance des variables aléatoires $\dfrac{(1-\lambda)}{8} d(X', C_{-1})^2 + \dfrac{\lambda}{8} d(X', C_{+1})^2$ et ε_n (nouvelle adaptation du lemme des coalitions). Par conséquent

$$\begin{aligned}
E(\exp(Z) \mid \varepsilon_n = -1). &= \sum_{z \in Z(\Omega)} e^z P(Z = z \mid \varepsilon_n = -1) \\
&= \sum_{z \in Z(\Omega)} e^z P\left(\frac{(1-\lambda)}{8} d(X', C_{-1})^2 + \frac{\lambda}{8} d(X', C_{+1})^2 = z\right) \\
&= E\left(\exp\left(\frac{(1-\lambda)}{8} d(X', C_{-1})^2 + \frac{\lambda}{8} d(X', C_{+1})^2 = z\right)\right) \\
&= E\left(\exp\left(\frac{1}{8} d(X', C_{-1})^2\right)^{1-\lambda} \exp\left(\frac{1}{8} d(X', C_{+1})^2\right)^{\lambda}\right)
\end{aligned}$$

Notamment on a utilisé l'inclusion $\left(\dfrac{(1-\lambda)}{8} d(X', C_{-1})^2 + \dfrac{\lambda}{8} d(X', C_{+1})^2\right)(\Omega) \subset Z(\Omega)$ pour passer de la première à la seconde ligne ci-dessus.

Enfin, la positivité et la linéarité de l'espérance conditionnelle admisses par l'énoncé entraînant sa croissance, on déduit de ce qui précède

$$\boxed{E\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right) \mid \varepsilon_n=-1\right) \leqslant \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right) E\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X',C_{-1})^2\right)^{1-\lambda} \exp\left(\frac{1}{8}d(X',C_{+1})^2\right)^{\lambda}\right)}$$

Q 26.

Il s'agit d'établir l'inégalité

$$\begin{aligned} & E\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X',C_{-1})^2\right)^{1-\lambda} \exp\left(\frac{1}{8}d(X',C_{+1})^2\right)^{\lambda}\right) \\ \leqslant \; & E\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X',C_{-1})^2\right)\right)^{1-\lambda} E\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X',C_{+1})^2\right)\right)^{\lambda} \end{aligned}$$

Tout d'abord le résultat est clair si $\lambda \in \{0,1\}$ puisque l'on a alors égalité. Supposons donc $\lambda \in]0,1[$. Notant $p = \dfrac{1}{1-\lambda}$ et $q = \dfrac{1}{\lambda}$, le résultat de la question Q 6. appliqué aux variables aléatoires $\left(\frac{1}{8}d(X',C_{-1})^2\right)^{1-\lambda}$ et $\left(\frac{1}{8}d(X',C_{+1})^2\right)^{\lambda}$ donne l'inégalité souhaitée.

L'inégalité de la question Q 25. devient finalement

$$\boxed{E\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right) \mid \varepsilon_n=-1\right) \leqslant \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right) E\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X',C_{-1})^2\right)\right)^{1-\lambda} E\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X',C_{+1})^2\right)\right)^{\lambda}}$$

Q 27.

Par symétrie, à partir du résultat de la question Q 26. (l'hypothèse $p_+ \geqslant p_-$ n'a pas été utilisée pour l'obtenir) et en remplaçant λ par 0, on trouve

$$E\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right) \mid \varepsilon_n=+1\right) \leqslant E\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X',C_{+1})^2\right)\right)$$

ou encore ($p_+ = P(X' \in C_{+1})$)

$$p_+ E\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right) \mid \varepsilon_n=+1\right) \leqslant P(X' \in C_{+1})\, E\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X',C_{+1})^2\right)\right)$$

Or X' est à valeurs dans E' espace vectoriel euclidien de dimension égale à $n-1$ de base orthonormée $(e_1,\dots,e_{n-1})$, C_{+1} est un convexe fermé non vide de E' (question Q 20.) et $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{n-1}$ sont des variables aléatoires de Rademacher indépendantes. L'hypothèse de récurrence permet d'utiliser l'inégalité (II.1) en dimension $n-1$ et ainsi $P(X' \in C_{+1})\, E\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X',C_{+1})^2\right)\right) \leqslant 1$.

Ce qui précède permet de conclure : $\boxed{E\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right) \mid \varepsilon_n=+1\right) \leqslant \dfrac{1}{p_+}}$.

Q 28.

Soit $\lambda \in [0,1]$. Utilisons la formule de l'espérance totale, vue en question Q 7., avec le système complet d'événements $(\{\varepsilon_n=-1\},\{\varepsilon_n=+1\})$: on a ainsi

$$E\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)\right) = \frac{1}{2}E\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right) \mid \varepsilon_n=+1\right) + \frac{1}{2}E\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right) \mid \varepsilon_n=-1\right)$$

Les résultats des questions Q 26. et Q27. donnent

$$E\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)\right) \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p_+} + \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)E\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X',C_{-1})^2\right)\right)^{1-\lambda} E\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X',C_{+1})^2\right)\right)^{\lambda}\right)$$

Une application de l'hypothèse de récurrence, similaire à celle de la question Q 27., donne

$$\boxed{E\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)\right) \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p_+} + \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)\frac{1}{p_-^{1-\lambda}}\frac{1}{p_+^{\lambda}}\right)}$$

II.F - Optimisation

Q 29.

Posons $\lambda = 1 - \dfrac{p_-}{p_+}$. Comme $p_+ \geqslant p_- > 0$. on constate que l'on a $0 \leqslant \lambda < 1$. En remarquant que l'on a $(1-\lambda)^{\lambda-1} = \left(\dfrac{p_+}{p_-}\right)^{1-\lambda}$. l'inégalité de la question Q 28. se transforme en

$$E\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)\right) \leqslant \frac{1}{2p_+}\left(1 + \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)(1-\lambda)^{\lambda-1}\right)$$

Q 30.

