



MP Physique Chimie PAQUES 2022

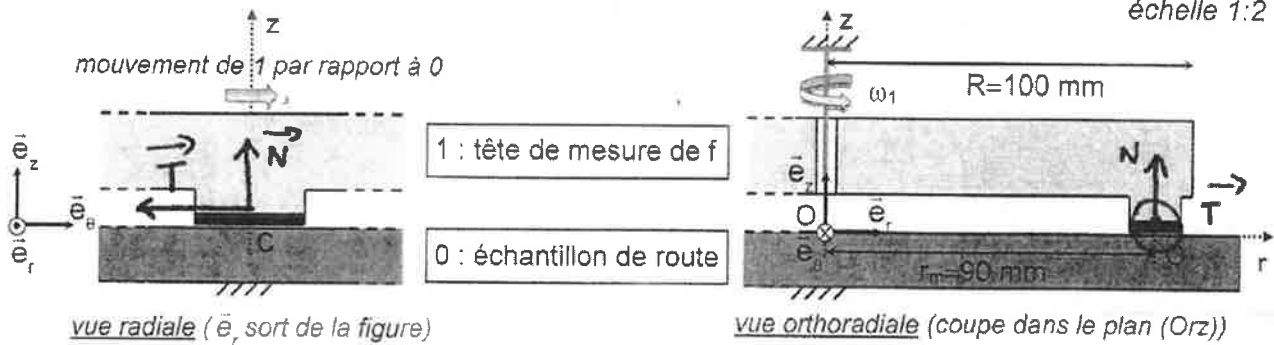
Réponses

E3a MP (extrait 2014) : machine de W et S	Méca du solide	1h30
CCP MP 2016 pb II : eau de javel	Chimie	2h
CCP MP 2019 : autour d'une raie spectrale	Ondes, optique, MQ	4h
CCP MP 2015 pb I Les Z machines	Elm	2h
CCP MP 2017 (la physique au pays des patients)	Thermostat, electromagnétisme	4h
CCP MP 2018 : atome de Bohr	Méca, MQ, optique	4h
Centrale MP 2019 Vie et mort d'un photon	MQ, ondes, optique	4h
Centrale MP 2017 : pesanteur Q bounce...	Mécanique, MQ	4h
Centrale MP 2016 : installation REP	Thermo meca opt, thstat	4h
Centrale MP 2020 : Proxima du Centaure	Meca, opt, chimie, optique, elm	4h
Centrale MP 2018 : géophysique de la Terre	Meca, elm	4h
Centrale MP 2018 : température dans la couronne solaire	Thstat, ondes , chimie	4h
Mines MP 2017 : memristors	Elec, Elm, MQ	3h
Mines MP 2020 : Cuivre	Thstat, thermique, elm, elec	3h
Mines MP 2020 : au temps des mayas	Thermo, optique , elec	3h
Mines MP 2018 : Pour un neutron de plus.	Ondes, MQ	3h
Mines MP 2018 : bioéthanol	chimie	1h30
Mines MP 2016 : le béton	Chimie	1h30
Mines MP 2017 : capacité thermique des gaz	Thstat, MQ meca	3h

(E3a MP 2014) Machine de Wehner et Schülec

Figure D : Tête de mesure du coefficient de frottement (un seul patin est représenté)

échelle 1:2



D2 $T = f N$ car il y a glissement $\vec{T} = -T \vec{e}_0$

D3 TAC projeté sur Oz : $3N - mg = 0 \Rightarrow N = \frac{mg}{3}$
et $T = f \frac{mg}{3}$

D4 $M_{T,Oz} = -f \frac{mg}{3} \cdot r_m$

D5 $\omega_{1i} = \omega_{0,1/0} i / r_m = \frac{100}{3.6 \times 9.10^2} = 309 \text{ rad/s}$

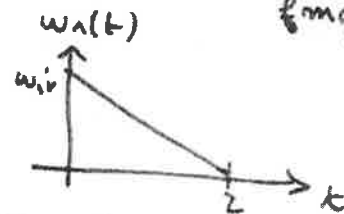
D6 Tant qu'il y a glissement, le TMC / à Oz sur la tête donne $J \dot{\omega} = -f mg r_m$

D7 $\omega_1(t) = \omega_{1i} - \frac{f mg r_m}{J} t \Rightarrow \text{arrêt à } t = \tau = \frac{J \omega_{1i}}{f mg r_m}$

D8 avec $J = \frac{1}{2} m R^2$, $\tau = \frac{R^2 \omega_{1i}}{2 f g r_m}$

ne dépend pas de la masse, ne dépend pas du nombre de patins

D9 $f = \frac{R^2 \omega_{1i}}{2 \tau g r_m} = 0.416$ - plutôt grand...



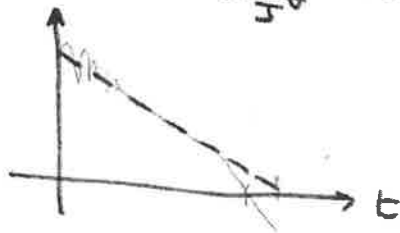
D10 Pour maintenir la vitesse constante : $\dot{\omega} = 0$

$\Rightarrow M_0 + 3M_{T,Oz} = 0 \Rightarrow M_0 = -f mg r_m$ (+actions réciproques)

D11 v petit : $f \downarrow$ vite qd $v \uparrow$
 v moyen : f fct. affine de v , varie peu.
 v grand : f oscille.

D12 pour 60 km/h, on trouve ≈ 0.4 ce qui correspond au modèle précédent -

si $f \uparrow$ $\dot{\omega} = -\frac{f mg r_m}{J}$: ω décroît plus vite ...



D13 $\theta_p = \frac{b}{r_m} = \frac{1}{3} \text{ rad} = 19^\circ$

la surface est $\frac{\theta_p}{2} \times (r_2^2 - r_1^2) = \theta_p \left(\frac{r_1 + r_2}{2} \right) (r_2 - r_1)$

$= \theta_p r_m \times a$

d'où $P = \frac{mg}{3\theta_p r_m a} = \frac{mg}{3ab} = 2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ $P = 2 \text{ bars}$

D14 un élément de surface sera $ds = r dr d\theta$

la composante de frottement sera $dT = \int P \cdot r dr d\theta$

son moment élémentaire : $dM'_{T,Oz} = -r dT = -\int P r^2 dr d\theta$

d'où $M'_{T,Oz} = -\int_{-\theta_p/2}^{\theta_p/2} d\theta \times \int_{r_1}^{r_2} r^2 dr \cdot \int P$

$M'_{T,Oz} = -\theta_p \cdot \frac{r_2^3 - r_1^3}{3} P_f$

D15 $\frac{|M'_{T,Oz}| - |M_{T,Oz}|}{|M_{T,Oz}|} = \frac{\theta_p \frac{r_2^3 - r_1^3}{3} P_f}{\frac{1}{3} \frac{mg r_m}{a}} - 1 = \frac{\theta_p (r_2^3 - r_1^3)}{3ab r_m} - 1$

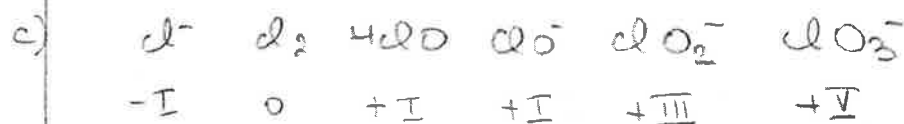
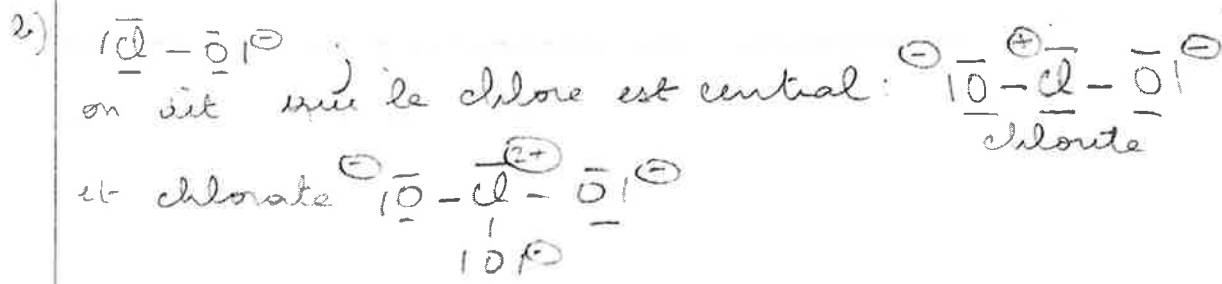
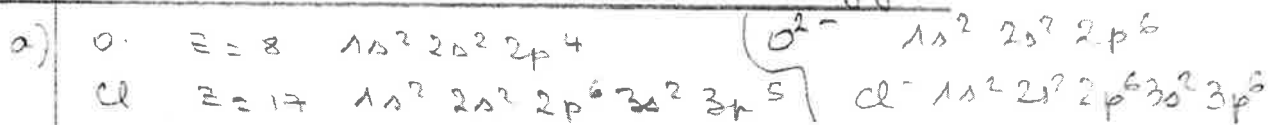
$= \frac{r_2^3 - r_1^3}{3ab r_m^2} - 1$

A.N = $\frac{57^3 - 83^3}{3 \times 14 \times 90^2} - 1 = 2 \cdot 10^{-3}$

le module en appliquant $\vec{r}, \vec{n}$ en c est correct !

II - Généralités

1. Autour des éléments chlore et oxygène



2. Décomposition de $HClO$ en phase aqueuse



$$\Delta_r S^\circ = 266,1 + 188,7 - 2 \times 236,6 = -18,4 \text{ JK}^{-1} \text{ mol}^{-1}$$

$$\Delta_r G_{T=0}^\circ = -RT \ln K_{\pm}(T_0) = -5,36 \text{ kJ mol}^{-1}$$

Le signe $\Delta_r S^\circ$ n'est pas prévisible (2 mol de gaz $\rightarrow$ 2 mol de gaz)

b) $\Delta_r H^\circ(T_0) = \Delta_r G^\circ(T_0) + T_0 \Delta_r S^\circ(T_0) = -11,4 \text{ kJ mol}^{-1}$

Principe de Hess $\Rightarrow \Delta_r H^\circ = \Delta_f H^\circ(H_2O) + \Delta_f H^\circ(Cl_2O) - 2\Delta_f H^\circ(HClO)$

$$\Rightarrow \Delta_f H^\circ(HClO) = \frac{1}{2} [\Delta_f H^\circ(H_2O) + \Delta_f H^\circ(Cl_2O) - \Delta_r H^\circ]$$

$$= \frac{1}{2} (-241,3 \cdot 10^3 + 80,3 \cdot 10^3 + 11,4 \cdot 10^3)$$

$$\Delta_f H^\circ(HClO) = -74,8 \text{ kJ mol}^{-1}$$

c) on a initialement $P_{H_2O} = P_{Cl_2O} = 0 \Rightarrow \pi = 0$

$$\Delta_r G_1 = \Delta_r G_2 + RT \ln \pi \rightarrow -\infty \quad \Delta_r G_1 < 0$$

la réaction se fait ($\rightarrow$)



À l'équilibre $\Delta_r G_1 = 0$ $K_1 = \pi = \frac{\left(\frac{xRT}{VP_0}\right)^2}{\left((1-2x)\frac{RT}{VP_0}\right)^2}$ 12

donc $K_1 = \left[\frac{x}{1-2x}\right]^2 = \left(\frac{\alpha}{1-2\alpha}\right)^2$ m' $x = m\alpha$

$$\frac{\alpha}{1-2\alpha} = \sqrt{11,1} = 3,33 \Rightarrow \alpha = 0,43$$

$P_{\text{total}} = 0,06 \text{ bar} = p_{\text{in}} \text{ inchangé}$

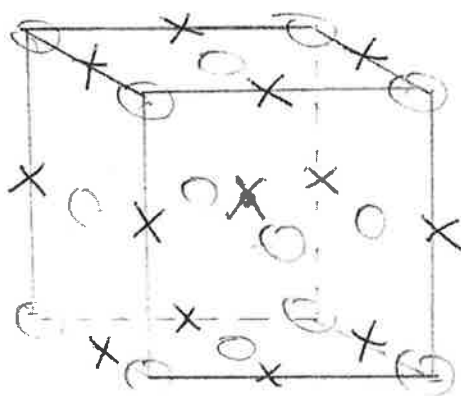
$$\Rightarrow P_{\text{H}_2\text{O}} = P_{\text{H}_2\text{O}} = \alpha P_{\text{tot}} = 2,6 \cdot 10^{-2} \text{ bar}$$

$$\text{et } P_{\text{HClO}} = (1-2\alpha) P_{\text{tot}} = 2,8 \cdot 10^{-3} \text{ bar}$$

- 2) le nombre de moles total est conservé : la pression n'a aucune influence.

3) Structure cristalllographique de NaCl.

a)



b) coordonnée = nombre de plus proches voisins. elle est de 6.

c) il y a 4 ions Na^+ et 4 ions Cl^- par maille

$$\text{donc } \rho = \frac{4(M_{\text{Na}} + M_{\text{Cl}})}{N_A \times a^3} \Rightarrow a = \left(\frac{4(M_{\text{Na}} + M_{\text{Cl}})}{\rho N_A} \right)^{1/3}$$

$$a = 5,65 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

$$r_{\text{Na}^+} + r_{\text{Cl}^-} = 286 \text{ pm} \text{ on doit avoir } a = 2(r_{\text{Na}^+} + r_{\text{Cl}^-}) = 572 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

les valeurs sont correctes

Partie II - propriétés chimiques des ClO^- dans l'eau de Javel

4) Fabrication de l'eau de Javel

- a) avec les nombres d'oxydation les plus haut
 $A = \text{Cl}^-$, $B = \text{Cl}_2$, $C = 4\text{HClO}$, $D = \text{ClO}^-$ (base conj de HClO)
- b) En pratique il y a dismutation du Cl_2 en Cl^- et ClO^-



- c) $100\text{g} = M_{\text{de solution}} \Rightarrow V = \frac{M}{\rho}$ $m_{\text{Cl}_2} = \frac{\rho}{2} \times M$
 $m_{\text{ClO}^-} \Leftrightarrow m_{\text{Cl}_2}$

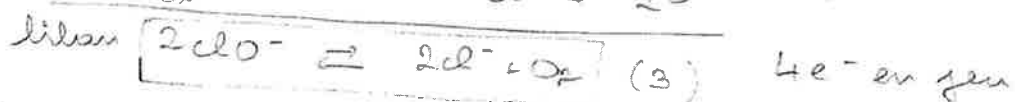
$$[\text{ClO}^-]_{\text{en}} = \frac{m_{\text{Cl}_2 \text{ produit}}}{M_{\text{Cl}_2} V} = \frac{x M}{V M_{\text{Cl}_2}} = \frac{\rho \times x}{M_{\text{Cl}_2}}$$

$$C_1 = [\text{ClO}^-] = \frac{1,03 \times 0,026 \times 1000}{2 \times 35,5} = 0,38 \text{ mol.L}^{-1} \text{ pour (1)}$$

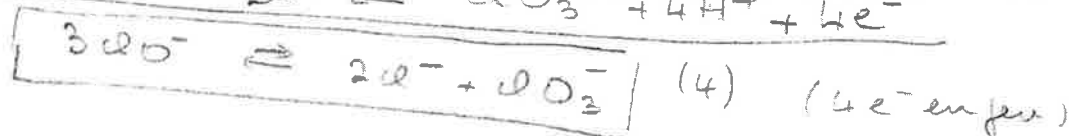
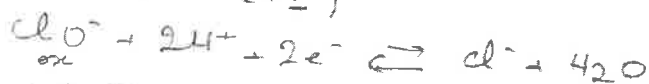
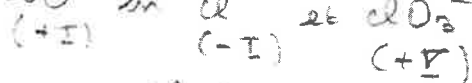
$$C_2 = 1,55 \text{ mol.L}^{-1} \text{ pour (2)}$$

- d) $\Delta_r H_2^\circ < 0$ la réaction est exothermique

- e) Au vu du diagramme ClO^- est attaqué par l'eau (réduit)



On peut aussi envisager une dismutation de ClO^- en Cl^- et ClO_3^-



$$\log K_3 = \frac{4}{0,06} (1,73 - 1,23) \Rightarrow K_3 = 10^{33,3} = 2,10^{33}$$

$$\log K_4 = \frac{4}{0,06} (1,73 - 1,29) \Rightarrow K_4 = 10^{27,3} = 2,10^{27}$$

Partie III : suivi de la décomposition du bleu brillant

5) suivi spectrophotométrique de la réaction

a) $A = \log \frac{I_0}{I_t}$

b) Il faut choisir une longueur d'onde fortement absorbée donc ici 630 nm (rouge).