Suivant l'indication de l'énoncé, considérons la fonction φ définie sur $[0,1[$ par

$$\forall x \in [0,1[,\ \varphi(x) = \ln(2+x) - \ln(2-x) - \frac{x^2}{2} - (x-1)\ln(1-x)$$

D'après les théorèmes généraux, la fonction φ est de classe C^∞ sur $[0,1[$ et le calcul donne

$$\forall x \in [0,1[,\ \varphi'(x) = \frac{1}{2+x} + \frac{1}{2-x} - x - 1 - \ln(1-x)$$

puis

$$\forall x \in [0,1[,\ \varphi''(x) = -\frac{1}{(2+x)^2} + \frac{1}{(2-x)^2} - 1 + \frac{1}{1-x} = \frac{8x}{(2+x)^2(2-x)^2} + \frac{x}{1-x}$$

Ainsi $\varphi'' \geqslant 0$. Donc la fonction φ est convexe et ainsi

$$\forall x \in [0,1[,\ \varphi(x) \geqslant \varphi(0) + \varphi'(0)(x-0)$$

ou encore $\forall x \in [0,1[.\ \varphi(x) \geqslant 0$.

On déduit de cette étude de fonction la propriété suivante :

$$\boxed{\forall x \in [0,1[,\ \frac{x^2}{2} + (x-1)\ln(1-x) \leqslant \ln(2+x) - \ln(2-x)}$$

Q 31.

Par croissance de exp, le résultat de la question Q 30. devient

$$\forall x \in [0,1[,\ \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)(1-x)^{x-1} \leqslant \frac{2+x}{2-x}$$

puis $\forall x \in [0,1[,\ 1 + \exp\left(\dfrac{x^2}{2}\right)(1-x)^{x-1} \leqslant \dfrac{4}{2-x}$.

Q 32.

Le remplacement de x par λ dans l'inégalité obtenue à la question Q 29. fournit

$$E\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)\right) \leqslant \frac{1}{2p_+}\frac{4}{2-\lambda}$$

Or $p_+ (2-\lambda) = p_+ \left(1 + \frac{p_-}{p_+}\right) = p_+ + p_-$ et ainsi $E\left(\exp\left(\frac{1}{8} d(X,C)^2\right)\right) \leqslant \frac{2}{p_+ + p_-}$, puis
$$\left(\frac{p_+ + p_-}{2}\right) E\left(\exp\left(\frac{1}{8} d(X,C)^2\right)\right) \leqslant 1$$
Selon le résultat de la question Q 21., cette inégalité s'écrit aussi
$$P(X \in C)\, E\left(\exp\left(\frac{1}{8} d(X,C)^2\right)\right) \leqslant 1$$
Ce raisonnement achève la démonstration de l'hérédité de la récurrence dans le cas où $C \cap X(\Omega)$ contient au moins deux éléments. Néanmoins la sous-partie II.A a consisté à traiter les deux autres cas possibles.

En conclusion, l'inégalité (II.1) est bien vérifiée en dimension finie quelconque.

II.G - Inégalité de Talagrand

Q 33.

Soient C un convexe fermé non vide de E et t un réel strictement positif. Par croissance de exp, on a $\{d(X,C) \geqslant t\} = \left\{\exp\left(\frac{1}{8} d(X,C)^2\right) \geqslant \exp\left(\frac{t^2}{8}\right)\right\}$. L'application de l'inégalité de Markov à la variable aléatoire positive $\exp\left(\frac{1}{8} d(X,C)^2\right)$ donne alors
$$P(d(X,C) \geqslant t) \leqslant \exp\left(-\frac{t^2}{8}\right) E\left(\exp\left(\frac{1}{8} d(X,C)^2\right)\right)$$
Par conséquent l'inégalité (II.1) donne
$$\boxed{P(X \in C)\, P(d(X,C) \geqslant t) \leqslant \exp\left(-\frac{t^2}{8}\right)}$$

III Démonstration du théorème de Johnson-Lindenstrauss

La notation $\| \ \|_F$ pour la norme euclidienne sur E est étonnante mais sans incidence sur les raisonnements.

III. A - Une inégalité de concentration

Q 34.

Soient $r \in \mathbf{R}$ et $C = \{M \in \mathcal{M}_{k,d}(\mathbf{R}) \mid g(M) \leqslant r\}$. On peut signaler que si r est strictement négatif, alors $C = \emptyset$.

D'une part, l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{k,d}(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathbf{R}^k \\ M & \longmapsto & M \cdot u \end{array}$ définie linéaire sur un espace vectoriel de dimension finie est continue. De plus la norme $\| \ \|$ sur $\mathbf{R}^k$ est continue. Par composition de fonctions continues, la fonction g est continue sur $\mathcal{M}_{k,d}(\mathbf{R})$. Ainsi C apparaît comme l'image réciproque par g du fermé $[0, r]$ de $\mathbf{R}$. donc C est un fermé de $\mathcal{M}_{k,d}(\mathbf{R})$.

D'autre part établissons la convexité de C. Soit donc $(\lambda, M, N) \in [0,1] \times C \times C$. Par inégalité triangulaire et homogénéité de la norme $\| \ \|$ sur $\mathbf{R}^k$, on a
$$\|((1-\lambda) M + \lambda N) \cdot u\| \leqslant (1-\lambda) \|M \cdot u\| + \lambda \|N \cdot u\| \leqslant (1-\lambda) r + \lambda r$$
c'est-à-dire $g((1-\lambda) M + \lambda N) \leqslant r$, ce qui signifie que l'on a $(1-\lambda) M + \lambda N \in C$. Par conséquent, C est une partie convexe de $\mathcal{M}_{k,d}(\mathbf{R})$.

En conclusion, C est une partie convexe et fermée de $\mathcal{M}_{k,d}(\mathbf{R})$.

Q 35.

Soit $M \in \mathcal{M}_{k,d}(\mathbf{R})$. $M = (m_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant k \\ 1 \leqslant j \leqslant d}}$. Par définition de la norme euclidienne sur $\mathbf{R}^k$, on a

$$\|M \cdot u\|^2 = \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{d} m_{i,j} u_j \right)^2$$

Utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbf{R}^d$, on obtient

$$\forall i \in [\![1, k]\!], \quad \left(\sum_{j=1}^{d} m_{i,j} u_j \right)^2 \leqslant \left(\sum_{j=1}^{d} m_{i,j}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{d} u_j^2 \right)$$

Comme, par hypothèse $\sum_{j=1}^{d} u_j^2 = \|u\|^2 = 1$, on déduit de ce qui précède

$$\|M \cdot u\|^2 \leqslant \left(\sum_{j=1}^{d} m_{i,j}^2 \right)$$

ou encore $\boxed{\|M \cdot u\| \leqslant \|M\|_F}$.

Soit $(r, t) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+^*$ (petit oubli de l'énoncé concernant la positivité de r).

Q 36.

Soit $M \in \mathcal{M}_{k,d}(\mathbf{R})$ vérifiant $d(M, C) < t$. Selon la question Q 34., est une partie convexe et fermée de $\mathcal{M}_{k,d}(\mathbf{R})$, non vide car $0 \in C$. D'après la question Q 4., il existe une (unique) matrice V, que l'on fixe, appartenant à C telle que $d(M, C) = \|M - V\|_F$.

Par hypothèse $\|M - V\|_F < t$ et, grâce à la question Q 35., l'inégalité triangulaire donne

$$\|M \cdot u\| \leqslant \|(M - V) \cdot u\| + \|V \cdot u\| \leqslant \|M - V\|_F + \|V \cdot u\| \leqslant \|M - V\|_F + r < t + r$$

car $V \in C$.

En conclusion $\boxed{\forall M \in \mathcal{M}_{k,d}(\mathbf{R}),\ d(M, C) < t \Longrightarrow g(M) < t + r}$.

Q 37.

Utilisons l'inégalité de Talagrand vue à la question Q 33. dans l'espace vectoriel euclidien $(\mathcal{M}_{k,d}(\mathbf{R}), (\ |\ ))$, muni de la base canonique $(E_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant k \\ 1 \leqslant j \leqslant d}}$ qui en est une base orthonormée.

On a $X = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant k \\ 1 \leqslant j \leqslant d}} \varepsilon_{i,j} E_{i,j}$ où les variables aléatoires $\varepsilon_{i,j}$, $(i, j) \in [\![1, k]\!] \times [\![1, d]\!]$, sont des variables de Rademacher indépendantes et C un convexe fermé non vide de $\mathcal{M}_{k,d}(\mathbf{R})$. Ainsi

$$P(X \in C)\, P(d(X, C) \geqslant t) \leqslant \exp\left(-\frac{t^2}{8} \right)$$

Or $\{X \in C\} = \{g(X) \leqslant r\}$ (définition de C) et $\{g(X) \geqslant r + t\} \subset \{d(X, C) \geqslant t\}$ (contraposée de l'implication justifiée en Q 36.).

On en déduit l'inégalité demandée, à savoir

$$\boxed{P(g(X) \leqslant r)\, P(g(X) \geqslant r + t) \leqslant \exp\left(-\frac{t^2}{8} \right)}$$

III.B - Médianes

Q 38.

Comme Ω est un ensemble fini, il en est de même de $g(X)(\Omega)$. Notons $g(X)(\Omega) = \{y_1, \dots, y_n\}$ avec $y_1 < \cdots < y_n$ et y_0 un réel strictement plus petit que y_1 (par exemple $y_0 = y_1 - 1$).

Suivant l'indication de l'énoncé considérons G la fonction de répartition de $g(X)$, définie par $\forall t \in \mathbb{R},\ G(t) = P(g(X) \leqslant t)$.

La fonction G est croissante et vérifie

$$\begin{cases} \forall t < y_1,\ G(t) = 0 \\ \forall t \geqslant y_n,\ G(t) = 1 \end{cases} \qquad \forall i \in [\![1, n-1]\!],\ \forall t \in [y_i, y_{i+1}[,\ G(t) = G(y_i)$$

Avec ces notations, considérons $i_0 = \min\left\{i \in [\![1, n]\!] \mid G(y_i) \geqslant \dfrac{1}{2}\right\}$: les propriétés énoncées précédemment assurent la bonne définition de i_0. Notons alors $m = y_{i_0}$.

D'une part $P(g(X) \leqslant m) = P(g(X) \leqslant y_{i_0}) = G(y_{i_0})$ et, par construction, $P(g(X) \leqslant m) \geqslant \dfrac{1}{2}$.

D'autre part $G(y_{i_0-1}) < \dfrac{1}{2}$ et, comme $P(g(X) > y_{i_0-1}) = 1 - G(y_{i_0-1})$, $P(g(X) > y_{i_0-1}) > \dfrac{1}{2}$.

Or on a $\{g(X) \geqslant m\} = \{g(X) > y_{i_0-1}\}$, ce qui fournit notamment $P(g(X) \geqslant m) \geqslant \dfrac{1}{2}$.

En conclusion $g(X)$ a au moins une médiane.

Q 39.

Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. On note m une médiane de $g(X)$. Utilisons le résultat de la question Q 37. en remplaçant successivement r par m puis r par $m - t$. On a ainsi

$$P(g(X) \leqslant m)\, P(g(X) \geqslant m + t) \leqslant \exp\left(-\frac{t^2}{8}\right) \qquad P(g(X) \leqslant m - t)\, P(g(X) \geqslant m) \leqslant \exp\left(-\frac{t^2}{8}\right)$$

Par sommation de ces deux inégalités, la définition de m donnée à la question Q 38. conduit à

$$P(g(X) \geqslant m + t) + P(g(X) \leqslant m - t) \leqslant 4 \exp\left(-\frac{t^2}{8}\right)$$

Enfin, comme $\{|g(X) - m| \geqslant t\} = \{g(X) \geqslant m + t\} \uplus \{g(X) \leqslant m - t\}$ (union disjointe), par additivité de la probabilité l'inégalité précédente s'écrit

$$\boxed{P(|g(X) - m| \geqslant t) \leqslant 4 \exp\left(-\frac{t^2}{8}\right)}$$

Q 40.

La variable aléatoire $g(X) - m$ vérifie les hypothèses de la sous-partie I.D avec $a = 4$ et $b = \dfrac{1}{8}$.

Le résultat de la question Q 9. s'écrit ici $\boxed{E\left((g(X) - m)^2\right) \leqslant 32}$.

Q 41.

Avec les notations de l'énoncé, on a $g(X)^2 = \|X \cdot u\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{d} \varepsilon_{i,j} u_j\right)^2$. En outre

$$\forall i \in [\![1, k]\!],\ \left(\sum_{j=1}^{d} \varepsilon_{i,j} u_j\right)^2 = \sum_{j=1}^{d} \varepsilon_{i,j}^2 u_j^2 + 2 \sum_{1 \leqslant p < q \leqslant d} \varepsilon_{i,p} u_p \varepsilon_{i,q} u_q = 1 + 2 \sum_{1 \leqslant p < q \leqslant d} \varepsilon_{i,p} u_p \varepsilon_{i,q} u_q$$

(on a $\forall (i, j) \in [\![1, k]\!] \times [\![1, d]\!],\ \varepsilon_{i,j}^2 = 1$ et le vecteur u est normé).