Le E133 paraît bleu parce que il absorbe dans le rouge...

c) $\frac{1,83}{4,72} = 0,4 = \frac{10}{25} \Rightarrow$ • mélanger 10 mL à la pipette
• verser dans fiole jaugée de 25 mL
• compléter avec de l'eau

d) $A = \epsilon \times l \times c$ car seul E133 absorbe
 $\downarrow$ $\downarrow$
 nous unité longueur en cm concentration en E133 en mol/L
 on peut vérifier à la calculatrice qu'on a bien une droite

e) faire le blanc = mesurer l'Absorbance sans le E133 (cuve avec de l'eau) $\rightarrow$ permet de faire le "0" de l'appareil.

f) Adapté ici car les produits sont incolores

6) Etude cinétique

a) ClO^- est en excès $\rightarrow$ donc $\approx$ constant. Il y a dégénérescence de l'ordre

b) $v = k_{\text{app}} [\text{ClO}^-]^p \times [\text{E133}]^q$

7) si l'ordre est 1.

a) $-\frac{d[\text{E133}]}{dt} = k_{\text{app}} [\text{E133}]$

$\Rightarrow -\frac{dA}{dt} = k_{\text{app}} A$

$\Rightarrow \ln \frac{A_0}{A} = k_{\text{app}} t$

b) droite de pente k_{app}

8) a) cette fois $k_{\text{app}} = 0,133 \text{ min}^{-1}$

$\frac{k_{\text{app}2}}{k_{\text{app}1}} = \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^p = \left(\frac{1}{2}\right)^p$

$\frac{1}{2}$ donc $p = 1$

b) $k = \frac{k_{\text{app}2}}{c_2} = 20,8 \text{ min}^{-1}$

Considérations sur une raie spectrale

Mohamed Afekir (cpgeafek@gmail.com)
 École Royale de l'Air
 CPGÉ - Marrakech

Partie I - Préambule

Q1.

$$\mathcal{E}^* - \mathcal{E} = h\nu_0 = h \frac{\omega_0}{2\pi} \Rightarrow \omega_0 = \frac{\mathcal{E}^* - \mathcal{E}}{h}$$

Partie II - Oscillations au sein de l'atome de Thomson

II.1- Force électrostatique ressentie par l'électron

Q2.

$$+e = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho \Rightarrow \rho = \frac{3e}{4\pi a^3}$$

Q3. $\vec{E}(M) = \vec{E}(r, \theta, \varphi)$

- $\Pi(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est plan de *symétrie* de la distribution.
- $\Pi(M, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_r)$ est plan de *symétrie* de la distribution.
- la distribution est *invariante* par rotation de φ autour de $\vec{e}_z$ et par rotation de θ autour de $\vec{e}_\varphi$;
 $E(M)$ est, alors, indépendant de θ et de φ : $E(M) = (r, \theta, \varphi) = E(r)$

$$\vec{E}(M) \in \Pi(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta) \cap \Pi(M, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_r) \Rightarrow \vec{E}(M) = E(M) \vec{e}_r$$

$$\vec{E}(M) = E(r) \vec{e}_r$$

Q4. théorème de Gauss (Σ) sphère de rayon r , centrée en O):

$$\oiint_{(\Sigma)} \vec{E}(M) \cdot d\vec{\Sigma} = \frac{q_{\text{intérieure à } (\Sigma)}}{\epsilon_0}$$

$$\oiint_{(\Sigma)} \vec{E}(M) \cdot d\vec{\Sigma} = 4\pi r^2 E(r) \quad \text{et} \quad q_{\text{intérieure à } (\Sigma)} = \rho \frac{4}{3}\pi r^3$$

soit:

$$\vec{E}(M) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r}$$

Q5. la force ressentie par l'électron:

$$\vec{F} = -e\vec{E}(M) = -e \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^3} \vec{r} = -m_e \omega_0^2 \vec{OM}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^3 m_e}}$$

c'est une force de rappel élastique.

II.2- Oscillations libres dans le modèle de l'électron élastiquement lié

Q6. Relation fondamentale de la dynamique:

$$m_e \vec{a}_e = \vec{F} = -m_e \omega_0^2 \vec{OM} \Rightarrow \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \omega_0^2 \vec{r} = \vec{0}$$

Solution:

$$\vec{r}(t) = \vec{C}_1 \cos(\omega_0 t) + \vec{C}_2 \sin(\omega_0 t)$$

Conditions initiales: $\vec{r}(t=0) = \vec{0}$ et $\vec{v}(t=0) = -V_0 \vec{e}_z$

$$\vec{r}(t) = -\frac{V_0}{\omega_0} \vec{e}_z \sin(\omega_0 t)$$

Q7. Moment dipolaire: $\vec{p}(t) = -e \vec{r}$

$$\vec{p}(t) = \frac{eV_0}{\omega_0} \vec{e}_z \sin(\omega_0 t) = p_z(t) \vec{e}_z \quad \text{et} \quad p_z(t) = \frac{eV_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$

Q8. Longueur d'onde:

$$\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega_0} = 2\pi c \sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0 a^3 m_e}{e^2}}$$

Application numérique: $\lambda_0 = 0,133 \mu\text{m}$; ce rayonnement se trouve dans le domaine de l'Ultra-Violet du spectre électromagnétique.

II.3- Oscillations libres dans le modèle de l'électron élastiquement lié

$$\vec{F}_f = -\frac{m_e}{\tau} \vec{v}$$

Q9. $\vec{F}_f$ est due au choc entre électrons. τ à la dimension d'un temps, en effet:

$$[\tau] = \frac{[m_e] \times [V]}{[F]} = \frac{M \times L T^{-1}}{M L T^{-2}} = T$$

Q10. La relation fondamentale appliquée à l'électron, en présence de $\vec{F}_f$, s'écrit:

$$m_e \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -m_e \omega_0^2 \vec{r} - \frac{m_e}{\tau} \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$\vec{p}(t) = -e \vec{r}(t)$, soit:

$$\frac{d^2 \vec{p}(t)}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{d\vec{p}(t)}{dt} + \omega_0^2 \vec{p}(t) = \vec{0}$$

Solution: $\vec{p}(t) \propto e^{k t}$; l'équation caractéristique:

$$X^2 + \frac{X}{\tau} + \omega_o^2 = 0 \quad ; \quad \Delta_X = \frac{1}{\tau^2} - 4\omega_o^2 \approx -4\omega_o^2 \quad \text{avec} \quad X_{1,2} = -\frac{1}{2\tau} \pm i\omega_o$$

$$\underbrace{\frac{1}{\tau^2} - 4\omega_o^2}_{\frac{1}{\tau} \ll \omega_o}$$

Soit:

$$\vec{p}(t) = e^{-t/2\tau} \left(\vec{A} \cos(\omega_o t) + \vec{B} \sin(\omega_o t) \right)$$

Si on écrit la solution sous la forme:

$$\vec{p}(t) = \vec{p}_o e^{\alpha t} \sin(\Omega t + \varphi) \quad \text{avec} \quad |\alpha| \ll \Omega$$

$$\vec{p}(t=0) = -e\vec{T}(t=0) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{A} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \varphi = 0$$

$$\alpha = -\frac{1}{2\tau} \quad \text{et} \quad \Omega = \omega_o$$

$$\vec{p}(t=0) = -e\vec{v}(t=0) = eV_o \vec{e}_z \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = \vec{p}_o = \frac{eV_o}{\omega_o} \vec{e}_z = -e\vec{T}_o$$

Q11. L'énergie potentielle: $\vec{F} = -m_e \omega_o^2 \vec{r}$

$$\mathcal{P}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -m_e \omega_o^2 \vec{r} \cdot d\vec{r} = -\frac{d\mathcal{E}_p(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}_p(t) = \frac{1}{2} m_e \omega_o^2 r^2 + C t e$$

A $t = 0$, l'électron est en 0: $\mathcal{E}_p(t=0) = 0$ et $C t e = 0$;

$$\mathcal{E}_p(t) = \frac{1}{2} m_e \omega_o^2 r^2(t) = \frac{m_e \omega_o^2}{2e^2} p^2(t) = \frac{1}{2} m_e \omega_o^2 r_o^2 e^{-t/\tau} \sin^2(\omega_o t)$$

Q12. L'énergie cinétique:

$$\mathcal{E}_c(t) = \frac{1}{2} m_e \left(\frac{dr(t)}{dt} \right)^2 = \frac{m_e}{2e^2} \left(\frac{dp(t)}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} m_e r_o^2 e^{-t/\tau} \left[-\frac{1}{\tau} \sin(\Omega t) + \Omega \cos(\Omega t) \right]^2$$

Amortissement faible: $\Omega = \omega_o$ et $\tau \omega_o \gg 1$

$$\mathcal{E}_c(t) = \frac{1}{2} m_e \omega_o^2 r_o^2 e^{-t/\tau} \cos^2(\omega_o t)$$

Q13. L'énergie mécanique:

$$\mathcal{E}_m(t) = \mathcal{E}_c(t) + \mathcal{E}_p(t) = \frac{1}{2} m_e \omega_o^2 r_o^2 e^{-t/\tau} = \frac{1}{2} m_e \omega_o^2 r_o^2 \frac{|p_m(t)|^2}{p_o^2} \quad \text{avec} \quad p_o^2 = e^2 r_o^2$$

$$\mathcal{E}_m(t) = \frac{m_e \omega_o^2}{2e^2} |p_m(t)|^2 = \frac{m_e \omega_o^2}{2e^2} p_o^2 e^{-t/\tau} = \mathcal{E}_o e^{-t/\tau_m}$$

La durée caractéristique d'amortissement des oscillations, au terme de l'énergie mécanique est $\tau_m = \tau$.

II.4- Modélisation du mouvement de l'électron par une méthode numérique

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + 2\lambda \frac{r}{dt} + \omega_o^2 r = 0 \quad (1)$$

Q14. On transforme, tout d'abord, l'équation différentielle (1) en une équation différentielle du *premier ordre* sous forme *vectorielle* (forme *matricielle*). Pour cela on procède comme suite:

o on pose $v = \frac{dr}{dt}$, on obtient le système de deux équations différentielle à une dimension:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= v & \text{avec} & \quad v(t_o = 0) = v_o & \text{avec} & \quad x(t_o = 0) = 0 \\ \frac{dv}{dt} &= -2\lambda v - \omega_o^2 r \end{aligned}$$

o les variables sont $r(t)$ et $v(t)$ tels que:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} r \\ v \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} v \\ -2\lambda v - \omega_o^2 r \end{pmatrix}}_{f(X,t)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_o^2 & -2\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ v \end{pmatrix} \quad (2)$$

o on pose $X(t) = \begin{pmatrix} r \\ v \end{pmatrix}$; soit:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= f(X, t) \\ X(0) &= X_o = \begin{pmatrix} r_o \\ v_o \end{pmatrix} \end{aligned}$$

o on choisit l'intervalle du temps:

$$t \in [t_o = 0, T] \quad \text{de pas} \quad \Delta t = h \quad \text{tel que} \quad T = N \times h$$

soit, alors, une liste de valeurs de t : $0, h, 2h, \dots, (N-1)h$; on peut écrire:

$$t_n = t_o + n \times h \quad \text{avec} \quad t_o = 0 \quad \text{et} \quad n = 0 \dots N-1$$

o il ne reste qu' à définir les valeurs de $X(t_i)$ sous forme de tableau de valeurs.

t	$X(t)$
$t_o = 0$	$X(t_o) = X_o$
t_1	$X(t_1) = X_1$
t_2	$X(t_2) = X_2$
$\vdots$	$\vdots$

pour ce faire, on prend comme point de départ X_o :

$$\frac{dX}{dt}(t_o) = f(X_o, t_o) = f(X_o, 0)$$

o on fait l'approximation suivante: la fonction $X(t)$ est approximée par sa tangente au au voisinage de $X(t_o) = X_o$;

$$\begin{aligned} X(t) &= X(t_o) + i(t - t_o) \dot{X}(t_o) = X(t_o) + h \times f(X_o, t_o) \\ X(t_1) &= X(t_o) + i(t_1 - t_o) \dot{X}(t_o) = X(t_o) + h \times f(X_o, t_o) \\ &\vdots = \end{aligned}$$

- o en faisant la même approximation au voisinage de $X_1, X_2, \dots$; on peut écrire:

$$X(t_{n+1}) = X(t_n) + h \times f(X_n, t_n) = X_n + h \times f(X_n, t_n)$$

soit, en utilisant la relation (2);

$$\begin{pmatrix} r(t_{n+1}) \\ v(t_{n+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(t_n) \\ v(t_n) \end{pmatrix} + h \times \begin{pmatrix} v(t_n) \\ -2\lambda v(t_n) - \omega_0^2 r(t_n) \end{pmatrix}$$

ou:

$$r(t_{n+1}) = r(t_n) + h \times v(t_n) \quad (3)$$

$$v(t_{n+1}) = v(t_n) + h \times [-2\lambda v(t_n) - \omega_0^2 r(t_n)] \quad (4)$$

- o Les relations (3) et (4) sont celles qui figurent dans la ligne 17 du programme; avec l'approximation suivante faite sur (4):

$$v(t_{n+1}) \approx v(t_n) + h \times [-2\lambda v(t_n) - \omega_0^2 r(t_n)]$$

```
15 ***
16 for i in range(N):
17     (x,v,a)=(x+v*h,v+a*h,-2*lamda*v-omega*omega*x)
18     tab_1[i] = x
19     tab_2[i] = v
20 return tab_1
21 ***
```

Q15. L'instruction `euler(3,0,1)` retourne la liste de valeurs de $r(t_n) = x(t_n)$ pour $n = 0, 1, 2$ (tableau `tab1`). Sachant que $h = \frac{150}{3} = 50$;

$$\text{tab}_1 = [50, -50, -300]$$

en effet:

$$\begin{aligned} \text{Pour } N = 3 \quad ; \quad h = 50; \quad \lambda = 0.03; \quad \omega = 1.4 \\ x_0 = 0 \quad \text{et} \quad v_0 = 1 \\ x_1 = x_0 + 50 \times v_0 = \boxed{50} \quad \text{et} \quad v_1 = v_0 + (-2 \times 0.03 \times 50 - 1.4^2 \times x_0) \times h = -2 \\ x_2 = x_1 + 50 \times v_1 = 50 - 2 \times 50 = \boxed{-50} \quad \text{et} \quad v_2 = v_1 + h \times (-2 \times \lambda v_0 - 1.4^2 \times x_0) = -5 \\ x_3 = x_2 + 50 \times v_2 = -50 - 5 \times 50 = \boxed{-300} \end{aligned}$$

Q16. `while` au lieu de `for`: on change les lignes de commande 16 à 20 par:

```
15 ***
16 i=0
17 while i < N:
18     (x,v,a)=(x+v*h,v+a*h,-2*lamda*v-omega*omega*x)
19     tab_1[i] = x
20     tab_2[i] = v
21     i=i+1
22 return tab_1
23 ***
```

Q17. On détermine la pseudo-pulsation $\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}$ à partir du graphe $r(t)$. Sur l'intervalle du temps égale à 80 (*par exemple*), on compte 38 pseudo-périodes; soit:

$$\Delta t = 80 = 38 \times \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}} \Rightarrow \omega \sim 2.98$$

Q18. En faisant pareil pour la première courbe donnée par la méthode d'Euler, on trouve;

$$\Delta t = 100 = 22 \times \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}} \Rightarrow \omega \sim 1.38$$

alors que la valeur choisie dans le programme python est de 1,4 (ligne 6);

```
15 ***
16 omega = 1.4
17 ***
```

On pourra dire que la méthode d'Euler est, alors, satisfaisante.

Partie III - Rayonnement de l'atome de Thomson excité et largeur spectrale de la raie d'émission

III.1- Puissance rayonnée par un atome excité

Q19.

- approximation dipolaire: $r \gg a$;
- approximation non relativiste: $\lambda \gg a$;
- zone de rayonnement ou rayonnement à grandes distances: $r \gg \lambda$

Q20. le moment dipolaire $\vec{p} \propto \vec{e}_s$; le plan $\Pi_s(\vec{M}, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est, alors, un plan de symétrie de la distribution;

- le champ électrique $\vec{E}$ appartient à ce plan: $\vec{E} \parallel \Pi_s$ et $\vec{E} \perp \vec{e}_\varphi$
- le champ magnétique $\vec{B}$ est orthogonal à ce plan: $\vec{B} \perp \Pi_s$ et $\vec{B} \parallel \vec{e}_\varphi$.

$$\vec{E} = E_\theta \vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{B} = B_\varphi \vec{e}_\varphi$$

- au terme d'homogénéité:

$$[E] = [Vitesse] \times [B]$$

- soient:

$$\vec{E} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \sin(\theta) \left[\vec{p} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r c} \sin(\theta) \left[\vec{p} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \vec{e}_\varphi$$

Q21. Vecteur de poynting:

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} &= \left(\frac{\mu_0}{4\pi r} \sin(\theta) \left[\vec{p} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \right)^2 \frac{\vec{e}_r}{\mu_0 c} \\ &= \left(\frac{\mu_0 \omega_0^2 p_m}{4\pi r} \sin(\theta) \right)^2 \sin^2 \left(\omega_0 t - \frac{\omega_0 r}{c} \right) \frac{\vec{e}_r}{\mu_0 c} \\ <\vec{\mathcal{E}}>_t &= \frac{1}{2\mu_0 c} \left(\frac{\mu_0 \omega_0^2 p_m}{4\pi r} \sin(\theta) \right)^2 \vec{e}_r \end{aligned}$$

Q22. la puissance moyenne rayonnée:

$$\Phi_{ray} = \iint_{(S)} < \vec{E}(r=R) >_t \cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0 \omega_0^4 p_m^2}{32\pi^2 \epsilon} 2\pi \int_0^\pi \underbrace{\sin^3(\theta) d\theta}_{4/3}$$

soit:

$$\Phi_{ray} = \frac{\mu_0 \omega_0^4 p_m^2}{12\pi \epsilon} = \frac{\omega_0^4 p_m^2}{12\pi \epsilon_0 c^3} ; \quad (\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1)$$

Q23. la puissance moyenne Φ_{ray} rayonnée et énergie $\mathcal{E}_m$ de l'oscillateur:

$$\mathcal{E}_m(t) = \frac{m_e \omega_0^2}{2e^2} p_0^2 e^{-2it\tau} \quad \text{et} \quad \Phi_{ray} = \frac{\omega_0^4 p_0^2}{12\pi \epsilon_0 c^3} e^{-2it\tau}$$

on a, alors:

$$\Phi_{ray} = \frac{\omega_0^2 e^2}{6\pi \epsilon_0 c^3 m_e} \mathcal{E}_m(t) = \gamma \mathcal{E}_m(t) \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{\omega_0^2 e^2}{6\pi \epsilon_0 c^3 m_e}$$

III.2- Amortissement des oscillations

Q24. Estimation qualitative grossière

$$\mathcal{E}_{ray} = \frac{hc}{\lambda_0} \quad \text{et} \quad \Delta t \sim \frac{\mathcal{E}_{ray}}{\Phi_{ray}} = \frac{12\pi h \epsilon_0 c^4}{\lambda_0 \omega_0^2 e^2 a^2} \approx 10^{-10} \text{ s}$$

Q25.

$$\delta \mathcal{E}_m(t) = \mathcal{E}_m(t + \delta t) - \mathcal{E}_m(t) = -\Phi_{ray} \delta t$$

Q26.

$$\frac{\delta \mathcal{E}_m(t)}{\delta t} + \Phi_{ray} = \frac{\delta \mathcal{E}_m(t)}{\delta t} + \gamma \mathcal{E}_m(t) = 0$$

$$\frac{\delta \mathcal{E}_m(t)}{\delta t} + \frac{\mathcal{E}_m(t)}{\tau_e} = 0 \quad \text{avec} \quad \tau_e = \frac{1}{\gamma} \approx 0,34 \text{ ns}$$

En plus, en utilisant la question Q13.:

$$\frac{\delta \mathcal{E}_m(t)}{\delta t} = -\frac{1}{\tau} \mathcal{E}_m(t) \quad \Rightarrow \quad \tau_e = \tau = \frac{1}{\gamma}$$

Q27. durée d'un train d'onde:

$$\Delta T_{train} \sim 5\tau \approx 1,7 \times 10^{-9} \text{ s}$$

Partie IV - Mesure interférométrique de la durée d'un train d'onde

IV.1- Description de l'interféromètre de Michelson

Q28. Marche des rayons:

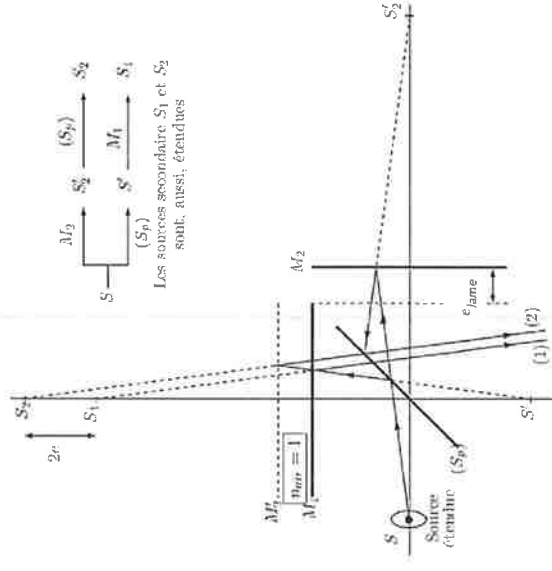


Figure 1: Modèle complet de l'interféromètre de Michelson en lame d'air

Q29. Différence de marche:

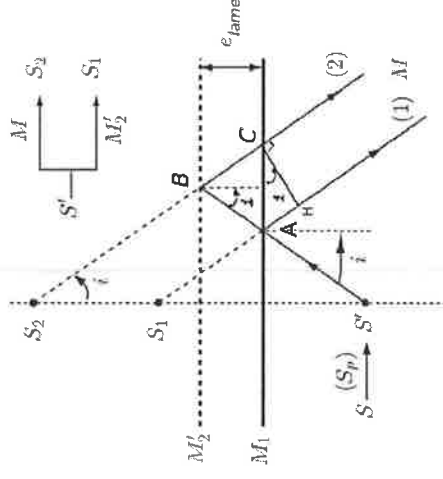


Figure 2: Modèle simplifié de l'interféromètre de Michelson en lame d'air

$$\delta = (2) - (1) = \frac{e_{lame}}{\cos(i)} - \frac{e_{lame}}{\cos(i)} = 2e_{lame} \sin^2(i) = 2e_{lame} \cos(i)$$

avec $AB = AC \sin(i)$ et $AC = 2e_{lame} \tan(i)$

L'intensité lumineuse:

$$I(M) = 2I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi v \delta}{c} \right) \right)$$

les franges d'interférence sont des anneaux concentriques localisés à l'infini.

IV.2- Largeur spectrale d'une raie d'émission

Q30.

- La raie spectrale n'est pas strictement monochromatique, La raie spectrale n'est pas strictement monochromatique, elle est composée de plusieurs bandes spectrales monochromatique de fréquences comprises entre $v_1 = v_0 - \frac{\Delta v}{2}$ et $v_2 = v_0 + \frac{\Delta v}{2}$.

Ces raies étant incohérentes; on a, donc, possibilité du brouillage.

- la variation de l'ordre d'interférence

$$\Delta p = p \left(v_0 + \frac{\Delta v}{2} \right) - p(v_0) = \frac{\delta \Delta v}{c \cdot 2}$$

Q31.

- anneaux contrastés: $\delta = m\lambda = m \frac{c}{v}$, avec m entier
- perte de contraste: $\delta = \left(m + \frac{1}{2} \right) \lambda = \left(m + \frac{1}{2} \right) \frac{c}{v}$
- à la frontière:

$$\delta_{lim} = m \frac{c}{v_0} = \left(m + \frac{1}{2} \right) \frac{c}{v_0 + \frac{\Delta v}{2}} \Rightarrow m = \frac{v_0}{\Delta v} \delta_{lim} \Rightarrow \delta_{lim} = \frac{c}{\Delta v}$$

soit;

$$2e_{lim} = \frac{c}{\Delta v} \Rightarrow e_{lim} = \frac{c}{2\Delta v}$$

Calcul de l'intensité observée en F'

Q32. L'intensité donnée par une petite bande spectrale:

$$dI(F') = \frac{I_{vm}}{\Delta v} \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi v}{c} \delta(F') \right) \right] dv = \frac{I_{vm}}{\Delta v} \left[1 + \cos(2\pi v \tau(F')) \right] dv$$

$\tau(F')$ désigne le temps de cohérence.

Ordre d'interférence:

$$p(F', v) = \frac{\delta(F')}{\lambda} = \frac{\delta(F')}{c} v = \tau(F') v$$

Q33. L'intensité donnée par tout le spectre:

$$\begin{aligned} I = \int_{\Delta v} dI(F') &= \frac{I_{vm}}{\Delta v} \int_{v_1}^{v_2} \left[1 + \cos(2\pi v \tau(F')) \right] dv = \frac{I_{vm}}{\Delta v} \left(\Delta v + \left[\frac{\sin(2\pi v \tau(F'))}{2\pi \tau(F')} \right]_{v_1}^{v_2} \right) \\ &= I_{vm} \left(1 + \frac{\sin(\pi \tau(F') \Delta v)}{\pi \tau(F') \Delta v} \cos(2\pi v_0 \tau(F')) \right) \\ &= I_{vm} (1 + \Gamma(F') \cos(2\pi v_0 \tau(F'))) \quad \text{où} \quad \Gamma(F') = \frac{\sin(\pi \tau(F') \Delta v)}{\pi \tau(F') \Delta v} \end{aligned}$$

Q34. Allure de $I(\tau(F'))$

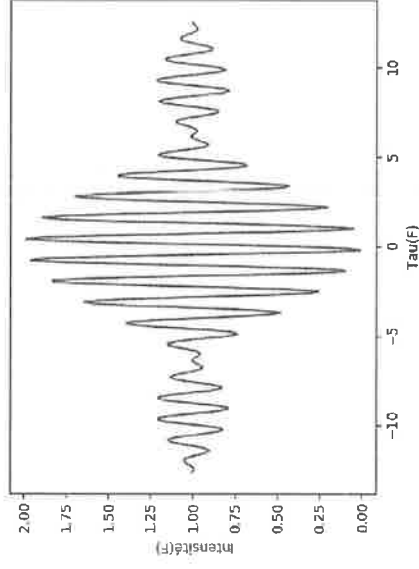


Figure 3: Intensité d'interférence

La première annulation de contraste est pour:

$$\pi \tau(F') \Delta v = \pi \quad \text{ou} \quad \tau(F') = \frac{1}{\Delta v} = \tau_0$$

Q35.

$$\Delta v_{exp} = \frac{c}{2e_{lim}} = 10^{10} \text{ Hz} \sim \frac{1}{\Delta T_{train}}$$

Partie V - Largeur Doppler d'une raie d'émission

V.1- Décalage Doppler

$$T_0 = t_{e2} - \underbrace{t_{e1}}_{=0} \quad \text{avec} \quad t_{ei} : \text{l'instant d'émission du } i^{\text{ème}} \text{ maximum}$$

Q36. Le récepteur reçoit le premier maximum à l'instant:

$$t_1 = \frac{d}{c}$$

Q37.

- Le deuxième maximum est émis à l'instant:

$$t_2 = \frac{x}{V_x} = T_o$$

- La distance $d_{O'R}$ entre l'émetteur O' et le récepteur R à cet instant:

$$d_{O'R} = d - x = d - V_x T_o$$

- La date t_2 du réception du deuxième maximum:

$$t_2 = T_o + \frac{d_{O'R}}{c} = T_o + \frac{d - V_x T_o}{c}$$

Q38.

$$T = t_2 - t_1 = T_o - \frac{V_x T_o}{c} = T_o \left(1 - \frac{V_x}{c} \right)$$

$$v_o = v \left(1 - \frac{V_x}{c} \right) \quad \text{ou} \quad v \approx v_o \left(1 + \frac{V_x}{c} \right)$$

V.2- Distribution des vitesses dans un gaz parfait unidimensionnel

$$T_{gaz} = 1000\text{K} \quad \text{et} \quad L = 10\text{cm}$$

Fonction d'onde d'un atome dans un état stationnaire

Q39. Le spectre énergétique d'un atome est discret. La masse m^* d'un atome de Hg :

$$1 = n_{Hg}^* \frac{V_A}{M_{Hg}} = \frac{m^*}{M_{Hg}} \Rightarrow m^* = \frac{M_{Hg}}{N_A} \approx 10^{-21} \text{g}$$

Q40. Équation différentielle:

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} = \mathcal{E} \varphi(x) \Rightarrow \frac{\hbar^2 \varphi(x)}{dx^2} + k^2 \varphi(x) \quad \text{avec} \quad k^2 = \frac{2m^* \mathcal{E}}{\hbar^2}$$

Conditions aux limites:

$$\varphi(x=0)=0 \quad \text{et} \quad \varphi(x=L)=0$$

Q41. Solution:

$$\varphi(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx)$$

- $\varphi(x=0)=0$ donne $A=0$

- $\varphi(x=L)=0$ donne $B \sin(kL)=0$

soit;

$$k_n L = n\pi \quad \text{avec} \quad n \geq 1 \Rightarrow k_n^2 = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} = \frac{2m^* \mathcal{E}_n}{\hbar^2} \quad \text{ou} \quad \mathcal{E}_n = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2m^* L^2}$$

$$\mathcal{E}_n = n^2 \times \mathcal{E}_1 \quad \text{où} \quad \mathcal{E}_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m^* L^2}$$

Q42.

$$\mathcal{E}_{n1} = k_B T_{gaz} \Rightarrow n_1 = \sqrt{\frac{2k_B T_{gaz} m^* L^2}{\pi^2 \hbar^2}} \approx 10^{12}$$

la variation $\frac{\mathcal{E}_{n1+1} - \mathcal{E}_{n1}}{\mathcal{E}_{n1}} \sim 10^{-12}$; l'approximation continue est, alors valable.

Q43.

$$n(\mathcal{E}) = \sqrt{\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_1}}$$

Q44. Le nombre d'états quantiques et densité:

$$dn = n(\mathcal{E} + d\mathcal{E}) - n(\mathcal{E}) = \frac{dn}{d\mathcal{E}} d\mathcal{E} = \frac{d\mathcal{E}}{2\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{E}_1}} = \rho(\mathcal{E}) d\mathcal{E}$$

$$\rho(\mathcal{E}) = \frac{1}{2\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{E}_1}}$$

Q45. Probabilité:

$$\mathcal{P}(\mathcal{E}) = Ae^{-\beta\mathcal{E}} \quad \text{où} \quad \beta = \frac{1}{k_B T_{gaz}}$$

Q46.

$$d\mathcal{P}(\mathcal{E}) = Ae^{-\beta\mathcal{E}} dn(\mathcal{E}) = Ae^{-\beta\mathcal{E}} \rho(\mathcal{E}) d\mathcal{E} = f(\mathcal{E}) d\mathcal{E}$$

$$f(\mathcal{E}) = Ae^{-\beta\mathcal{E}} \rho(\mathcal{E}) = \frac{A}{2\sqrt{\mathcal{E}_1}} \frac{e^{-\beta\mathcal{E}}}{\sqrt{\mathcal{E}}}$$

Q47. $\int_0^{+\infty} d\mathcal{P}(\mathcal{E}) = 1$ est la condition de normalisation.

$$\int_0^{+\infty} d\mathcal{P}(\mathcal{E}) = 1 = \int_0^{+\infty} \frac{A}{2\sqrt{\mathcal{E}_1}} \frac{e^{-\beta\mathcal{E}}}{\sqrt{\mathcal{E}}} d\mathcal{E} = \frac{A}{2\sqrt{\mathcal{E}_1}} \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\beta\mathcal{E}}}{\sqrt{\mathcal{E}}} d\mathcal{E}}_{\frac{\pi}{\sqrt{\beta}}} \Rightarrow A = 2\sqrt{\frac{\mathcal{E}_1}{k_B T_{gaz} \pi}}$$

soit;

$$f(\mathcal{E}) = \frac{1}{\sqrt{k_B T_{gaz} \pi}} \frac{e^{-\beta\mathcal{E}}}{\sqrt{\mathcal{E}}} = \sqrt{\frac{\beta}{\pi}} \times \frac{e^{-\beta\mathcal{E}}}{\sqrt{\mathcal{E}}}$$

Q48.

- La valeur moyenne $\langle \mathcal{E} \rangle$ de l'énergie:

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \int_0^{+\infty} \mathcal{E} d\mathcal{P}(\mathcal{E}) = \int_0^{+\infty} \mathcal{E} f(\mathcal{E}) d\mathcal{E} = \sqrt{\frac{\beta}{\pi}} \underbrace{\int_0^{+\infty} \sqrt{\mathcal{E}} e^{-\beta\mathcal{E}} d\mathcal{E}}_{\frac{\sqrt{\pi}}{2} \beta^{-3/2}} = \frac{k_B T_{gaz}}{2}$$

- Théorème d'équipartition de l'énergie:*

Pour un système en contact avec un thermostat à la température T , la valeur moyenne de toute contribution quadratique dans l'expression de l'énergie est égale à $1/2 k_B T$.

- Vitesse quadratique moyenne:

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{1}{2} m^* \langle v_x^2 \rangle = \frac{k_B T_{\text{gaz}}}{2} = \frac{1}{2} m^* u^2 \Rightarrow u = \sqrt{\frac{k_B T_{\text{gaz}}}{m^*}}$$

- Ordre de grandeur de u :

$$u \approx 10^2 \text{ m.s}^{-1}$$

V.3- Élargissement spectral par effet Doppler

Q49.

$$v_+ = v_o \left(1 + \frac{u}{c} \right) = \frac{c}{\lambda_o} \left(1 + \frac{u}{c} \right) \quad \text{et} \quad v_- = \frac{c}{\lambda_o} \left(1 - \frac{u}{c} \right)$$

$$\Delta_{\text{Dop}} = v_+ - v_- = \frac{2u}{\lambda_o} = 10^8 \text{ Hz}$$

même ordre de grandeur que Δv_{exp} mesuré en Q35..

CCP MP 2015 - Physique - problème 1

Une autre voie vers la fusion thermonucléaire;
les Z machines...

Remarque partie: inductance.

1.a). Le plan $(M, \vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est plan de symétrie $\Rightarrow \vec{B} \parallel \vec{u}_3$
invariance par rotation autour de Oz , et par translation
selon Oz : $(\vec{B} = B(\rho) \vec{u}_3)$

b) On utilise le théorème d'Ampère sur un cercle d'axe
 Oz et de rayon ρ : $\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{enc} \quad d\vec{\ell} = \rho d\phi \vec{u}_3$

$$\Rightarrow \text{si } \rho < a \text{ ou } \rho > b \quad B = 0$$

$$\text{si } a < \rho < b: 2\pi \rho B(\rho) = \mu_0 I \quad B(\rho) = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho}$$

$$1.2.a) \phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_a^b B(\rho) \cdot d\rho = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

$$b) \text{ On définit } L \text{ par } \phi = LI \text{ donc } L = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

$$c) L = \frac{\mu_0 \pi 10^{-7}}{2\pi} \times 1 \times \ln 3 = 2,2 \cdot 10^{-7} \text{ H}$$

$$d) L = 2 \times 66 \cdot 10^{-3} \times \ln 40 = 4,9 \cdot 10^{-3} \text{ H}$$

Deuxième partie: contraste des hautes pressions pulsées

1.3.a) avec I selon $\vec{u}_3$ et $\vec{B}$ selon $\vec{u}_3$, la force de Laplace est
selon $-\vec{u}_3$, le matériau est "auto-comprimé". Les forces
sont suffisantes pour diminuer la matière.

b) Une fois que le plasma est formé et se maintient
autour de l'axe Oz , on parle de Z-pinch.

c) L'énergie cinétique des particules est très grande
ce qui correspond à une température d'agitation thermique
très grande, avec des éléments très proches (plasma
dense) $\rightarrow$ favorable à la fusion.

1.a) Il faut tout d'abord maximiser de l'énergie
(capacité, ou inductance); puis il faut être
capable de la restituer très rapidement.

$$1.b) P = \frac{E}{t} = \frac{10^6}{10^{-7}} = 10^{13} \text{ Watt}$$

Dans une centrale nucléaire, un réacteur

Troisième partie: amplification en courant
Cas d'un circuit indéformable.

$$1.5.a) R i + L \frac{di}{dt} = 0$$

$$b) i(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L} t} \quad (\text{continuité de } i \text{ à } t=0)$$

$$c) i'(t) = -\frac{R}{L} I_0 e^{-\frac{R}{L} t}$$

$$d) \text{ si } x \rightarrow 0 \quad x \rightarrow +\infty$$

on aura $i \approx I_0$

e) si $i \approx I_0$ $\phi = LI_0$ est constant, donc $e_s = -L \frac{di}{dt} = 0$
Cas d'un circuit déformable.