De plus les variables aléatoires $\varepsilon_{i,j}$, $(i,j) \in [\![1,k]\!] \times [\![1,d]\!]$, sont centrées et indépendantes. Par conséquent

$$E\left(\sum_{1\leqslant p<q\leqslant d} \varepsilon_{i,p} u_p \varepsilon_{i,q} u_q\right) = \sum_{1\leqslant p<q\leqslant d} E(\varepsilon_{i,p})\, u_p E(\varepsilon_{i,q})\, u_q = 0$$

Finalement

$$E\left(g(X)^2\right) = \sum_{i=1}^{k} E(1) = k$$

Enfin la question Q 6., appliquée aux variables aléatoires $g(X)$ et 1 avec $p = q = \dfrac{1}{2}$, donne $\boxed{E(g(X)) \leqslant \sqrt{k}}$.

Q 42.

Par linéarité de l'espérance, on obtient

$$E\left((g(X) - m)^2\right) = E\left(g(X)^2\right) - 2mE(g(X)) + m^2$$

ce qui, grâce à la question Q 41., fournit aisément

$$\boxed{E\left((g(X) - m)^2\right) \geqslant \left(\sqrt{k} - m\right)^2}$$

III.C - Un lemme-clé

Q 43.

Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. Comme vu à la question Q 39., la variable aléatoire $g(X) - m$ est à queue sous-gaussienne avec $a = 4$ et $b = \dfrac{1}{8}$.

Pour utiliser le résultat des questions Q 12. et Q 13., notons $\delta = m - \sqrt{k}$ de sorte que $\delta^2 \leqslant \dfrac{a}{b}$ (question Q 42.). En remarquant que l'on a $g(X) - \sqrt{k} = (g(X) - m) + \left(m - \sqrt{k}\right)$, on aboutit bien à

$$\boxed{P\left(\left|g(X) - \sqrt{k}\right| \geqslant t\right) \leqslant 4\exp(4)\exp\left(-\frac{t^2}{16}\right)}$$

Q 44.

Soit u un vecteur normé de $\mathbb{R}^d$. Avec les notations de l'énoncé, on a

$$\{|\|A_k \cdot u\| - 1| > \varepsilon\} = \left\{\left|\|X \cdot u\| - \sqrt{k}\right| > \varepsilon\sqrt{k}\right\}$$

et ainsi $\{|\|A_k \cdot u\| - 1| > \varepsilon\} \subset \left\{\left|g(X) - \sqrt{k}\right| \geqslant \varepsilon\sqrt{k}\right\}$.

D'après la question Q 43., on a donc

$$P(|\|A_k \cdot u\| - 1| > \varepsilon) \leqslant P\left(\left|g(X) - \sqrt{k}\right| \geqslant \varepsilon\sqrt{k}\right) \leqslant 4\exp(4)\exp\left(-\frac{k\,\varepsilon^2}{16}\right)$$

Ayant imposé la condition $k \geqslant 160\dfrac{\ln(1/\delta)}{\varepsilon^2}$ et comme $\delta \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right[$, l'inégalité précédente conduit à

$$P(|\|A_k \cdot u\| - 1| > \varepsilon) \leqslant 4\exp(4)\,\delta^{10} \leqslant 4\exp(4)\,\frac{\delta}{2^9}$$

ou encore $P(|\|A_k \cdot u\| - 1| > \varepsilon) \leqslant \exp(4)\,\dfrac{\delta}{2^7}$.

Comme $7\ln(2) > 4$, on aboutit finalement à $\boxed{P(|\|A_k \cdot u\| - 1| > \varepsilon) < \delta}$.

III.D - Conclusion

Q 45.

Soit $(i, j) \in [\![1, N]\!]^2$. En posant $u = \dfrac{v_i - v_j}{\|v_i - v_j\|}$, le résultat de la question Q 44. s'écrit $P\left(\overline{E_{ij}}\right) < \delta$.

Q 46.

On a $P\left(\overline{\bigcap_{1\leqslant i<j\leqslant N} E_{ij}}\right) = P\left(\bigcup_{1\leqslant i<j\leqslant N} \overline{E_{ij}}\right)$ et, par sous-additivité de la probabilité, la question Q 45. donne

$$P\left(\overline{\bigcap_{1\leqslant i<j\leqslant N} E_{ij}}\right) \leqslant \sum_{1\leqslant i<j\leqslant N} P\left(\overline{E_{ij}}\right) \leqslant \frac{N(N-1)}{2}\delta$$

Par passage au complémentaire, on an déduit $\boxed{P\left(\bigcap_{1\leqslant i<j\leqslant N} E_{ij}\right) \geqslant 1 - \frac{N(N-1)}{2}\delta}$.

Q 47.

Posons $c = 320$. Soient $(\varepsilon, N, d) \in]0, 1[\times (\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}) \times (\mathbb{N} \setminus \{0, 1\})$ et $v_1, \dots, v_N$ vecteurs deux à deux distincts de $\mathbb{R}^d$.

Choisissons k entier naturel supérieur ou égal à $c\dfrac{\ln(N)}{\varepsilon^2}$. Enfin posons $\delta = \dfrac{1}{N^2}$ (qui appartient bien à $\left]0, \dfrac{1}{2}\right[$) de sorte que $k \geqslant 160\dfrac{\ln(1/\delta)}{\varepsilon^2}$. Avec des notations adaptées de celles introduites ci-dessus, on a $P\left(\bigcap_{1\leqslant i<j\leqslant N} E_{ij}\right) > 0$, notamment $\bigcap_{1\leqslant i<j\leqslant N} E_{ij} \neq \emptyset$.

Ce qui précède assure l'existence d'une matrice A_k dont l'application linéaire canoniquement associée répond à la question.

MARCHES ALEATOIRES

Eléments de correction

Partie I : Chemins dans le plan euclidien

On s'intéresse aux chemins joignant l'origine O au point de coordonnées (p, q).

Etant donnés (a, b) et (c, d) appartenant à $[\![0, p+q]\!]^2$, on notera $(a, b) \rightsquigarrow (c, d)$ l'ensemble des chemins joignant le point de coordonnées (a, b) au point de coordonnées (c, d).