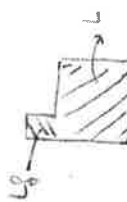
1.6.a) On aura $e = -L \frac{di}{dt}$ (loi d'Ohm); $x \rightarrow 0 \Rightarrow e \rightarrow 0$
donc $(e = -L \frac{di}{dt}) \Rightarrow \phi = L(t) \cdot i(t) = \text{cte}$

b) on veut que $i \uparrow$, L doit $\downarrow \Rightarrow \ln \frac{b}{a} \downarrow$; $\frac{b}{a}$ $\downarrow$
c'est bien une "compression" du circuit...

Quatrième partie: disponibilité de compression.

Inductance totale et flux lié

$$a) i) L_{eq} = L_f + L \quad (série)$$



$$c) \text{ on peut se ramener au flux à travers 2 rectangles}$$

$$L_f = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot h \ln \frac{a}{b} \quad L = \frac{\mu_0}{2\pi} h \ln \frac{R_0}{R_0}$$

$$L_{eq} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[h \ln \left(\frac{a}{R_0} \right) + h \ln \left(\frac{R_0}{a} \right) \right]$$

$$d) \text{ d'où le flux } \phi = L_{eq} \cdot I_0$$

Optimisation de la compression.

$$a) \text{ lorsque } R \rightarrow R_0 \quad \ln \frac{R}{R_0} \rightarrow 0 \quad L \rightarrow 0 \text{ et } L_{eq} \rightarrow \frac{\mu_0}{2\pi} h \ln \frac{a}{R_0}$$

$$\text{Donc } \frac{I_{max}}{I_0} = 1 + \frac{1}{\ln \left(\frac{R_0}{a} \right)}$$

b) plus le rapport $\frac{h}{a}$ est grand, plus $\frac{I_{max}}{I_0}$ est grand.

c) on a intérêt à prendre le $\frac{a}{b}$ le plus petit possible ... donc $a \rightarrow a_b$ et $\frac{R_0}{a_b}$ le plus grand possible.

$$d) \frac{I_{max}}{I_0} = 1 + \frac{15}{2} \times \frac{\ln \frac{5}{0,7}}{\ln \frac{2}{0,13}} = 1 + 7,5 \times \frac{2}{0,13} \approx 111$$

$$I_{max} = 111 \times 1,8 \cdot 10^6 = 1,9 \cdot 10^8 \text{ A}$$

Coût énergétique de la compression de flux

1a) $E = \frac{1}{2} L i^2$

b) $E_0 = \frac{1}{2} L q_0 I_0^2$

c) $\Delta E = E_0 \left(\frac{I_{max}}{I_0} - 1 \right) = \alpha E$ avec $\alpha = \frac{I_{max}}{I_0} - 1$

$$\alpha = \frac{L q_0}{L q_{eff}} - 1$$

Optimisation du courant injecté

10.a) $\Delta E \leq \Delta E_{disp}$

c) $\Delta E = \frac{1}{2} L q_0 I_0^2 \left(\frac{L q_0}{L q_{eff}} - 1 \right) = \Delta E_{disp}$ pour α fixé (géométrique)

$E_0 < \frac{\Delta E_{disp}}{\alpha}$ dans le meilleur des cas.

$$I_{0opt} = \left(\frac{2 \Delta E_{disp}}{L q_0 \left(\frac{L q_0}{L q_{eff}} - 1 \right)} \right)^{1/2}$$

d) avec $\Delta E = E_0 \left(\frac{I_{max}}{I_0} - 1 \right)$; à E_0 donné, on veut $\frac{I_{max}}{I_0}$ grand

on a donc intérêt à prendre une I_0 petit et $L q_0$ grand.

$$I_{0opt} = \left[\frac{2 \times 2 \cdot 10^6}{\frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}}{2 \pi} \times \left[0,15 \ln \frac{5}{0,7} + 0,02 \ln \frac{2}{0,13} \right] \times (110)} \right]^{1/2}$$

$$\approx \frac{2 \cdot 10^{13}}{[0,15 \times 2 + 0,02 \times 0,13] \times 110}^{1/2}$$

$$\approx \frac{2 \cdot 10^{13}}{3,3 \cdot 10^2} =$$

$$\approx 0,6 \cdot 10^{10} = 60 \cdot 10^9$$

$$\approx 8 \cdot 10^9 \text{ A}$$

CCP-MP-2017 - La physique au pays des patients

I. Comportement d'une assemblée de dipôles dans un champ magnétique

①

Q1 $\vec{M} = I \pi R^2 \vec{e}_z$

Q2 On peut le décomposer en spirales et sommer les $d\vec{M}$
 $\vec{B} \parallel \vec{e}_z \Rightarrow d\vec{M} \parallel \vec{e}_z \Rightarrow \vec{M} \parallel \vec{Oz}$ (axe de rotation)



Q3 moment magnétique du proton μ_p en $J \cdot T^{-1}$
 cohérent car $E_p = - \vec{\mu} \cdot \vec{B}$

Q4 $E_p = - \mu B \cos \theta$ extrême pour $\cos \theta = \pm 1$
 $\vec{M} = \vec{M} \wedge \vec{B}_0 \Rightarrow \|\vec{M}\| = \mu B_0 |\sin \theta|$ nul pour $\sin \theta = 0$
 soit $\theta = 0$ soit $\theta = \pi$
 $E_p = -\mu B$ (stable) $E_p = +\mu B$ (instable)

Q5 $\Delta E_p = 2\mu B_0 \approx 2 \times 1.4 \cdot 10^{-26} \times 1 = 2.8 \cdot 10^{-26} J$ ou $1.75 \cdot 10^{-7} eV$

Q6 $E_c = \frac{3}{2} k_B T = \frac{3}{2} \times 1.38 \cdot 10^{-23} \times 310 = 6.4 \cdot 10^{-21} J$ ou $4.0 \cdot 10^2 eV$
 ΔE_p est donc très faible

Q7 - Energie mise en jeu très faible: peu de risque de rupture de liaison

Q8 $\rho_p(E) = A e^{-E/k_B T}$ (A = constante de normalisation)

Q9 $\frac{N_+}{N_-} = e^{\frac{-2\mu B_0}{k_B T}} \approx 1 - \frac{2\mu B_0}{k_B T} \approx 1 - 6.7 \cdot 10^{-6}$ $N_+ < N_-$

Q10 il y a un peu plus de dipôles dans le même sens que $\vec{B}$
 (donc de plus petite énergie) ($E_- = -\mu B$)

Q11 $\eta = \frac{N_- - N_+}{N_- + N_+} = \frac{1 - \frac{N_+}{N_-}}{1 + \frac{N_+}{N_-}} = \frac{\mu B_0}{k_B T}$ (à l'ordre 1)

Q12 $\eta = 9.1 \cdot 10^{-6} \ll 1$... le désordre règne.

②

Q13 - l'électron fait un tour en une durée $\frac{2\pi R_B}{v}$
 l'intensité équivalente est donc $\frac{-e v}{2\pi R_B}$

soit $\vec{\mu}_e = \frac{-e v}{2\pi R_B} \times \pi R_B^2 \vec{e}_z = -\frac{e v R_B}{2} \vec{e}_z$

Q14 $\vec{G}_0 = m_e \vec{\omega} \wedge \vec{r} = m_e R_B \omega \vec{e}_z$ $G_e = m_e R_B \omega$

Q15 $\gamma_e = \frac{\mu_e}{\hbar} = \frac{-e}{2m_e} = -8,8 \cdot 10^{10} \text{ C.kg}^{-1}$

Q16 $\mu_p = \gamma_p \cdot \hbar$ avec $\gamma_p = \frac{\hbar}{2} \Rightarrow \mu_p = \frac{1,05 \cdot 10^{-34}}{2} \times 2,64 \cdot 10^8 = 1,4 \cdot 10^{-26} \text{ J.T}^{-1}$
c est bien conforme.

Q17 le photon doit avoir la bonne énergie: $h\nu = 2\mu_p B_0$
 $= 2 \frac{\hbar}{2} \gamma_p B_0$
 $\Rightarrow \nu = \frac{\gamma_p B_0}{2\pi}$

Q18 $\underline{A.N}$ $\nu = 4,25 \cdot 10^7 \text{ Hz}$ $\lambda = \frac{c}{\nu} = 4,7 \text{ m}$ (ondes radio)

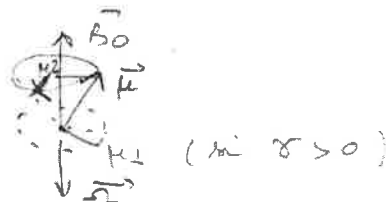
Q19 T.M.C $\frac{d\vec{S}_0}{dt} = \vec{M} \wedge \vec{B}$ avec $\vec{\mu} = \gamma \vec{S}$
on obtient $\frac{d\vec{\mu}}{dt} = \gamma \vec{\mu} \wedge \vec{B}_0 = \vec{\omega}_0 \wedge \vec{\mu}$ avec $\vec{\omega}_0 = -\gamma \vec{B}_0$

Q20 $\frac{d}{dt}(\vec{\mu} \cdot \vec{\mu}) = 2\vec{\mu} \cdot \frac{d\vec{\mu}}{dt} = 0$ donc $\|\mu\|$ se conserve

$\frac{d}{dt}(\vec{\mu} \cdot \vec{e}_z) = \frac{d\vec{\mu}}{dt} \cdot \vec{e}_z = 0$ donc $\vec{\mu} \cdot \vec{e}_z$ se conserve

Q21 pour $\vec{\mu}_\perp$: $\frac{d\vec{\mu}_\perp}{dt} = \vec{\omega}_0 \wedge \vec{\mu}_\perp$: on reconnaît une rotation de vecteur angulaire $\vec{\omega}_0$

Q22 $\vec{\mu}$ précesse autour de $\vec{B}_0$



Q23 $\vec{M}_0$ est $\parallel \vec{e}_z$ et dans le même sens.

Q24 $\vec{M}_0 = \sum_i \vec{\mu}_i = N_+ \times (-\mu_p \vec{e}_z) + N_- (\mu_p \vec{e}_z)$

et $N = N_+ + N_-$

donc $\vec{M}_0 = \mu_p \eta N \vec{e}_z$

Q25 $M_0 = \frac{\mu_p^2 B_0 N}{k_B T} = \frac{\gamma_p^2 \hbar^2 B_0 N}{4 k_B T}$

Q26 $N = 2 \times \text{conc vol des molécules d'eau} = 2 \times \frac{\rho N_A}{m} = 6,2 \cdot 10^{22} \text{ m}^{-3}$

Q27 sur l'axe $B_{\text{acc}} = \frac{\mu_0 M}{2\pi n^2} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi \times 10^6} \times M_0 = 2 \cdot 10^{-2} \text{ T} = 6,1 \cdot 10^{10} \text{ T.m}^{-3}$

Q28 Pour que $\vec{M}_0$ se soit parallélisé à $\vec{B}_0$, il faut un champ complémentaire et $\vec{M}_0$ sera aligné sur $\vec{B}_{\text{acc}}$

Q29 si on met le "couple de freinage" avec des temps de relaxation T_1 et T_2 différents.

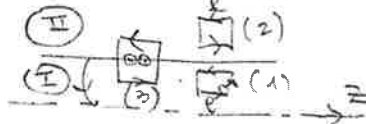
II les champs magnétiques

1. Création d'un champ $\vec{B}_1$ tournant

Q31 $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, $\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
en quasi stationnaire, dans le vide $\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} = \vec{0}$

Q32 $\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$

Q33 symétries : plan $M \vec{u}_z, \vec{u}_0$ = plan de symétrie $\Rightarrow \vec{B} \parallel \vec{u}_z$
invariances : translation $\parallel Oz$, rotation $Oz \Rightarrow \vec{B} = B(r) \vec{u}_z$



Ampère sur (1) ou (2) $\Rightarrow$
 $\oint B(r_1) - B(r_2) dl = 0$
 $\Rightarrow$ uniforme dans (1), et dans (2)

Q34 sur le circuit (3) : $B_{\perp} l - B_{\perp} l = \mu_0 n \cdot I l$
 $\Rightarrow B_{\perp} = \mu_0 n I$ $\vec{B} = \mu_0 n I \vec{u}_z$

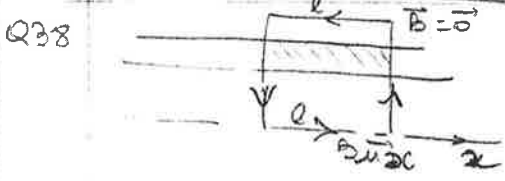
Q35 Dans la zone commune :

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \mu_0 n I_0 (\cos(\Omega t) \vec{u}_x + \sin(\Omega t + \frac{\pi}{2}) \vec{u}_y) \\ &= \mu_0 n I (\cos(\Omega t) \vec{u}_x - \sin(\Omega t) \vec{u}_y) \\ \vec{B}_1 &= \mu_0 n I \vec{u}' \text{ avec } \vec{u}' = \cos(\Omega t) \vec{u}_x - \sin(\Omega t) \vec{u}_y \\ \text{vitesse de rotation de } \vec{u}' : \vec{\omega} &= -\Omega \vec{u}_z \end{aligned}$$

Q36 $\vec{u}' = \cos(\Omega t) \vec{u}_x - \sin(\Omega t) \vec{u}_y$
 $\vec{u}' = \cos(\Omega t) \vec{u}_x - \sin(\Omega t) \vec{u}_y \Rightarrow \vec{B}_1 + \vec{B}_{1'} = 2 B_1 \cos \Omega t \vec{e}_x$
 $\vec{B}_{1'}$ est bien la somme de 2 champs B_1 tournant dans des sens opposés

2. Création d'un champ permanent interne $\vec{B}$

Q37 Φ_0 est le flux de $\vec{B}$ à travers une section a^2
 $\Rightarrow \vec{B} = \frac{\Phi_0}{a^2} \vec{u}_0$



théorème d'Ampère
 $(B - 0) \times l = \mu_0 j (R_2 - R_1) \times l$
 $B = \mu_0 \frac{I (R_2 - R_1)}{a^2}$

Q39 $I = \frac{B_0 a^2}{\mu_0 (R_2 - R_1)} = \frac{1 \times 10^6}{4\pi \cdot 10^{-7} \times 0.05} = 16 \text{ A}$

Q40

$$\text{rot } \vec{J} = -\Lambda \vec{B} \quad \text{avec } B = \mu_0 n I$$

$$\downarrow$$

$$A \text{ m}^{-2}$$

donc Λ en $\frac{A \text{ m}^{-2}}{H \text{ m}^{-2} A}$

$$\Rightarrow \Lambda T = 1 H \text{ m}^{-1} \times \text{m}^{-1} \times A$$

$$\boxed{\Lambda \text{ est en } H^{-1} \text{ m}^{-1}}$$

4

Q41

$$\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{J} \Rightarrow \text{rot}(\text{rot} \vec{B}) = \mu_0 \text{rot}(\vec{J})$$

$$\Rightarrow \text{grad}(\text{div} \vec{B}) - \Delta \vec{B} = \mu_0 \times (-\Lambda \vec{B})$$

d'où l'équation:

$$\boxed{\Delta \vec{B} = \mu_0 \Lambda \vec{B}}$$

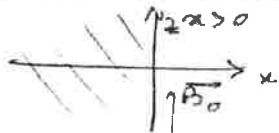
Q42

$$\Delta \vec{B} \text{ en } T \cdot \text{m}^{-2} \Rightarrow \mu_0 \Lambda \text{ est en } \text{m}^{-2} [H^{-1} \cdot \text{m}^{-1} \times H \text{ m}^{-1}]$$

on note donc $\delta = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \Lambda}}$ et

$$\boxed{\Delta \vec{B} = \frac{1}{\delta^2} \vec{B}}$$

Q43



invariance par translation en y ou z
 $\Rightarrow \vec{B} = \vec{B}(x)$

Q44

solutions en $\vec{B} = \vec{\alpha} e^{x/\delta} + \vec{\beta} e^{-x/\delta}$

• pour $x \rightarrow -\infty$ $e^{-x/\delta}$ diverge $\Rightarrow$ on ne garde que la 1^{ère} solution.

• on doit assurer la continuité de $\vec{B}$ en $x=0$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = \vec{B}_0 e^{x/\delta}} = B_0 e^{x/\delta} \vec{u}_z$$

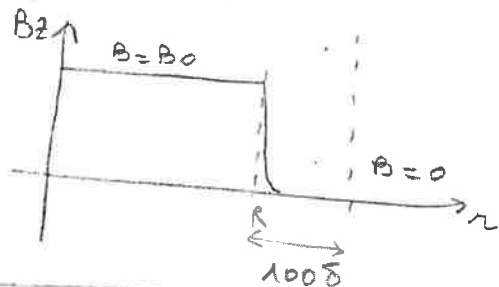
Q45

$$\vec{J} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot}(\vec{B}) = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B_z}{\partial x} \vec{u}_y = -\frac{1}{\mu_0 \delta} B_0 e^{x/\delta} \vec{u}_y$$

Q46

δ est très faible. le champ magnétique ne "pénètre" pas dans le semi-conducteur

Q47



III la RMN pulsée

1- Etude dans le référentiel tournant lié à $\vec{B}_1$

Q48 Dans le référentiel du laboratoire ; et en reprenant les résultats de la partie A.

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \gamma_p \vec{M} \wedge (\vec{B}_1 + \vec{B}_0) =$$

Q49 avec $\vec{U} = \vec{B}_1$: $\left. \frac{d\vec{B}_1}{dt} \right|_{R_0} = \vec{0} + \vec{\omega}_{R_1/R_0} \wedge \vec{B}_1$

$$\begin{pmatrix} -\omega B_1 \sin \omega t \\ +\omega B_1 \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{R_1/R_0} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B_1 \cos \omega t \\ +B_1 \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\omega = -\Omega)$$

on voit donc que $\boxed{\vec{\omega}_{R_1/R_0} = +\omega \vec{e}_z} = -\Omega \vec{e}_z$

Q50 dans le référentiel R_1

$$\left. \frac{d\vec{M}}{dt} \right|_{R_1} = \left. \frac{d\vec{M}}{dt} \right|_{R_0} + \vec{\omega}_{R_1/R_0} \wedge \vec{M}$$

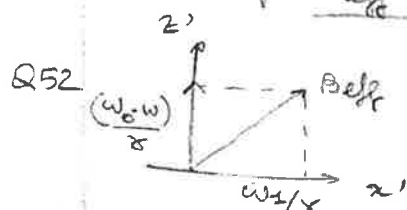
$$= \gamma_p \vec{M} \wedge (\vec{B}_1 + \vec{B}_0) + \vec{\omega}_{R_1/R_0} \wedge \vec{M}$$

$$\left. \frac{d\vec{M}}{dt} \right|_{R_1} = \gamma_p \vec{M} \wedge \left(\vec{B}_1 + \vec{B}_0 - \frac{\vec{\omega}_{R_1/R_0}}{\gamma_p} \right)$$

Q51 $= \gamma_p \vec{M} \wedge \vec{B}_{eff}$ avec $\boxed{\vec{B}_{eff} = \left(\vec{B}_1 + \vec{B}_0 - \frac{\vec{\omega}_{R_1/R_0}}{\gamma_p} \right)}$

$\downarrow$ selon x'
 $\downarrow$ selon z

le champ $\vec{B}_{eff}$ est statique dans R_1



Q53 l'équation est celle d'un mot de précession de $\vec{M}$ autour de $\vec{B}_{eff}$

Q54 A l'équilibre thermique $\vec{M} \parallel \vec{B}_0$. Lorsqu'on applique $\vec{B}_1$, $\vec{M}$ tourne autour de $\vec{B}_{eff} \approx \vec{B}_0$, la direction de $\vec{M}$ est très peu perturbée.

Q55 si $(\omega - \omega_0)$ diminue devant ω , $\vec{B}_{eff}$ se rapproche de l'axe Ox .

Q57 A la "résonance" $\vec{B}_{eff}$ sera égal à $\vec{B}_1$: $\vec{M}$ peut s'inverser.

Q56 résonance car $\omega = \omega_0$ correspond à une fréquence propre du système où le comportement change beaucoup.

Q59 Le terme qui correspond à $-\omega$ donne un $\vec{B}_{eff} = (\omega + \omega_0) \vec{e}_z + \omega_1 \vec{u}_x$
 Comme B_1 est faible: $\omega_1 \ll (\omega + \omega_0)$ et so $\vec{B}_{eff}$ reste 2 selon $\vec{u}_z$
 et n'a donc pas d'effet sur $\vec{M}$.
 (il faut arriver à "annuler" $\vec{B}_0$ pour que l'effet de $\vec{B}_1$ se fasse sentir)

Q60 il faut couvrir les "fluctuations" de B_0 donc de ω_0
 et donc ω doit varier autour de $\omega_0 \Rightarrow$ non monochromatique.

Q61  $\vec{M}$ est toujours $\perp$ à $\vec{B}_1$, le champ dont parle le livre est donc $\vec{B}_0$
 $\theta_1 = \frac{1}{2} \times \frac{2\pi}{\omega_1}$ $t_{p1} = \theta_1 + \frac{1}{2} \times \frac{2\pi}{\omega_1}$

Q62 retournement de $\vec{M}$ pour $\theta_2 = 1/2$ période [à 1 période près]
 $t_{p2} = t_2 = \frac{1}{2} \times \frac{2\pi}{\omega_1}$ $\theta_2 = \frac{1}{2} \times \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{\pi}{\omega_1} = 2\theta_1$

Q63 Après la pulse, $\vec{B}_{eff} // \vec{u}_z \Rightarrow$ précession autour de Oz

Q64 Si on ne prend pas en compte la précession, $\vec{M}$ continuerait à tourner (+). la projection sur xOy serait constante

Q65 Avec une pulse à 90° , les conditions "initiales" après θ_1 sont $M_z = 0$ $M_y = M_0$
 en suivant $M_{xy}(t)$ on remonte à T_2 par la pente à l'origine de la courbe

2. Echo de spin

Q66 $M_y(\theta_1) = M_0$ $M_x(\theta_1) = M_z(\theta_1) = 0$

Q67 $M_z = M_0 (1 - e^{-\frac{T-\theta_1}{T_1}})$ augmente
 $M_z = M_0 e^{-\frac{T-\theta_1}{T_2}}$ $\cos(\omega_0(t-\theta_1))$ à cause de (+) ...

Q68 pour $t > 2\theta_1$, on abandonne le système avec $\vec{M} - Oz$ - M_z passe de $-M_0$ à M_0 avec la constante T_1

3. Bobines de détection

Q70 le champ magnétique est variable (Neumann)

Q71 (2) (flux à travers $\vec{S} // \vec{u}_y$), (6) S en R^2

(4) situations de B .

(9) cf Q67

(7) M_0 prop à B_0 .

I - Modèle historique de Bohr

$$Q1 \quad \vec{F} = \frac{-q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{OM}}{OM^3} \quad q=e$$

$$Q2 \quad \vec{F} = m\vec{a} = -m \frac{v^2}{r} \vec{u}_r \Rightarrow m \frac{v^2}{r} = \frac{+e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \Rightarrow v = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m r} \right)^{1/2}$$

$$Q3 \quad E_p = \frac{-q^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r} \times \frac{1}{2} \quad \text{on a bien } E_c = -\frac{E_p}{2}$$

$$Q4 \quad L = m \cdot r \cdot v = \left(\frac{e^2 m r}{4\pi\epsilon_0} \right)^{1/2}$$

$$Q5 \quad L = n\hbar \Rightarrow \frac{e^2 m r}{4\pi\epsilon_0} = n^2 \hbar^2 \Rightarrow r = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m e^2} n^2 = a_0 n^2$$

avec $a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m e^2}$

$$Q6 \quad E_n = E_c + E_p = \frac{E_p}{2} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a_0} \frac{1}{n^2} \quad R_y = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a_0}$$

$$Q7 \quad a_0 \text{ représente le rayon de l'orbite } n=1$$

$$a_0 = 5,292 \cdot 10^{-11} \text{ m} \quad \text{et} \quad R_y = 2,179 \cdot 10^{-18} \text{ J} = 13,61 \text{ eV}$$

$$Q8 \quad E_{c_n} = -E_{p_n} \Rightarrow \frac{1}{2} m v_n^2 = \frac{R_y}{n^2} \quad v_n = \sqrt{\frac{2 R_y}{m}} \frac{1}{n^2}$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2 R_y}{m}} = 2,198 \cdot 10^6 \text{ m.s}^{-1} \quad v \ll c : \text{non relativiste.}$$

II - Révision simplifiée de l'éq de Schrödinger

$$Q9 \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{iE}{\hbar} \Psi \quad \text{donc} \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta K(\vec{r}) + E_p(\vec{r}) K(\vec{r}) = E K(\vec{r}) \quad (1)$$

$$Q10 \quad E_p = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 R}$$

$$Q11 \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta K = (E - E_p) K(R) = -\frac{E_p}{2} K(R) = + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^2} \times K(\vec{r})$$

$$\text{avec de plus } \Delta K(\theta) = \frac{1}{R^2} \frac{d^2 K}{d\theta^2}$$

On obtient donc

$$-\frac{\hbar^2}{2m R^2} \frac{d^2 K}{d\theta^2} = + \frac{e^2}{2 \times 4\pi\epsilon_0 R} K(\theta) = -E K(\theta) \quad (E < 0)$$

$$\text{En introduisant } \eta = \left(\frac{m R e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2} \right)^{1/2} : \quad \frac{d^2 K}{d\theta^2} = -\eta^2 K(\theta)$$

$$\text{les solutions sont en } K(\theta) = \alpha e^{i\eta\theta} + \beta e^{-i\eta\theta}$$

$$Q12 \quad \text{La fonction } K(\theta) \text{ doit être } 2\pi \text{ périodique, donc } \eta \text{ doit être un entier. } \eta^2 = n^2$$

$$\Rightarrow R = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m e^2} \times n^2 \quad \text{cohérent avec Q5.}$$

Partie III - Spectre de raies de l'atome H

2

Q13 $h\nu = E_{\text{sup}} - E_{\text{inf}} = E_n - E_{n'}$
 ici, $h\nu = R_H \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right)$ et $\nu = \frac{c}{\lambda}$
 donc $\frac{1}{\lambda_{\text{nm}}} = \frac{R_H}{hc} \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right)$

Q14

nom raie	H _α	H _β	H _γ	H _δ
λ_{Ritz}	656,1 nm	486,00	433,93	410,06
λ_{exp}	656,3 ± 0,3	486,1 ± 0,2	434,0 ± 0,2	410,2 ± 0,2

les valeurs de Ritz sont bien dans la fourchette.

Partie IV - Correction de Sommerfeld

Q15 $R_H = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \frac{1}{a_B} = \frac{\alpha \hbar c}{2 a_B} \Rightarrow \alpha_1^2 = \frac{2 R_H}{m} = \frac{\alpha \hbar c}{m a_B} = \frac{\alpha \hbar c e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2} \times \frac{c}{c}$

puis $\alpha_1^2 = \alpha^2 c^2 \Rightarrow \alpha = \frac{\alpha_1}{c}$; α est sans unité

Q16 $\alpha = 7,297 \cdot 10^{-3}$ $\alpha = \frac{1}{137,0}$

Q17 le terme en α^2 est $\ll 1$: Sommerfeld est "compatible" avec Bohr.

pour $n=2$: $l=0$ ou $1 \Rightarrow$ il y aura 2 sous-niveaux

pour $n=3$ $l=0, 1, 2 \Rightarrow$ 3 sous-niveaux
 conforme à la figure 2.

Q18 $l \uparrow \Rightarrow \left(1 + \frac{\alpha^2}{n^2} \left(\frac{n}{l+1} - \frac{3}{4} \right) \right) \downarrow$ donc $E \uparrow$: l'énergie la plus basse est pour le l le plus petit

$\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ l=0 \end{array}$

$\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} l=1 \\ l=0 \end{array}$

avec $n=2$ $\Delta E_l = - \frac{R_H \alpha^2}{n^4} \left(\frac{n}{2} - \frac{n}{1} \right) = \frac{R_H \alpha^2}{2 n^3}$

$\Delta E_l = \frac{R_H \cdot \alpha^2}{16}$

A.N $\Delta E_l = 4,528 \cdot 10^{-5} \text{ eV}$

(faible devant 13,6...)

Q19 $hc\sigma_a = E_{3,1} - E_{2,0}$ $hc\sigma_b = E_{3,1} - E_{2,1}$

$$hc(\sigma_a - \sigma_b) = E_{2,1} - E_{2,0} = \Delta E_f \Rightarrow \sigma_a - \sigma_b = \frac{\Delta E_f}{hc}$$

A.N $\sigma_a - \sigma_b = 0,3652 \text{ cm}^{-1}$

Q20 $\sigma_m = 15237,4 \text{ cm}^{-1} \Rightarrow \lambda = 6,563 \cdot 10^{-7} \text{ m}$: rouge

$$\frac{\Delta\sigma_m}{\sigma} = 2,363 \cdot 10^{-5}$$

Pour le doublet du sodium: $\lambda = \frac{1}{\sigma} \Rightarrow \frac{d\lambda}{\lambda} = -\frac{d\sigma}{\sigma}$

$$\Rightarrow \frac{\Delta\sigma}{\sigma} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 1,018 \cdot 10^{-3} \gg 2,3 \cdot 10^{-5}$$

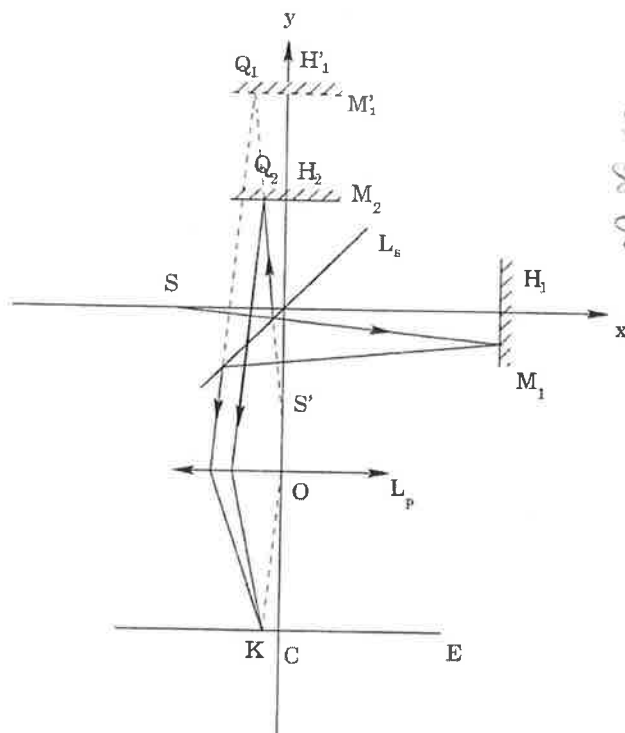
C'est bien une "structure fine" !

Partie V - Résolution interférométrique d'un doublet

Q21 On trouve une séparatrice, qui est semi réfléchissante sur une de ses faces; et la compensatrice qui permet "d'égaliser" les chemins optiques 1 et 2 au niveau de L_d .

Q22

Q23



$$\begin{aligned} 3H_1 &= S'_1 H_1 \\ SO &= S_0 O \\ SOH_2 &= S'_2 H_2 \\ SOH'_1 &= S'_1 H'_1 \end{aligned}$$

On construit les rayons en utilisant les points "symétriques" et en "dépliant les rayons".

Q23: les rayons issus de M_1 et M_2 sont parallèles entre eux on trace la parallèle passant par le centre optique de L_p pour obtenir le pt d'intersection I .

Q24. on obtient des franges d'égale inclinaison, qui sont des anneaux

Q25 au centre $\delta = 2e$

Q26: $\delta = \mu_1 \lambda_1 = \mu_2 \lambda_2$ donc $\mu_1 = \sigma_1 \delta$ $\mu_2 = \sigma_2 \delta$

Q27. Il y a brouillage lorsque $\mu_1 - \mu_2$ est $1/2$ entier. les brouillages sont appelés des "anticoincidence"

$$\mu_1 - \mu_2 = \delta(\sigma_1 - \sigma_2) = k + \frac{1}{2} \quad k \text{ entier}$$

$$\delta_1(\sigma_1 - \sigma_2) = k + \frac{1}{2}$$

$$\delta_2(\sigma_1 - \sigma_2) = (k+1) + \frac{1}{2}$$

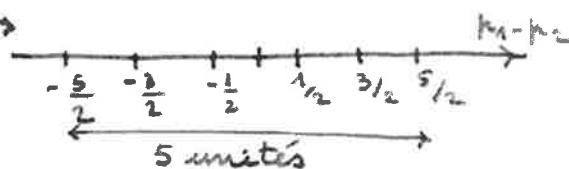
$$\left. \begin{array}{l} \delta_1(\sigma_1 - \sigma_2) = k + \frac{1}{2} \\ \delta_2(\sigma_1 - \sigma_2) = (k+1) + \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow D\delta = \delta_2 - \delta_1 = \frac{1}{\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{1}{\Delta\sigma}$$

A.N: $D\epsilon = \frac{D\delta}{2} = \frac{1}{2 \cdot \Delta\sigma} = 1,33 \text{ cm}$

Q28 L'équivalent de $D\epsilon = \frac{1}{5} \times \frac{1}{160} \times \frac{1}{160} L_0 = \frac{1}{2 \Delta\sigma}$

d'où $L_0 = \frac{5 \cdot 160}{2} \times \frac{1}{\Delta\sigma} = \frac{400}{\Delta\sigma}$

$L_0 = 11,1 \text{ m.}$



Q29 La diagonale du rectangle est $\sqrt{1,1^2 + 1,1^2} = 1,55 \text{ m}$
on peut compter environ 7,5 diagonales: 11,66 m.
(ce qui est correct vu les approximations...)