1. On construit, de façon naturelle, une bijection de l'ensemble des chemins joignant l'origine O au point de coordonnées (p, q) sur celui des mots de longueur égale à $p+q$ utilisant les deux lettres N et E (nord et est). Un tel mot est entièrement caractérisé par le placement des q lettres N, c'est-à-dire par le choix de q numéros de places parmi $p+q$.
En conclusion le nombre de chemins joignant l'origine O au point de coordonnées (p, q) est égal à $\begin{pmatrix} p+q \\ q \end{pmatrix}$ (ou $\begin{pmatrix} p+q \\ p \end{pmatrix}$).

2. Dans cette question, on suppose $q > p$. On cherche à déterminer le nombre de chemins joignant l'origine O au point de coordonnées (p, q) en restant strictement au-dessus de la première bissectrice (sauf en O).

   (a) A tout chemin joignant le point de coordonnées $(0, 1)$ au point de coordonnées (p, q) et rencontrant la première bissectrice, on associe son "symétrique partiel" par rapport à la première bissectrice, c'est-à-dire de la portion joignant O à son premier point de rencontre avec la première bissectrice, en ne modifiant pas la seconde portion du chemin considéré. On définit ainsi un chemin joignant le point de coordonnées $(1, 0)$ au point de coordonnées (p, q).
   On définit par le même procédé la fonction réciproque de la précédente (ce n'est pas vraiment une involution car les ensembles de départ et d'arrivée sont distincts).
   Par conséquent le nombre de chemins joignant le point de coordonnées $(0, 1)$ au point de coordonnées (p, q) et rencontrant la première bissectrice est égal au nombre de chemins joignant le point de coordonnées $(1, 0)$ au point de coordonnées (p, q).

   (b) Le nombre $\mathcal{N}(p, q)$ de chemins joignant l'origine O au point de coordonnées (p, q) sans rencontrer la première bissectrice est égal au nombre de chemins joignant le point de coordonnées $(0, 1)$ au point de coordonnées (p, q) sans rencontrer la première bissectrice. Par passage au complémentaire, la question précédente donne
   $$\begin{aligned} \mathcal{N}(p, q) &= \operatorname{card}((0,1) \rightsquigarrow (p,q)) - \operatorname{card}((1,0) \rightsquigarrow (p,q)) \\ &= \begin{pmatrix} p+q-1 \\ p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p+q-1 \\ p-1 \end{pmatrix} = \frac{q-p}{q+p} \begin{pmatrix} p+q \\ p \end{pmatrix} \end{aligned}$$
   Ainsi la probabilité que ce chemin ne rencontre pas la première bissectrice est égale à $\dfrac{q-p}{q+p}$.
   Application : lors d'un scrutin opposant deux candidats A (obtenant q voix) et B (obtenant p voix), supposant le tirage des bulletins de l'urne équiprobable, la probabilité qu'à toutes les étapes du dépouillement le candidat A soit en tête est égale à $\dfrac{q-p}{q+p}$.

3. A un chemin C joignant l'origine O au point de coordonnées (p, q) ne traversant pas la première bissectrice, on associe le chemin d'origine le point de coordonnées $(-1, 0)$ à l'origine O, puis suivant sans modification le tracé défini par C : ce chemin joint le point de coordonnées $(-1, 0)$ au point de

coordonnées (p,q) sans rencontrer la droite d'équation $y = x - 1$.
Réciproquement à un tel chemin, on associe, en en "supprimant" le saut de puce de $(-1,0)$ à $(0,0)$, un chemin joignant l'origine O au point de coordonnées (p,q) ne traversant pas la première bissectrice.
Par conséquent, le nombre $\mathcal{N}'(p,q)$ de chemins joignant l'origine O au point de coordonnées (p,q) ne traversant pas la première bissectrice se déduit, par translation, du résultat de la question précédente. Ainsi

$$\mathcal{N}'(p,q) = \mathcal{N}(p,q+1) = \frac{q+1-p}{q+1+p}\binom{p+q+1}{p}$$

Puis la probabilité demandée est

$$\frac{\frac{q+1-p}{q+1+p}\binom{p+q+1}{p}}{\binom{p+q}{p}} = \cdots = 1 - \frac{p}{q+1}$$

Partie II : Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

Une puce se déplace sur $\mathbb{Z}$ en partant de l'origine et en se déplaçant d'un saut à gauche ou à droite de façon équiprobable.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) On peut introduire l'ensemble Ω des $2n-$listes d'éléments de $\{-1,+1\}$ pour modéliser l'expérience considérée : on a $\operatorname{card}\Omega = 2^{2n}$. De la même façon que dans la partie I, le retour de la puce à l'origine après $2n$ sauts se traduit par l'obtention de n sauts à gauche et de n sauts à droite (pour réaliser les $2n$ premiers sauts), c'est-à-dire le placement de n sauts à gauche (par exemple) parmi les $2n$ premiers. Par conséquent $\mathbb{P}_n = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$.
   (b) Reprenant la modélisation de la partie I, il s'agit de dénombrer les chemins de longueur $2n$ joignant l'origine O au point de coordonnées (n,n) sans rencontrer la première bissectrice (exceptés en $(0,0)$ et (n,n)), c'est-à-dire aussi les chemins joignant le point de coordonnées $(0,1)$ (respectivement $(1,0)$) au point de coordonnées $(n-1,n)$ (respectivement $(n,n-1)$) sans rencontrer la première bissectrice, donc "toujours en-dessous" ou "toujours au-dessus" (d'où le facteur 2 dans le dénombrement qui suit) : selon la question I 2., le nombre de ces chemins ($p = n-1$ et $q = n$ ou cas symétrique) est égal à

$$\frac{2}{2n-1}\binom{2n-1}{n}$$

   Ainsi la probabilité que la puce revienne à l'origine, pour la première fois, après $2n$ sauts est égale à $\frac{1}{2^{2n-1}}\frac{1}{2n-1}\binom{2n-1}{n}$.

2. On modélise la marche aléatoire de la puce à l'aide d'une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ indépendantes de même loi définie par

$$P(X_1 = 1) = P(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$$

On pose $S_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = S_0 + \sum_{k=1}^{n} X_k$ (position de la puce après le n^{me} saut).