Partie VI - Calcul par interaction spin-orbite

Q30 $\vec{L} = m r \times \vec{u} \quad \vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma} \Rightarrow \vec{L} \cdot \vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{L} \cdot \vec{\sigma}$

Q31 le proton en mouvement équivaut à une spire circulaire de rayon r parcourue par un courant

$$I = \frac{e}{T} = \frac{e \omega}{2\pi} = \frac{e v}{2\pi r}$$

d'où $\vec{B} = \mu_0 e v \cdot \frac{1}{2\pi r} \vec{u}_r \quad \mu_0 e v \cdot \frac{1}{2\pi r} \vec{u}_r \quad \text{o. l.} \rightarrow$

Q32

$$E_{so} = -g_e \gamma_e \vec{S} \cdot \frac{e \mu_0}{4\pi r^3 m} \vec{L} = \frac{e}{2m} g_e \frac{e \mu_0}{4\pi r^3 m} \vec{L} \cdot \vec{S}$$

$$\text{on donne } \left(\frac{e}{2m}\right)^2 \frac{\mu_0}{2\hbar} = g_B^2 \alpha^2 R_y$$

$$\text{on obtient } E_{so} = g_e \cdot \frac{g_B^2 \alpha^2 R_y}{n^3} \frac{\vec{L} \cdot \vec{S}}{\hbar^2} \quad \text{QED}$$

Q33 - Expérience de Stern et Gerlach - On fait passer un faisceau d'atomes d'Ag dans un champ magnétique le faisceau se coupe en deux



Q34 $\left(\frac{a_0}{n}\right)^3$ est le même que dans Q32 ...

$$A = \iiint |\psi_{n,l}(\vec{r})|^2 \left(\frac{a_0}{n^3}\right)^3 d\vec{r} = \text{valeur moyenne de } \left(\frac{a_0}{n}\right)^3$$

$$|\psi_{nl}|^2 = \frac{1}{4^3 a_0^3} \frac{1}{\pi} \left(\frac{r}{a_0}\right)^2 \sin^2 \theta e^{-\frac{r}{a_0}}$$

$$A = \frac{1}{4^3} \frac{1}{a_0^3} \frac{1}{\pi} \times 2\pi \times \underbrace{\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta}_{4/3} \times \int_0^\infty \frac{a_0}{n} \times r^2 dr e^{-\frac{r}{a_0}}$$

$$= \frac{1}{8} \frac{1}{3} \int_0^\infty X e^{-X} dX$$

$$(X = \frac{r}{a_0} \quad dr = a_0 dX)$$

$$A = \frac{1}{24}$$

(intégration par parties.)

$$Q35 \quad n=2 \quad l=0 \quad j = \frac{1}{2} \rightarrow E_{so} = 0$$

$$l=1 \quad j = \frac{1}{2} \rightarrow E_{so} = g_e \alpha^2 R_y \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{24} [-2] = -\frac{1}{24} g_e \alpha^2 R_y$$

$$j = \frac{3}{2} \rightarrow E_{so} = g_e \alpha^2 R_y \times \frac{1}{24} \times \frac{1}{2} \left[\frac{15}{4} - 2 - \frac{3}{4} \right] = g_e \alpha^2 R_y \times \frac{1}{48}$$

$$\Delta E_{so, n=2} = g_e \alpha^2 R_y \left[\frac{1}{48} + \frac{1}{24} \right] = \frac{1}{16} g_e \alpha^2 R_y$$

$$\text{Avec Thomas } \Delta E_{so, n=2} = \frac{1}{32} g_e \alpha^2 R_y \quad \text{avec } g_e = 2$$

$$\text{en Q18: } \frac{\alpha^2 R_y}{16} \quad \therefore \text{ c'est cohérent!}$$

Partie VII : structure hyperfine

6

Q36 $\lambda = 21,1 \text{ cm} \Rightarrow \nu = \frac{c}{\lambda} = 1422 \text{ MHz}$ c'est cohérent

$$\Delta E_{\text{hyperf}} = h\nu = 5,88 \cdot 10^{-6} \text{ eV}$$

Q37 M est en $\text{A} \cdot \text{m}^2$

$$\mu_B = 9,2848 \cdot 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2 \quad \mu_N = 1,4107 \cdot 10^{-26} \text{ A} \cdot \text{m}^2 \quad (\text{doc 2})$$

Q38 On peut reprendre les idées précédentes d'éc.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot \vec{I}_N}{2\pi a_B^3} \quad (\text{doc 1})$$

$$\text{et } E = - \vec{\mu}_B \cdot \vec{B}$$

selon que $\vec{\mu}_B$ et $\vec{\mu}_N$ sont colinéaires de même sens ou non...

$$\Rightarrow \Delta E_{\text{hf}} = \frac{2 \mu_0 \mu_N \mu_B}{4\pi a_B^3} = \frac{\mu_0 \mu_N \mu_B}{2\pi a_B^3}$$

Q39 $\Delta E_{\text{hf}} = \frac{16}{3} \times \frac{\mu_0 \mu_N \mu_B}{2\pi a_B^3} = 5,88 \cdot 10^{-6} \text{ eV}$ ouf!

Q40 les niveaux hyperfins du Cs servent à définir la seconde,

Centrale MP 2013 - 41 : Vie et mort d'un photon

I - Etude des atomes de Rydberg circulaires.

A - Préliminaires

Q1 $Z = 37$ $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^{10} 4p^6 5s^1$
 Rb est de la famille des alcalins

Q2 $V(r) < 0$ correspond à une force attractive entre charges opposées

Q3 $Z(r)$ est une tumeur d'évanouissement. Si $r \rightarrow 0$ l' e^- voit la charge Z du noyau. Si $r \rightarrow +\infty$ les $(Z-1)e^-$ évanouissent Z : l'électron "voit" une charge $+e$

Q4 $a_0 = \frac{\hbar^2}{q^2 m_e}$
 q est en $N \cdot m^2$; m est en kg $\hbar$ est en J.s.
 $(\Rightarrow) J \cdot m$

$\hbar^2 q^2 m_e^{-1}$ est en $J^{d+\beta+\gamma} m^{(-2\gamma+\beta)} s^{(2\gamma+\alpha)}$

il faut donc que $\begin{cases} -2\gamma + \beta = 1 \\ d + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + 2\gamma = 0 \end{cases}$

ce qui donne $\gamma = -1$ $\beta = -1$ $\alpha = 2$

d'où $a_0 = \frac{\hbar^2}{q m_e}$

A.N: $a_0 = 0,53 \cdot 10^{-10} m$

B - Atomes de Rydberg

1) Etude classique

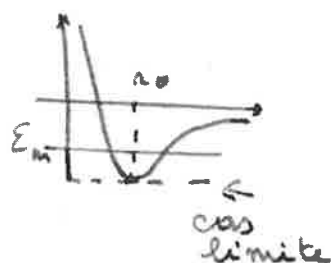
Q5 plus l'énergie est élevée, plus l'électron est loin du noyau: $Z \rightarrow 1$ $U = -\frac{q}{r}$

Q6 L'électron est soumis à la force centrale $-\frac{q}{r^2} \vec{u}_r$
 $\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$ donc le mouvement est dans le plan $\perp$ à $\vec{L}_0$: $\theta = \pi$ et $\vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\varphi} \vec{u}_\varphi$
 $\vec{L}_0 = m \vec{OM} \wedge \vec{v} = m r^2 \dot{\varphi} \vec{u}_z$ $L_0 = m r^2 \dot{\varphi}$

Q7 E_m est conservée $= \frac{1}{2} m v^2 - \frac{q}{r}$
 $E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \left(\frac{L_0^2}{2m r^2} - \frac{q}{r} \right)$

Q8 On peut tracer l'allure de $E_{\text{eff}}(r)$

12



$\frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow E_m \geq E_{\text{eff}}(r)$
la trajectoire circulaire $\dot{r}=0$
 r reste ne peut que
correspondre au cas en ---

$$\frac{dE_{\text{eff}}}{dr} = -\frac{d_0^2}{m r^3} + \frac{q}{r^2} \Rightarrow r_c = \frac{d_0^2}{m q}$$

$$\frac{1}{m q} = \frac{a_0}{\hbar^2} \text{ donc } r_c = \frac{d_0^2}{\hbar^2} a_0$$

B2) Etude quantique

Q9 L'équation de Schrödinger devient

$$i \hbar \chi'(t) \phi(r) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \phi - \frac{q}{r} \phi \right] \chi(t)$$

$$\text{soit } \underbrace{i \hbar \frac{\chi'(t)}{\chi(t)}}_{\text{fonction de } t} = \underbrace{\frac{1}{\phi(r)} \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \phi - \frac{q}{r} \phi \right]}_{\text{fonction de } r} \Rightarrow \text{constante } E$$

Ainsi $\chi'(t) = \frac{E}{i \hbar} \chi(t)$

$$\chi(t) = A e^{-\frac{i E t}{\hbar}}$$

Q10 L'électron doit être dans un état lié, dans un potentiel en $-\frac{q}{r}$: donc $E < 0$

Q11 $l \in [0, n-1]$

Q12 On peut identifier les différents termes:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dr^2} \leftrightarrow \frac{1}{2} m v^2 \quad \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2m r^2} \leftrightarrow \frac{d_0^2}{2m r^2}$$

on peut donc prendre $d_0^2 = \hbar^2 l(l+1)$

$l_{\text{max}} = n-1 \quad d_{\text{max}}^2 = \hbar^2 \times (n-1) n$

Q13 On en déduit $r_c = n(n-1) a_0$

Q14 On passe en variables réduites $\rho = r/a_0$

$$\Rightarrow \frac{d}{dr} = \frac{d}{d\rho} \cdot \frac{d\rho}{dr} = \frac{1}{a_0} \frac{d}{d\rho} \dots$$

$$(1.1) \text{ dérivent } -\frac{\hbar^2}{2m a_0^2} \frac{d^2 u(\rho)}{d\rho^2} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2m a_0^2 \rho^2} u(\rho) - \frac{q u(\rho)}{a_0 \rho} - E u(\rho) = 0$$

$$\text{soit } \frac{d^2 u(r)}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{q}{a_0} \frac{2ma_0^2}{\hbar^2} \frac{u(r)}{r} + \frac{2ma_0^2 E}{\hbar^2} u(r) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{d^2 u}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} u + \frac{2}{r} u + \varepsilon u = 0 \text{ avec}$$

$$\varepsilon = -\frac{2ma_0^2 E}{\hbar^2} \text{ donc } E_0 = \frac{\hbar^2}{2ma_0^2} = \frac{q}{2a_0}$$

$$\text{A.N } E_0 = 13,6 \text{ eV}$$

C. Atomes de Rydberg circulaires

$$\text{Q15 } \frac{dP}{dr} = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} A(n)^2 \left| -\frac{r}{a_0} \sin\theta \right|^{2(n-1)} r^2 \exp\left(-\frac{2r}{na_0}\right) \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$\frac{dP}{dr} = 2\pi A(n)^2 e^{-\frac{2r}{na_0}} \left(\frac{r}{a_0}\right)^{2(n-1)} r^2 \int_{\theta=0}^{\pi} [\sin\theta]^{2(n-1)} \sin\theta \, d\theta$$

$$\text{Q16 Il faut étudier } f(r) = \exp\left(-\frac{2r}{na_0}\right) \times r^{2n}$$

$$f'(r) = -\frac{2}{na_0} e^{-\frac{2r}{na_0}} r^{2n} + 2n r^{2n-1} e^{-\frac{2r}{na_0}}$$

$$f'(r) = 0 \Rightarrow -\frac{2}{na_0} r^{2n} + 2n r^{2n-1} = 0 \Rightarrow r_m = n^2 a_0$$

$$\text{Q17 Avec } n = 50 \quad r_m = 0,133 \mu\text{m} \text{ très grand pour un atome}$$

$$\text{Q18 } \frac{\Delta r}{r} \approx \Delta\theta \approx \frac{1}{10} \text{ est relativement faible ... on "sait" à peu près où est l'électron}$$

$$\text{Q19 - on identifie } \frac{1}{r} u(r) \text{ et } \left(\frac{r}{a_0}\right)^{n-1} e^{-\frac{r}{na_0}} \text{ à un coeff près}$$

$$\text{donc } u(r) \approx r^n e^{-\frac{r}{na_0}} \text{ ou bien } u(r) = e^n e^{-\frac{r}{n}}$$

$$\frac{du}{dr} = n e^{n-1} e^{-\frac{r}{n}} - \frac{1}{n} e^n e^{-\frac{r}{n}}$$

$$\frac{d^2 u}{dr^2} = n(n-1) e^{n-2} e^{-\frac{r}{n}} - 2 e^{n-1} e^{-\frac{r}{n}} + \frac{1}{n^2} e^n e^{-\frac{r}{n}}$$

(1-2) donne:

$$n(n-1) e^{n-2} - 2 e^{n-1} + \frac{1}{n^2} e^n - n(n-1) e^{n-2} + 2 e^{n-1} - \varepsilon e^n = 0$$

$$\text{d'où } \varepsilon = -\frac{1}{n^2}$$

$$\text{et } E = -\frac{E_0}{n^2}$$

on retrouve le résultat usuel de l'atome H.

Q20 $\ln \nu_{\text{at}} = \frac{E_0}{50^2} - \frac{E_0}{51^2} \Rightarrow \nu_{\text{at}} = 5,09 \cdot 10^{10} \text{ Hz}$
ondes centimétriques

Q21 $\|\vec{E}\| = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \times 9 \cdot 10^9}{10^{-20}} \approx 1,5 \cdot 10^{10} \text{ V.m}^{-1}$
champ d'ionisation ?

Q22 plus n est grand, moins il est lié, et plus il est facile de le ioniser:

$$n = 50 \rightarrow 1,6 \cdot 10^4$$

$$n = 51 \rightarrow 1,48 \cdot 10^4$$

$$n = 52 \rightarrow 1,36 \cdot 10^4$$

Q23 On veut attirer les électrons, donc les potentiels doivent être de plus en plus grands quand on va de a vers b .

Q24. Protocole 1



e diaphragme

on ne recense des e^- que si l'électron est dans l'ouverture du diaphragme ...

on lit sur le graphique $\Delta t \approx 25 \mu\text{s}$

$$v = \frac{d}{\Delta t} = \frac{6 \cdot 10^{-3}}{25 \cdot 10^{-6}} = 240 \text{ m/s}$$

Q25. $V_a(t) = V_b + K(t - t_0)$

on en déduit le champ dans la chambre d'ionisation $E = \frac{V_b - V_a}{e} = \frac{K}{e}(t - t_0)$ avec $e = 4 \text{ mm}$.

E doit passer par $E_1 = 4,8 \cdot 10^4 \text{ V.m}$ pour ioniser $n = 51$ puis $E_2 = 1,6 \cdot 10^4 \text{ V.m}$.

S'il on considère que les max de la figure 13 correspondent au champ d'ionisation (cf fig 10).

$$E_2 - E_1 = \frac{K}{e}(t_2 - t_1) = \frac{K}{e}(519,1 - 517,4) \cdot 10^{-6} \Rightarrow K = 1,26 \cdot 10^8 \text{ V/s}$$

(L millions des gaussiennes)

on peut alors déduire $t_0 = -\frac{e E_1}{K} + t_1 = 469,8 \mu\text{s} \approx 470 \mu\text{s}$

Q26 si la variation est plus rapide, les 2 gaussiennes vont se chevaucher.

si la variation est plus lente, on ne verra pas quand est la "frontière" entre les 2 états.

II - Etude de la cavité micro-ondes

A. Miroirs plans

Q28. on doit avoir $\underline{A}_1(d, t) = r_m \underline{A}_0(d, t)$
 et $\underline{A}_1$ est en $S_1 e^{i(\omega t + kz)} e^{i\varphi}$ (φ inconnu)
 donc $S_1 e^{i\varphi} e^{i(kd)} = r_m S_0 e^{-i(kd)} e^{i\varphi} \Rightarrow S_1 = S_0 \cdot r_m e^{-2ikd}$
 Ainsi $\underline{A}_1 = r_m S_0 e^{i(\omega t + kz - \phi)}$ avec $\phi = \frac{4\pi d}{\lambda_0}$
 or $\underline{A}_0 = S_0 e^{i(\omega t - kz)}$
 donc $\underline{A}_1 = \underline{A}_0 r_m e^{i(2kz - \phi)}$

Q29. De la même façon on peut passer de $\underline{A}_1$ à $\underline{A}_2$:
 $\underline{A}_2 = S_2 e^{i\varphi_2} e^{i(\omega t - kz)}$
 et $\underline{A}_2(0, t) = r_m \underline{A}_1(0, t) \Rightarrow S_2 e^{i\varphi_2} = r_m^2 S_0 e^{-i\phi}$
 donc $\underline{A}_2 = r_m^2 e^{-i\phi} \underline{A}_0$
 puis $\underline{A}_3 = r_m e^{i(2kz - \phi)} \underline{A}_2$

Q30. $A_+(z, t) = \sum_{p=0}^{\infty} \underline{A}_{2p}(z, t) = A_0(z, t) \left[\sum_{p=0}^{\infty} (r_m^2 e^{-i\phi})^p \right]$
 $= A_0(z, t) \frac{1}{1 - (r_m^2 e^{-i\phi})}$ ($|r_m| < 1$)

et $\underline{A}_-(z, t) = A_0(z, t) \cdot r_m e^{i(2kz - \phi)} \sum_{p=0}^{\infty} (r_m^2 e^{-i\phi})^{2p}$

Q31. $I = \frac{I_M}{1 + M \sin^2 \frac{\phi}{2}}$ est max pour $\sin^2 \frac{\phi}{2} = 0$ $\frac{\phi}{2} = n\pi$
 $\phi = 2n\pi$ cohérent avec lacombe

$\frac{4\pi d}{\lambda_0} = 2n\pi \Rightarrow \lambda_0 = \frac{2d}{n}$ $\frac{v}{c_{\text{cav}}} = \frac{c}{\lambda_0} = \frac{n c}{2d}$

Q32. $I_{\text{max}} \left(\frac{\delta\varphi}{4} \right) = \frac{I_M}{2} \Rightarrow \sin^2 \frac{\delta\phi}{2} = \frac{1}{M} = \frac{(1-R)^2}{4R} \ll 1$

donc $\frac{\delta\phi}{4} \approx \sqrt{\frac{(1-R)^2}{4R}} = \frac{1-R}{2\sqrt{R}}$

$\frac{\pi d \delta\nu}{c} = \frac{1-R}{2\sqrt{R}} \Rightarrow \delta\nu = \frac{1-R}{\sqrt{R}} \frac{c}{2\pi d} = \frac{1-R}{\sqrt{R}} \frac{1}{\pi m} \nu_{\text{cav}}$

Q33 A la "largeur spatiale", on peut associer une durée (comme durée d'un train d'ondes) $\tau = \frac{1}{\delta\nu}$

$$\tau = \frac{2\pi d}{c} \frac{\sqrt{R}}{1-R}$$

Q34 temps que fait le photon pour aller d'un miroir à l'autre = $\frac{d}{c}$. La probabilité pour qu'il existe dans la cavité pour n trajets est

$$p(n) = (R)^{n-1} \times T$$

La durée de vie moyenne est $\tau = \frac{d}{c} \sum_{n=0}^{\infty} n p(n)$

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{d}{c} \sum_{n=0}^{\infty} T R^{n-1} n \\ &= \frac{d}{c} (1-R) \frac{d}{dR} \left(\sum_{n=0}^{\infty} R^n \right) = \frac{d}{c} (1-R) \frac{d}{dR} \left(\frac{1}{1-R} \right) \end{aligned}$$

$$\tau = \frac{d}{c(1-R)}$$

Q35 $\tau \approx 10^{-11}$, $d = 26,6 \cdot 10^{-3} \Rightarrow 1-R = 8,87 \cdot 10^{-10}$
R est très proche de 1

Q36. Cela permet d'obtenir un coeff. de réflexion très proche de 1 ($\Rightarrow$ modèle conducteur parfait...)