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. C'est ce qui semble "évident" qui est le moins facile à formaliser. Considérons l'évènement contraire de celui qui nous intéresse, à savoir $\bigcup_{i \geqslant n+1} \left\{ \sum_{k=n+1}^{i} X_k = 0 \right\}$.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Nous pouvons écrire (S_n étant à valeurs dans $[\![-n, +n]\!]$)

$$\bigcup_{i=n+1}^{n+p} \left\{ \sum_{k=n+1}^{i} X_k = 0 \right\} = \biguplus_{k=-n}^{n} \left\{ \sum_{j=n+1}^{i} X_j = 0, S_n = k \right\}$$

puis

$$P\left(\bigcup_{i=n+1}^{n+p} \left\{ \sum_{k=n+1}^{i} X_k = 0 \right\} \right) = \sum_{k=-n}^{n} P\left(\bigcup_{i=n+1}^{n+p} \{X_{n+1} + \cdots + X_i = 0, X_1 + \cdots + X_n = k\} \right)$$

Pour k appartenant à $[\![-n, +n]\!]$, on peut développer $P\left(\bigcup_{i=n+1}^{n+p} \{X_{n+1} + \cdots + X_i = 0, X_1 + \cdots + X_n = k\} \right)$ à l'aide de la formule du crible, comme combinaison linéaire de quantités de la forme (pour $r \in [\![1, p]\!]$)

$$\sum_{n+1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leqslant n+p} P\left(\{X_{n+1} + \cdots + X_{i_1} = 0, \ldots, X_{i_{r-1}+1} + \cdots + X_{i_r} = 0, X_1 + \cdots + X_n = k\} \right)$$

Selon le lemme des coalitions "étendu", les variables aléatoires X_j, $j \in \mathbb{N}^*$, étant indépendantes de même loi, la somme précédente s'écrit aussi

$$\sum_{n+1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leqslant n+p} P\left(\{X_{n+1} + \cdots + X_{i_1} = 0, \ldots, X_{i_{r-1}+1} + \cdots + X_{i_r} = 0\} \right) P\left(X_1 + \cdots + X_n = k \right)$$

puis

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leqslant p} P\left(\{X_1 + \cdots + X_{i_1} = 0, \ldots, X_{i_{r-1}+1} + \cdots + X_{i_r} = 0\} \right) P\left(X_1 + \cdots + X_n = k \right)$$

Réinjectant ces expressions dans la formule du crible (que nous n'avons pas développée) mentionnée ci-dessus, on aboutit à

$$P\left(\bigcup_{i=n+1}^{n+p} \left\{ \sum_{k=n+1}^{i} X_k = 0 \right\} \right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{p} \left\{ \sum_{k=1}^{i} X_k = 0 \right\} \right)$$

et cette quantité ne dépend pas de n.

On conclut finalement à l'aide de la propriété de continuité croissante (en faisant tendre p vers l'infini) qui fournit

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i \geqslant n+1} \left\{ \sum_{k=n+1}^{i} X_k = 0 \right\} \right) &= \lim_{p \to \infty} P\left(\bigcup_{i=n+1}^{n+p} \left\{ \sum_{k=n+1}^{i} X_k = 0 \right\} \right) = \lim_{p \to \infty} P\left(\bigcup_{i=1}^{p} \left\{ \sum_{k=1}^{i} X_k = 0 \right\} \right) \\ &= P\left(\bigcup_{i \geqslant 1} \left\{ \sum_{k=1}^{i} X_k = 0 \right\} \right) \end{aligned}$$

quantité indépendante de n.

(b) La formule de Stirling appliquée à la valeur trouvée à la question 1. (a) fournit

$$\mathbb{P}_n \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

Par comparaison à un exemple de Riemann, la série $\sum \mathbb{P}_n$ est divergente.

(c) On peut partitionner l'évènement $\mathcal{A} =$"la puce ne passe qu'un nombre fini de fois par l'origine" par le temps de dernier passage à l'origine qui est nécessairement pair. Ainsi

$$\mathcal{A} = \biguplus_{n\in\mathbb{N}} \{S_{2n} = 0 \text{ et } (\forall i \geqslant 2n+1,\ S_i \neq 0)\} = \biguplus_{n\in\mathbb{N}} \left(\{S_{2n} = 0\} \bigcap_{i\geqslant 2n+1} \left\{\sum_{k=2n+1}^{i} X_k \neq 0\right\}\right)$$

L'union précédente étant disjointe, on trouve donc

$$P(\mathcal{A}) = \sum_{n=0}^{+\infty} P\left(\{S_{2n} = 0\} \bigcap_{i\geqslant 2n+1} \left\{\sum_{k=2n+1}^{i} X_k \neq 0\right\}\right)$$

(d) Utilisant le résultat de la question (a), la quantité $P\left(\bigcap_{i\geqslant 2n+1} \left\{\sum_{k=2n+1}^{i} X_k \neq 0\right\}\right)$ est indépendante de n : notons la ρ. Par indépendance des variables aléatoires X_j, $j \in \mathbb{N}^*$, on a

$$P(\mathcal{A}) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(S_{2n} = 0)\, P\left(\bigcap_{i\geqslant 2n+1} \left\{\sum_{k=2n+1}^{i} X_k \neq 0\right\}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_n\, \rho$$

La divergence de la série $\sum \mathbb{P}_n$ impose donc $\rho = 0$: par conséquent $P(\mathcal{A}^c) = 1$, ce qui signifie que la puce retourne presque sûrement une infinité de fois à l'origine.

(e) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons B_n l'évènement "la puce repasse par l'origine après $2n$ sauts". L'inclusion $\mathcal{A}^c \subset \bigcup_{n\geqslant 1} B_n$ impose

$$P\left(\bigcup_{n\geqslant 1} B_n\right) = 1$$

ou encore, selon le résultat de la question 1. (b),

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n-1}} \frac{1}{2n-1} \binom{2n-1}{n} = 1$$

Partie III : Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^2$

Dans cette partie, on étudie la marche aléatoire d'une puce sur $\mathbb{Z}^2$ à partir de l'origine.

On considère une suite de vecteurs aléatoires $(D_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ (avec $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ D_n = (X_n, Y_n)$) indépendants de même loi définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(D_1 = (1,0)) = P(D_1 = (-1,0)) = P(D_1 = (0,1)) = P(D_1 = (0,-1)) = \frac{1}{4}$$

On pose $S_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = S_0 + \sum_{k=1}^{n} D_k$ (position de la puce après le n^{me} saut).

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Ayant, par exemple,

$$P(X_1 = 1, Y_1 = 1) = P(D_1 = (1,1)) = 0 \qquad P(X_1 = 1)\,P(Y_1 = 1) = \frac{1}{4}$$

les variables aléatoires X_n et Y_n ne sont pas indépendantes.