B. Miroirs sphériques

Q37 A chaque diffraction, la surface sur laquelle s'étale le faisceau est un disque de rayon $(a + d \tan \theta)$.

$$\text{Rapport des surfaces} = \left(\frac{a}{a + d \tan \theta} \right)^2$$

Si on suppose que l'intensité se répartit de manière homogène, l'intensité restante au bout d'un aller ($\frac{d}{c}$) est $I_{inc} \left(\frac{a}{a + d \tan \theta} \right)^2$

$$\text{au bout de } n \cdot \frac{d}{c} : I = I_0 \left(\frac{1}{1 + \frac{d}{a} \tan \theta} \right)^{2n}$$

On peut estimer θ à partir des résultats sur la diffraction: $\tan \theta \approx \theta \approx \frac{\lambda}{a}$

$$I = I_0 \left(1 + \frac{d\lambda}{a^2}\right)^{-2m} = \frac{I_0}{1000} \Rightarrow 2m = \frac{\ln 1000}{\ln \left(1 + \frac{d\lambda}{a^2}\right)}$$

$$z_{\text{diff}} = m \cdot \frac{d}{c} = \frac{d}{2c} \frac{\ln 1000}{\ln \left(1 + \frac{d\lambda}{a^2}\right)}$$

$$\text{avec } \lambda_0 = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8}{51,1 \cdot 10^9} = 5,87 \cdot 10^{-3} \text{ m} \quad \frac{d\lambda}{a^2} = 0,25$$

$z = 1,37 \cdot 10^{-9} \text{ m}$. c'est très court... le système des miroirs plans n'est pas viable.

$$\begin{aligned} Q38 \quad w_0 &= \sqrt{\frac{\lambda_0}{\pi}} \sqrt{\frac{d'}{2} \left(R_1 - \frac{d'}{2}\right)} = \sqrt{\frac{5,87 \cdot 10^{-3}}{\pi}} \sqrt{\frac{27,6 \cdot 10^{-3}}{2} \left(40 - \frac{27,6}{2}\right) 10^{-3}} \\ &= 5,96 \cdot 10^{-3} \text{ m} \end{aligned}$$

$$Q39 \quad \text{ventre en } O, \text{ nœuds en } \pm \frac{d'}{2} \quad \text{ex: } n=3$$



il faut que $z' = \frac{d}{2}$ corresponde à $\phi(z, z) - \phi(0, 0) = 1 - \frac{\pi}{2}$

$$\frac{2\pi d'}{2\lambda_0} - \arctan\left(\frac{\lambda_0 d'}{2\pi w_0^2}\right) = 1 - \frac{\pi}{2}$$

$$1 = \frac{2d'}{\lambda_0} - \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{\lambda_0 d'}{2\pi w_0^2}\right) = \boxed{9}$$

Q40 la taille d'un faisceau est de l'ordre de $\frac{\lambda_0}{2} = 2,94 \cdot 10^{-3} \text{ m}$.

taille cavité $\approx 9 \times \frac{\lambda_0}{2} = 26,4 \text{ mm}$.

cet ordre de grandeur est cohérent avec 24,6 et 27,6 mm
liés avec $r_{\text{max}} = 3,5 \text{ mm}$?

III Couplage entre un atome de Rydberg et la cavité

A - Représentation électrocinétique

Q41 $\mathcal{U}_C + \mathcal{U}_L = 0 \Rightarrow \mathcal{U}_C + L C \frac{d^2 u_C}{dt^2} = 0 \Rightarrow \omega_{\text{cav}} = \frac{1}{\sqrt{L} \cdot C_{\text{cav}}}$
 et $\omega_{\text{at}} = \frac{1}{\sqrt{L} \cdot C_{\text{at}}}$

Q42 - Ne pas prendre en compte les résistances = négliger les fuites ($R \rightarrow \infty$ dans la cavité) et pas de fuites énergétiques dans l'atome.

Q43 on écrit les 2 eq. électriques:

$$\begin{cases} \mathcal{U}_{C_{\text{cav}}} + L \frac{di_{\text{cav}}}{dt} + M \frac{d}{dt} i_{\text{at}} = 0 & i_{\text{at}} = C_{\text{at}} \frac{d\varphi_{\text{at}}}{dt} \\ \mathcal{U}_{C_{\text{at}}} + L \frac{di_{\text{at}}}{dt} + M \frac{d}{dt} i_{\text{cav}} = 0 \end{cases}$$

on dérive pour obtenir

$$\begin{cases} \frac{1}{C_{\text{cav}}} i_{\text{cav}} + L \frac{d^2 i_{\text{cav}}}{dt^2} + M \frac{d^2 i_{\text{at}}}{dt^2} = 0 \\ \frac{1}{C_{\text{at}}} i_{\text{at}} + L \frac{d^2 i_{\text{at}}}{dt^2} + M \frac{d^2 i_{\text{cav}}}{dt^2} = 0 \end{cases}$$

soit $\begin{cases} \frac{d^2 i_{\text{cav}}}{dt^2} + \frac{M}{L} \frac{d^2 i_{\text{at}}}{dt^2} + \frac{1}{L C_{\text{cav}}} i_{\text{cav}} = 0 \\ \frac{d^2 i_{\text{at}}}{dt^2} + \frac{M}{L} \frac{d^2 i_{\text{cav}}}{dt^2} + \frac{1}{L C_{\text{at}}} i_{\text{at}} = 0 \end{cases}$

on s'identifie: $\frac{M}{L} = \frac{\Omega}{\omega_0}$

$$\Omega = \frac{M}{L} \omega_0$$

$$\frac{\omega_0^2}{L C_{\text{cav}}} = \omega_0^2 - \varepsilon$$

$$\frac{1}{L C_{\text{at}}} = \omega_0^2 + \varepsilon$$

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \omega_0^2 - \omega_{\text{cav}}^2 = (\omega_0 - \omega_{\text{cav}})(\omega_0 + \omega_{\text{cav}}) \\ &= \frac{(\omega_{\text{at}} - \omega_{\text{cav}})}{2} \left(\omega_0 + \left(\omega_0 - \frac{\delta}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \omega_{\text{at}} = \omega_0 + \frac{\delta}{2} \\ \omega_{\text{cav}} = \omega_0 - \frac{\delta}{2} \end{cases}$$

$$\boxed{\varepsilon = \frac{\delta}{2} \left(2\omega_0 + \frac{\delta}{2} \right) \approx \omega_0 \delta} \text{ à l'ordre 1 en } \delta.$$

Q44 le système d'équations s'écrit

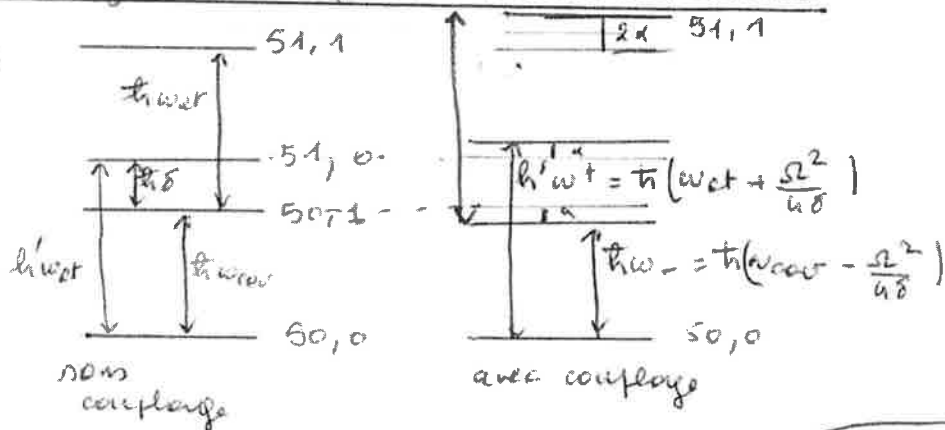
$$\begin{cases} [-\omega^2 + \omega_0^2 - \epsilon] \underline{I}_{car} + \left(\frac{\Omega}{\omega_0} \times -\omega^2 \right) \underline{I}_{at} = 0 \\ -\omega^2 \frac{\Omega}{\omega_0} \underline{I}_{car} + [\omega_0^2 + \epsilon - \omega^2] \underline{I}_{at} = 0 \end{cases}$$

pour avoir des solutions non nulles, il faut que le déterminant soit nul :

$$\Rightarrow (\omega_0^2 - \epsilon - \omega^2)(\omega_0^2 + \epsilon - \omega^2) - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2} \omega^4 = 0$$

B - Couplage atome - photon dans la cavité :

Q45



$$\alpha = \frac{\hbar \Omega^2}{4 \delta}$$

Q46 si pas de photon $\hbar\omega'_{at} = \hbar\omega_+ \Rightarrow$

$$\Delta\omega_{at}^{(0ph)} = \frac{\hbar \Omega^2}{4 \delta}$$

Q47 si photon : $\Delta\omega_{at}^{(1ph)} = \frac{3 \hbar \Omega^2}{4 \delta}$

Centrale 2017 MP - Mouvements dans le champ de pesanteur

I - Un saut supersonique

(A) 1) Le flux de $\vec{g}$ à travers une surface fermée est égal à
 $-4\pi G \times \text{masse intérieure}$

2) Tout plan contenant $\vec{OM}$ est plan de symétrie $\Rightarrow \vec{g}(M) \parallel \vec{Mr}$
 surface = sphère

- si $r \leq R_T$ $4\pi r^2 g_r(r) = -4\pi G \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{M_T}{\frac{4}{3}\pi R_T^3} \Rightarrow g_r(r) = -GM_T \frac{r}{R_T^3}$

- si $r \geq R_T$ $4\pi r^2 g_r(r) = -4\pi G M_T \Rightarrow$

$g_r(r) = -\frac{GM_T}{r^2}$

3) A la surface $g = \frac{GM_T}{R_T^2} \Rightarrow M_T = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

(B) 1) Conservation de l'énergie : $0 - \frac{GM_T m}{(R_T + h)} = \frac{1}{2} m v_{\text{son}}^2 - \frac{GM_T m}{R_T}$

$h = R_T \left(\frac{1}{1 - \frac{v_{\text{son}}^2 R_T}{2GM_T}} - 1 \right)$

ou $v_{\text{son}} \ll \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} \Rightarrow h \approx \frac{v_{\text{son}}^2 R_T^2}{2GM_T}$

A.N. $h_{\text{son}} = 5,9010^8 \text{ m}$
 5897 m

2) hypothèses :

$\rho = \rho_0 e^{-z/H}$ avec $H = \frac{RT}{Mg} \approx 8 \text{ km}$ si $T = 273 \text{ K}$

$\Rightarrow$ on peut supposer qu'à assez haut $\rho \approx 0$ et on néglige la traînée

$z_{\text{max}} \approx 40 \text{ km} \ll R_T$ on peut considérer $g(z) = g \approx \text{cte}$

Avec ces hypothèses, on atteint v_{son} après avoir parcouru la distance h_{son} on est passé de $38,9634 \text{ km}$ à $z \approx 33 \text{ km}$
 $= z_1$

Estimation de KA : Phase finale du saut :

$v = v_{\text{final}} \approx \text{cte}$ (vitesse limite) $\Rightarrow -mg + KA \rho_0 v_{\text{final}}^2 = 0$
 $\rho \approx \rho_0 (z \ll H)$

$\Rightarrow KA = \frac{mg}{\rho_0 v_{\text{final}}^2}$

Vérification de l'hypothèse : $\frac{Mg z_1}{R_T}$

on calcule $\frac{F_D}{F_{\text{pes}}} (33 \text{ km}) = \frac{KA \rho_0 e^{-\frac{Mg z_1}{R_T}}}{mg} v_{\text{son}}^2$

$= \left(\frac{v_{\text{son}}}{v_{\text{final}}} \right)^2 e^{-\frac{Mg z_1}{R_T}}$

$= \left(\frac{340}{23} \right)^2 \exp\left(-\frac{33}{8}\right) \approx 0,3$

L'approximation est assez grossière.

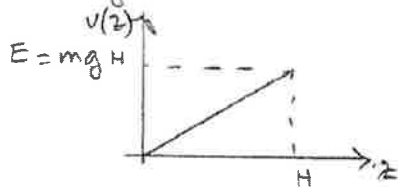
altitude mini : pour avoir $\frac{F_D}{F_{\text{pes}}} < 0,1$ il faut $z > 41,8 \text{ km}$.

le modèle n'est pas bon

II Etats stationnaires d'un neutron dans le champ de pesanteur

A) $V(z) = mgz$ (g est constant)

- l'énergie totale est conservée : $E_c + V = E = \text{cte} = mgH$



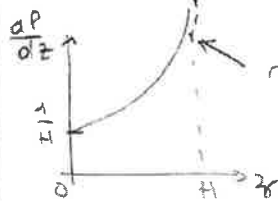
2) $\frac{1}{2}mv^2 + mgz = mgH \Rightarrow v = \sqrt{2g(H-z)}$

3) $E_c \geq 0 \Rightarrow z \leq H$

$E_{\text{total}} = \text{cte} \Rightarrow$ pas de ϕ de Boltzmann $dz = dt \times \sqrt{2g(H-z)}$

$dP \text{ prop. } \tilde{dt} \Rightarrow dP = \frac{A dz}{\sqrt{2g(H-z)}}$

normalisation : $A \times \int_0^H \frac{dz}{\sqrt{2g(H-z)}} = 1 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{g}{2H}} = \left(\frac{dP}{dz} = \frac{1}{2\sqrt{H(H-z)}} \right)$



vitessse nulle $\Rightarrow$ temps très grand pour parcourir $dz \dots$
peu représentatif

4) $\frac{\hbar^2}{2m^2g}$ en $\frac{(J \cdot s)^2}{kg^2 \cdot m \cdot s^{-2}} = \frac{(kg \cdot m^2 \cdot s^{-1})^2}{kg^2 \cdot m \cdot s^{-2}} = m^3$

donc $l_g = \left(\frac{\hbar^2}{2m^2g} \right)^{1/3}$ est une longueur

5) On peut définir par homogénéité $E_g = mgl_g$

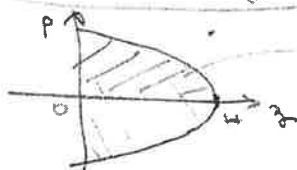
6) $l_g = \left[\frac{(1,05 \cdot 10^{-34})^2}{2 \times 3,81 \times (1,67 \cdot 10^{-27})^2} \right]^{1/3} = 5,86 \cdot 10^{-6} \text{ m}$

$E_g = 9,6 \cdot 10^{-32} \text{ J soit } (6 \cdot 10^{-13} \text{ eV})$

il faudrait des neutrons ultra-froids pour observer E_g .

B) Dans le champ de pesanteur : $mgH = \frac{p^2}{2m} + mgz$

$\Rightarrow p = \pm m \sqrt{2g(H-z)}$



Par analogie on calcule

- l'aire $S = \int_0^H |p(z)| dz$
 $= 2m\sqrt{2g} \int_0^H \sqrt{H-z} dz$

d'où $S = 2m\sqrt{2m^2g} \times \frac{2}{3} H^{3/2}$

avec $S = nh \Rightarrow H_n^{3/2} = \frac{3nh}{4\sqrt{2m^2g}} = \frac{3\pi n}{2} \frac{\hbar}{\sqrt{2m^2g}} = \frac{3\pi n}{2} l_g^{3/2}$

D'où $H_n = l_g \times \left(\frac{3\pi n}{2} \right)^{2/3}$

(C) 1) état stationnaire: $|\psi|^2$ indep de t (densité de probabilité)

2) $z = \frac{x}{l_g} \Rightarrow \frac{d}{dz} = \frac{d}{dx} \times \frac{1}{l_g} \dots$

L'équation devient: $-\frac{\hbar^2}{2m l_g^2} \frac{d^2 \psi}{dz^2} + V(z) \psi(z) = E \psi(z)$

avec $V(z) = mgz = mg l_g \frac{z}{l_g} = E_g \cdot z$ et $\frac{\hbar^2}{2m l_g^2} = mg l_g = E_g$

D'où $\boxed{-\frac{d^2 \psi}{dz^2} + z \psi(z) = E \psi(z)}$

3) $\psi(z)$ doit être nulle en $z=0$ (continuité de la probabilité)
 $|\psi|^2$ doit être intégrable sur $[0, +\infty[$ donc $\psi(z) \xrightarrow{z \rightarrow +\infty} 0$

4) $A_i(z) \xrightarrow{z \rightarrow +\infty} 0$ donc cette condition est vérifiée.

- il faut que $A_i(-E) = 0 \Rightarrow -E$ est un zéro de la fonction A_i

$E_1 = 2,34 \quad E_2 = 4,09 \quad E_3 = 5,52$

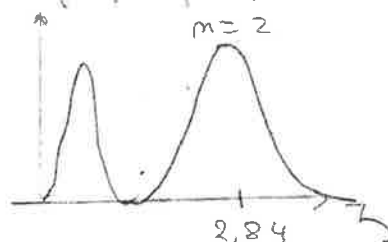
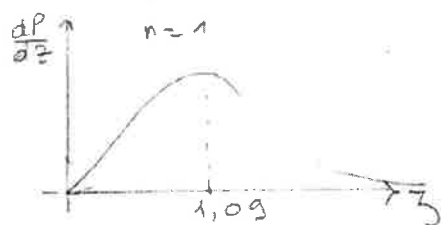
Avec (B)

$E_1 = 2,81 E_g \quad E_2 = 4,46 E_g \quad E_3 = 5,84 E_g$

L'approximation est convenable.

5) $\frac{dP_i}{dz} = |\psi(z)|^2 = N^2 (A_i(z - E_i))^2$ sera max pour $A_i(z - E_i)$ max

soit $z = E_i$ (lecture graphique)



$n \uparrow \quad E_n \uparrow$ la probabilité de présence en z (plus grand) $\uparrow$

Cette fois, on n'a pas de divergence

(D) Spectroscopie résonnante gravitationnelle

1) a) $e^{i(kx - \omega t)}$ représente le terme de "propagation de l'onde", (ou un faisceau "infini" de neutrons).