(b) On pose $U_n = X_n + Y_n$ et $V_n = X_n - Y_n$. Les valeurs atteintes par U_n et V_n sont $+1$ et -1 et

$$\begin{aligned} P((U_n, V_n) = (1,1)) &= P((U_n, V_n) = (-1,-1)) \\ &= P((U_n, V_n) = (-1,+1)) = P((U_n, V_n) = (1,-1)) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Ainsi les variables aléatoires U_n et V_n sont indépendantes ; on peut remarquer qu'elles ont même loi.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathbb{P}_n = P(S_{2n} = 0)$.
Puisque l'on a

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ X_k = \frac{1}{2}(U_k + V_k) \qquad Y_k = \frac{1}{2}(U_k - V_k)$$

on peut écrire

$$\{S_{2n} = 0\} = \left\{\sum_{k=1}^{2n} U_k = 0, \sum_{k=1}^{2n} V_k = 0\right\}$$

Par indépendance des variables aléatoires en jeu (il faudrait finir de la justifier en utilisant l'extension du lemme des coalitions), on obtient

$$\mathbb{P}_n = P\left(\sum_{k=1}^{2n} U_k = 0\right) P\left(\sum_{k=1}^{2n} V_k = 0\right) = \left(P\left(\sum_{k=1}^{2n} U_k = 0\right)\right)^2$$

On reconnaît dans la dernière probabilité celle calculée dans la question II 1. (a). Ainsi

$$\mathbb{P}_n = \left(\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}\right)^2 \qquad \text{puis} \qquad \mathbb{P}_n \sim \frac{1}{\pi n}.$$

Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum \mathbb{P}_n$ est divergente.

En adaptant le raisonnement de la fin de la partie II, en remplaçant $\sum_{k=2n+1}^{i} X_k \neq 0$ par $\sum_{k=2n+1}^{i} (X_k Y_k) \neq (0,0)$, on prouve que la puce retourne presque sûrement une infinité de fois à l'origine.

Partie IV : Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^3$

Dans cette partie, on étudie la marche aléatoire d'une puce sur $\mathbb{Z}^3$ à partir de l'origine.

On considère une suite de vecteurs aléatoires $(D_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ (avec $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ D_n = (X_n, Y_n, Z_n)$) indépendants de même loi définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(D_1 = (1,0,0)) = \cdots = P(D_1 = (0,0,-1)) = \frac{1}{6}$$

On pose $S_0^{(3)} = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n^{(3)} = S_0^{(3)} + \sum_{k=1}^{n} D_k$ (position de la puce après le n^{me} saut).

Pour k appartenant à $\{1,2,3\}$, on note $\mathbb{P}_n^{(k)}$ la probabilité de retour à l'origine de la puce en $2n$ sauts dans $\mathbb{Z}^k$ (voir parties II et III).

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$. Le retour à l'origine de la puce en $2n$ sauts s'effectue à l'aide d'un certain nombre (noté p) de déplacements $(+1,0,0)$ du même nombre de déplacements $(-1,0,0)$, d'un certain nombre (noté q) de déplacements $(0,+1,0)$ du même nombre de déplacements $(0,-1,0)$, et d'un certain nombre (noté r) de déplacements $(0,0,+1)$ du même nombre de déplacements $(0,0,-1)$ avec $2(p+q+r) = 2n$. La partition ainsi définie conduit à la formule demandée, à savoir

$$\mathbb{P}_n^{(3)} = \frac{1}{6^{2n}} \sum_{p+q+r=n} \frac{(2n)!}{(p!)^2 (q!)^2 (r!)^2} = \frac{1}{6^{2n}} \sum_{m=0}^{n} \binom{2n}{2m} \binom{2(n-m)}{n-m} \sum_{p+q=m} \frac{(2m)!}{(p!)^2 (q!)^2}$$

Par récriture de la somme triple ci-dessus, on obtient ensuite

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_n^{(3)} &= \frac{1}{6^{2n}} \sum_{p+q\leqslant n} \frac{(2n)!}{(p!)^2 (q!)^2 ((n-(p+q))!)^2} = \frac{1}{6^{2n}} \sum_{m=0}^{n} \frac{(2n)!}{(2m)!\,(2(n-m))!} \frac{(2(n-m))!}{((n-m)!)^2} \sum_{p+q=m} \frac{(2m)!}{(p!)^2 (q!)^2} \\ &= \frac{1}{6^{2n}} \sum_{m=0}^{n} \binom{2n}{2m} \binom{2(n-m)}{n-m} \sum_{p+q=m} \frac{(2m)!}{(p!)^2 (q!)^2}\end{aligned}$$

2. (a) Soit $\ell \in \mathbb{N}^*$ (la relation demandée est claire dans le cas $\ell = 0$). On a

$$\sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k}^2 = \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} \binom{\ell-k}{k}$$

Considérant un ensemble E de cardinal 2ℓ dont on utilise une partition $\{A, B\}$ en deux sous-ensembles de cardinal ℓ chacun, le décompte du nombre de parties de E de cardinal égal à ℓ (selon leur traces sur A et B) fournit l'égalité

$$\binom{2\ell}{\ell} = \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} \binom{\ell-k}{k}$$

En conclusion, pour tout entier naturel ℓ, on a

$$\sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k}^2 = \binom{2\ell}{\ell}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour ℓ appartenant à $[\![0,n]\!]$, un rappel de l'énoncé (et la relation obtenue dans le (a)) fournissent

$$\sum_{p+q=\ell} \frac{(2\ell)!}{(p!)^2 (q!)^2} = \frac{(2\ell)!}{(\ell!)^2} \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k}^2 = \binom{2\ell}{\ell} \binom{2\ell}{\ell} = \binom{2\ell}{\ell}^2 = 2^{4\ell} \mathbb{P}_\ell^{(2)}$$

puis

$$\mathbb{P}_{n-\ell}^{(1)} \mathbb{P}_\ell^{(2)} = \frac{1}{2^{2n-2\ell}} \binom{2(n-\ell)}{n-\ell} \frac{1}{2^{4\ell}} \sum_{p+q=\ell} \frac{(2\ell)!}{(p!)^2 (q!)^2} = \frac{1}{2^{2n+2\ell}} \binom{2(n-\ell)}{n-\ell} \sum_{p+q=\ell} \frac{(2\ell)!}{(p!)^2 (q!)^2}$$

et finalement, utilisant 1., on aboutit à

$$\mathbb{P}_n^{(3)} = \frac{1}{3^{2n}} \sum_{\ell=0}^{n} 2^{2\ell} \binom{2n}{2\ell} \mathbb{P}_{n-\ell}^{(1)} \mathbb{P}_\ell^{(2)}$$

(c) Selon les valeurs obtenues dans les parties II et III, on a $\mathbb{P}_n^{(1)} = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ et $\mathbb{P}_n^{(2)} = O\left(\frac{1}{n}\right)$.
Ainsi il existe deux réels positifs C_1 et C_2, que l'on fixe, tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}_n^{(1)} \leqslant \frac{C_1}{\sqrt{n}} \qquad \mathbb{P}_n^{(2)} \leqslant \frac{C_2}{n}$$

Sot $n \in \mathbb{N}^*$. Selon l'expression de la question précédente, on peut écrire

$$\mathbb{P}_n^{(3)} \leqslant \frac{\mathbb{P}_n^{(1)} + \mathbb{P}_n^{(2)}}{3^{2n}} + \frac{C_1 C_2}{n\sqrt{n}} \sum_{\ell=1}^{n-1} \binom{2n}{2\ell} \left(\frac{2}{3}\right)^{2\ell} \left(\frac{1}{3}\right)^{2n-2\ell} \frac{1}{\left(\frac{\ell}{n}\right)\sqrt{1-\frac{\ell}{n}}}$$

Grâce au résultat que l'énoncé suggère d'admettre sans démonstration et à la majoration $\mathbb{P}_n^{(1)} + \mathbb{P}_n^{(2)} \leqslant 2$, on en déduit que l'on a $\mathbb{P}_n^{(3)} = O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.

3. Pour n entier naturel, notons A_n l'évènement "la puce est à l'origine à l'instant $2n$" : on $\mathbb{P}_n^{(3)} = P(A_n)$. Comme la série $\sum P(A_n)$ est convergente (voir question précédente), le lemme de Borel-Cantelli fournit $P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{k\geqslant n} A_k\right)\right) = 0$: en conclusion la puce ne retourne presque sûrement qu'un nombre fini à l'origine.

4. *Question subsidiaire.*
Considérons la fonction $f :\ ]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{1}{x\sqrt{1-x}}$. La fonction f est de classe C^1 sur $]0,1[$ et
$\forall x \in]0,1[,\ f'(x) = \frac{3x-2}{2x^2(1-x)^{3/2}}$.
Le tableau de variations de f est le suivant :

x	0		$2/3$		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Soit $n \in \mathbb{N}$; n "assez grand" pour que ce qui suit ait un sens (il s'agit de faire tendre n vers l'infini). Les valeurs de f qui nous intéressent sont celles qu'elle prend sur l'intervalle $\left[\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right]$:

découpons cet intervalle en trois, à savoir $\left[\frac{1}{n}, \frac{\frac{1}{2}\left(\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor+1\right)}{n}\right]$, $\left]\frac{\frac{1}{2}\left(\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor+1\right)}{n}, \frac{\frac{1}{2}\left(\left\lfloor\frac{5n}{3}\right\rfloor+1\right)}{n}\right[$ et $\left[\frac{\frac{1}{2}\left(\left\lfloor\frac{5n}{3}\right\rfloor+1\right)}{n}, 1-\frac{1}{n}\right]$. Utilisons les variations de f ainsi que les variations de la suite des coefficients binomiaux $\left(\binom{2n}{2\ell}\right)_{1\leqslant\ell\leqslant n-1}$, qui est croissante sur $[\![1, \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor]\!]$ et décroissante sur $[\![\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1, n-1]\!]$, pour majorer chacun des trois "morceaux" de la somme considérée. Notamment, on a

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{n^{3/2}}{\sqrt{n-1}} \qquad f\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{n\sqrt{n}}{n-1} \qquad f\left(\frac{1}{6}\right)=6\sqrt{\frac{6}{5}} \qquad f\left(\frac{5}{6}\right)=\frac{6\sqrt{6}}{5}$$

Posons

$$\forall \ell \in [\![1, n-1]\!],\ a_{n,\ell}=\binom{2n}{2\ell}\left(\frac{2}{3}\right)^{2\ell}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n-2\ell}\frac{1}{\left(\frac{\ell}{n}\right)\sqrt{1-\frac{\ell}{n}}}$$

D'une part

$$\sum_{\ell=1}^{\frac{1}{2}(\lfloor\frac{n}{3}\rfloor+1)} a_{n,\ell} \leqslant \binom{2n}{\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}\frac{n^{3/2}}{\sqrt{n-1}}\sum_{\ell=1}^{\frac{1}{2}(\lfloor\frac{n}{3}\rfloor+1)} 3^{2\ell} \leqslant \binom{2n}{\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}\frac{n^{3/2}}{\sqrt{n-1}}\frac{9\,3^{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor+1}}{2}$$

Or la formule de Stirling fournit un équivalent de $\binom{2n}{\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor+1}$ dominé par $\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{2^{2n}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{n/3}\left(\frac{5}{3}\right)^{5n/3}}$, c'est-à-dire $\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{2^{2n}\,3^{2n}}{5^{5n/3}}$. Ceci permet d'obtenir un majorant de ce premier morceau de somme par un terme dominé par $\frac{n}{\sqrt{n-1}}\frac{2^{2n}3^{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor+1}}{5^{5n/3}}$. Or

$$\frac{2^{2n}3^{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor}}{5^{5n/3}} \leqslant \exp\left(n\ln\left(\frac{4\sqrt[3]{3}}{5^{5/3}}\right)\right) \qquad \text{et} \qquad \frac{4\sqrt[3]{3}}{5^{5/3}} \approx 0.40$$

Par conséquent, ce premier morceau de somme a pour limite 0 quand n tend vers l'infini.
Par symétrie on justifie, de la même manière, que le troisième a le même comportement.
Enfin

$$\sum_{\ell=\frac{1}{2}(\lfloor\frac{n}{3}\rfloor+2)}^{\frac{1}{2}\lfloor\frac{5n}{3}\rfloor} a_{n,\ell} \leqslant 6\sqrt{\frac{6}{5}}\sum_{\ell=0}^{n}\binom{2n}{2\ell}\left(\frac{2}{3}\right)^{2\ell}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n-2\ell} \qquad \text{puis} \qquad \sum_{\ell=\frac{1}{2}(\lfloor\frac{n}{3}\rfloor+2)}^{\frac{1}{2}\lfloor\frac{5n}{3}\rfloor} a_{n,\ell} \leqslant 6\sqrt{\frac{6}{5}}$$

Tout ceci fournit finalement le résultat voulu.