L'équation de Schrödinger devient

$$i \hbar \left(-\frac{iE}{\hbar} - i\omega \right) \psi_1(z) = -\frac{\hbar^2}{2m} \psi_1''(z) + \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \psi_1(z) + V(z) \psi_1(z)$$

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m} \psi_1''(z) + \left[\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - E - \hbar\omega + V(z) \right] \psi_1(z) = 0}$$

b) avec $V(z)=0 \Rightarrow \psi_1''(z) + \underbrace{\frac{2m}{\hbar^2} \left(E - \cancel{\frac{\hbar^2 k^2}{2m}} - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \right)}_{K^2} \psi_1(z) = 0$

Les c Limites entraînent

$$\psi_1(z) = A \sin(Kz) \text{ avec } \sin(K \cdot 4) = 0 \Rightarrow K_m H = n\pi$$

on retrouve bien le puits infini

$$\boxed{E_m = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{n\pi}{H} \right)^2}$$

c) On observe que E_n varie de 2 décades alors que $\frac{H}{2g}$ varie de 1 ($\Rightarrow$ pente -2 en échelle log).

$$\Rightarrow \log(E_n) = \text{cte} - 2 \log\left(\frac{H}{2g}\right) \Rightarrow E_n \text{ en } \frac{1}{H^2} \text{ comme } E_{1,00}$$

Si $H \gg \lambda_d$, on ne "voit" plus les niveaux d'énergie, on retrouve le modèle de la partie précédente ($V(z) = mgz$ pour $z > 0$) et on retrouve la valeur $E_1 = 2,34$ obtenue avec la fonction d'Airy. C'est cohérent avec ce qu'on lit sur l'échelle log...

d) le document donne $H = 25,5 \mu\text{m}$ soit $\frac{H}{2g} = 4,35$
($g = 5,86 \cdot 10^{-6} \text{ m/s}^2$ vu en A5)

$\Rightarrow$ on est à $E_1 = 2,34$ (sur l'asymptote).

2) a) p.f.d sur un neutron: $\begin{cases} \ddot{y} = -g \\ \dot{y} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \ddot{y} = -g \\ \dot{y} = -gt + v_{z0} \end{cases} \quad \begin{cases} \ddot{y} = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{z0}t \\ x = v_{x0}t \end{cases}$

(origine des temps juste après un rebond)

$$\dot{y} = 0 \Rightarrow t = \frac{v_{z0}}{g} \text{ et } y = \frac{v_{z0}^2}{2g} = H_m \Rightarrow x_{\text{max}} = v_{x0} \sqrt{\frac{2H_m}{g}}$$

$$\text{et } L_m = 2x_{\text{max}} = \boxed{2v_{x0} \sqrt{\frac{2H_m}{g}}} \quad \text{CRFD}$$

b) $H_2 > H \rightarrow$ absorption

$H_1 \rightarrow$ n'atteint pas le miroir ($\frac{H-H_1}{2g} = 2,06$) $T_1 \sim 27 \cdot 10^{-3}$

$H_2 \rightarrow \frac{H-H_2}{2g} = 0,255 \quad T_2 \approx 0,71$

les neutrons "d'énergie" E_1 passent, et $\approx 30\%$ des neutrons d'énergie E_2 .

c) cours

$$d) T_1 = 2,7 \cdot 10^{-3}$$

$$e) \begin{cases} P_{p+1} = P_p \times (1 - T_1) \\ P_1 = (1 - T_1) \end{cases} \Rightarrow \boxed{P_p = (1 - T_1)^p}$$

A la distance x , il y aura en $E\left(\frac{x}{L_1}\right)$ rebonds, si dans un modèle ou l'on dit très petit, on

luna:

$$P(x+dx) = P(x) \times \left(1 - T_1 \frac{dx}{L_1}\right)$$

En dx , il y a $\frac{dx}{L_1}$ rebonds ----

$$P(x+dx) - P(x) = - \frac{T_1}{L_1} P(x) dx = - P(x) \frac{dx}{D_1}$$

A la limite $\frac{dP}{dx} = - \frac{P(x)}{D_1} \Rightarrow P(x) = A \exp(-x/D_1)$

Et on normalise $1 = A \int_0^\infty e^{-x/D_1} dx \Rightarrow A = \frac{1}{D_1}$

$$P(x) = \frac{1}{D_1} e^{-x/D_1}$$

2) $\frac{D_1}{D_2} = \frac{L_1}{L_2} \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{H_1}{H_2}} \times \frac{T_2}{T_1} = \frac{0.71}{2.7 \cdot 10^{-3}} \times \sqrt{\frac{13.4}{24}} = 156$

$$\Rightarrow D_1 = 7.33 \text{ m.}$$

La longueur du guide est de 15 cm $\Rightarrow$ on élimine quasiment tous les " E_2 " et on garde tous les " E_1 ".

3) a) R non galiléen car le mt de R'/à R n'est pas uniforme

$$\vec{F}_{12} = -m\vec{a}_2 = -m a(t) \vec{u}_z$$

et $\vec{F}_{12} \cdot \vec{u}_z = - \frac{dV_{12}}{dz} \Rightarrow V_{12} = m a(t) z$

b) $i\hbar \frac{dc_1}{dt} e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} \varphi_1 + \frac{c_1}{\hbar} \left(\frac{E_1}{\hbar} \varphi_1 \right) e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} =$
 $\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \varphi_1}{dz^2} + V(z) \varphi_1 + V_{12}(z,t) \varphi_1 \right] e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} + \dots = 1 \text{ pour } c_1$

donc $i\hbar \frac{dc_1}{dt} e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} + i\hbar \frac{dc_3}{dt} e^{-\frac{iE_3 t}{\hbar}} = V_{12}(z,t) \left(\varphi_1 e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} \frac{c_1}{\hbar} + \varphi_3 e^{-\frac{iE_3 t}{\hbar}} \frac{c_3}{\hbar} \right)$

On multiplie par $\varphi_1 e^{+\frac{iE_1 t}{\hbar}}$ et on intègre :

$$\Rightarrow i\hbar \frac{dc_1}{dt} \times 1 + i\hbar \frac{dc_3}{dt} e^{-\frac{i(E_3 - E_1)t}{\hbar}} \times 0 = c_1 m a(t) \times z_{11} + m a(t) z_{13} e^{-\frac{i(E_3 - E_1)t}{\hbar}} c_3$$

ce qui donne la 1^{ère} relation demandée.

De même on multiplie par $\varphi_3 e^{\frac{iE_3 t}{\hbar}}$ et on obtient la 2^{ème} relation.

c) Initialement, on considère qu'on est dans l'état 1.

d) si $a(t) = 0$: on reste dans l'état 1, il ne se passe rien ($c_1(t) = 1, c_3(t) = 0$) - logique

e)

a) on constate le même effet que pour la molécule d'ammoniac.

L'état n'est pas stationnaire

Si $\Omega = \Omega_R$ on peut avoir $c_3 = 1$ et $c_1 = 0$: le neutron "saute" entre l'état 1 et l'état 3 $\rightarrow$ "résonance"

b) si le neutron sort de M' dans l'état 3 alors il sera absorbé dans la phase suivante

$\rightarrow$ effet de a_0 : voir 2^e partie figure 8.

comme v_n est constant, le temps t mis pour traverser M' est toujours le même, $\frac{\Omega_R t}{2\pi}$ aussi. $|c_1|^2$ et $|c_3|^2$ varient avec a_0 .

Entre 600 et 700 eV $\rightarrow$ intervention d'autres résonances.

$$c) \Omega_R = 2\pi f_R = \frac{E_3 - E_1}{\hbar} = mg_0 g \frac{E_3 - E_1}{\hbar}$$

Avec g_0 fixe

$$\Rightarrow g = \frac{\hbar f_R}{m g_0 (E_3 - E_1)} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \times 464}{1,67 \cdot 10^{-27} \times 5,82 \cdot 10^{-6} \cdot 5,52 - 2,34}$$

$$g = 9,87 \text{ ms}^{-2}$$

$$\frac{U(g)}{g} : \frac{U(p_r)}{p_r} = \frac{1}{6,64} \quad (\text{on considère } g_0 \text{ comme une constante})$$

En tenant en compte que g dépend de g , on obtient

$$g = 4 \pi^{3/2} \sqrt{\frac{\hbar}{m}} \left(\frac{p_r}{E_3 - E_1} \right)^{3/2} = 9,842 \text{ ms}^{-2}$$

$$\frac{U(g)}{g} = \frac{3}{2} \frac{U(p_r)}{p_r} = 3,23 \cdot 10^{-3} \Rightarrow U(g) = 3,18 \cdot 10^{-2}$$

$$g = 9,84 \pm 0,04 \text{ ms}^{-2}$$

$$h) a_0 = \alpha_0 \Omega_R^2 \Rightarrow \alpha_0 = \frac{0,1}{(2\pi \times 666)^2} = 0,72 \mu\text{m}, \text{ de l'ordre de } l_g \dots$$

$$1) \text{ avec le doc 4 } t_{\text{transit}} = \frac{d}{v_n} = \frac{0,2}{6,5} = 3,1 \cdot 10^{-2} \text{ s}$$

$$\text{Donc } \frac{\Omega_R t}{2\pi} = p_r t = 14,77$$

avec la figure 3

$$\text{longueur de onde } \lambda_g \approx \frac{500 \cdot 430}{2} = 95$$

$$\text{Heisenberg } \Delta g \cdot \Delta t \approx 1$$

$$\Delta t = \frac{1}{\Delta g} = 2,85 \cdot 10^{-2} \text{ ms}^{-1}$$

même ordre de grandeur.

Centrale HP 2016_42 - Installation nucléaire REP

I - Circuit secondaire et enrichissement de l'Uranium

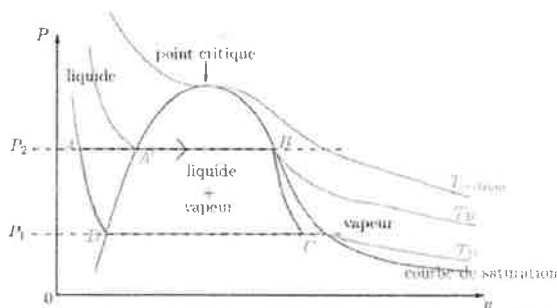
A - Cycle du circuit secondaire

$$1) a) \left. \begin{aligned} W + Q_{ch} + Q_F &= 0 \\ \frac{Q_{ch}}{T_{ch}} + \frac{Q_F}{T_F} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \eta = -\frac{W}{Q_{ch}} = 1 + \frac{Q_F}{Q_{ch}} = 1 - \frac{T_h}{T_{ch}}$$

$$b) \eta = 0,442$$

$$c) \eta_{\text{réel}} = \frac{P_e}{P_t} = \frac{900}{2785} = 0,323 < \eta_{\text{carnot}} \dots \text{le cycle n'est pas réversible}$$

2) a)

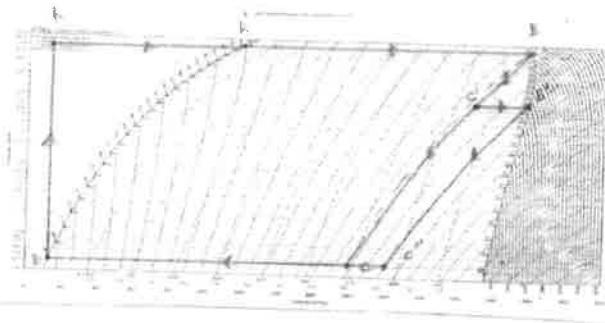


b)

	A'	B	D
h_m	1190,1	2788,46	125,22
Δh	21853	5,1226	0,4348
T	543K 270°C	543K 270°C	303K 30°C

(on utilise les informations sur les t-ues)

c)



D → A isenthalpique
A → B isobare
B → C isentropique
C → D isobare

$$d) \Delta h = h_s - h_e = w_u + q$$

$$e) w_{BC} = h_c - h_b = 1800 - 2788 = -988 \approx -10^3 \text{ kJ/kg} \text{ ou la réaction}$$

$$f) q_{AA'} = c_p (T_{A'} - T_A) \approx c_p (T_{B'} - T_B) = 1003,2 \approx 10^3 \text{ kJ/kg}$$

$$g) q_{A'B} = L_v(T_B) = h_B - h_{A'} \approx 1600 \text{ kJ/kg}$$

h) on prend alors $\eta = \frac{w_{BC}}{q_{AA'} + q_{A'B}} = \frac{1}{2,6} = 0,38$ encore > au rendement réel ... il y a des pertes à la conversion en électricité + ce cycle n'est pas forcément réel.

$$i) \text{ en C : état liquide + vapeur - } x_v \approx \frac{13}{19} = 0,68 \left(\frac{DC}{DB''} \right)$$

3) a) cf graphique

b) $x_{c1} = 0,85$ $x_{c11} = 0,77 > x_c$. limite la corrosion

$$c) Q_{ch} = Q_{AA'} + Q_{A'B} + Q_{C'B'} = 1000 + 1600 + 270 = 2870 \text{ kJ/kg}$$

$$W_p = (h_{c1} - h_{B'}) + (h_{c11} - h_{B'}) = -670 - 800 = -1070 \text{ kJ/kg}$$

$$\eta = \frac{-W}{Q_{ch}} = \frac{1070}{2870} = 0,37$$

le rendement est un peu plus faible

B. Enrichissement de U par centrifugation

1) R_1 est en rotation uniforme autour de l'axe Oz , il n'est donc pas galiléen

2) les forces subies sont:

- le poids $\rho \vec{g} d^3\tau$
- la force d'inertie d'entraînement $\rho \omega^2 r \vec{u}_r$
- il n'y a pas de force de Coriolis ($\vec{v}_r = \vec{0}$ équilibre)
- les forces de pressions: $-\vec{\nabla} P d^3\tau$

3) $\|\vec{a}_e\| = r \omega^2 = r \times (\pi \cdot 10^5)^2$ avec $r \leq 10 \text{ cm}$ à comparer à $g = 10 \text{ ms}^{-2}$
on peut donc négliger le poids.

4) on en déduit que $-\vec{\nabla} P + \rho \omega^2 r \vec{u}_r = 0$

$$\Rightarrow \frac{dP}{dr} = \rho(r) \omega^2 r$$

De plus le gaz est parfait $\Rightarrow \rho(r) = \frac{P(r) M}{RT}$

$$\Rightarrow \frac{dP}{dr} = \frac{M \omega^2}{RT} P(r) \cdot r = \frac{m \omega^2 P(r) r}{R_B T}$$

on peut passer à: $n^*(r) = \frac{P(r) N_A}{M}$ et $R_B = \frac{R}{N_A}$
($\frac{R}{N_A}$ est R par mols)
($m = \frac{M}{N_A}$)

$$\Rightarrow \frac{dn^*}{dr} = \frac{m \omega^2}{R_B T} r n^*$$

$$\frac{1}{n^*} \frac{dn^*}{dr} = \frac{m \omega^2 r}{R_B T} \Rightarrow \ln(n^*(r)) = \frac{m \omega^2 r^2}{2 R_B T} + \text{cte} \ln n^*(0)$$

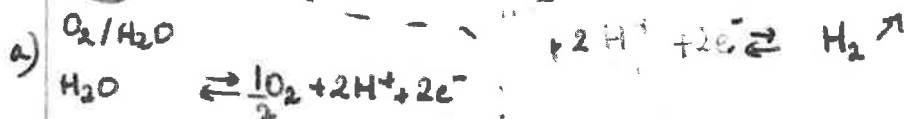
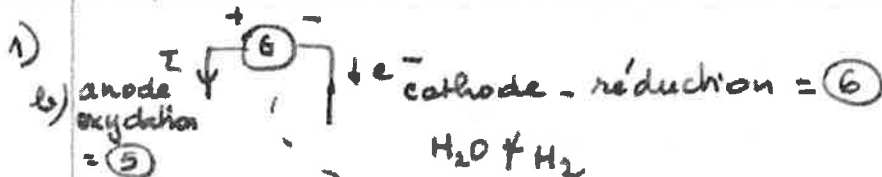
$$n^*(r) = n^*(0) \exp\left(\frac{1}{2} \frac{m \omega^2 r^2}{R_B T}\right)$$

5) on retrouve $\exp(-\frac{E_p}{RT})$ avec $E_p = -\frac{1}{2} m \omega^2 r^2$ qui est l'énergie potentielle associée à la force centrifuge.

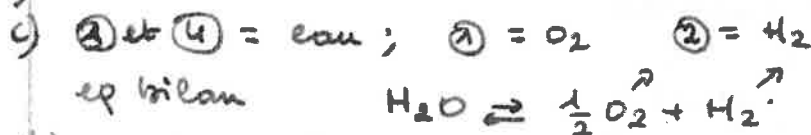
$^{235}\text{UF}_6$ a une masse m plus grande et se trouve plus à l'extérieur la zone centrale s'enrichit en ^{235}U 13

II - Contrôle des effluents de la centrale.

A - refet de Tritium.



b) les H^+ sont produits à gauche et migrent à droite

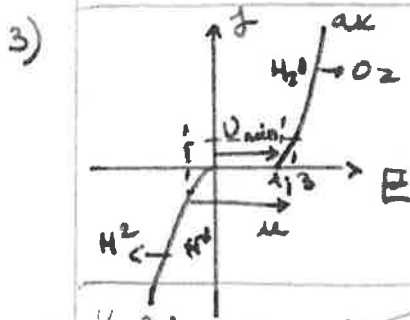


e) on ne veut pas de réaction parasite.

2) a) A l'anode, on produit systématiquement 1 H et 1 T pour 1 HTO on ne peut rien séparer.

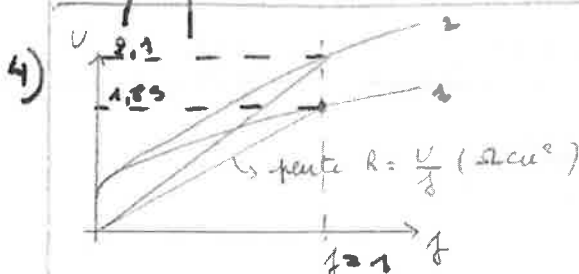
la différence se passe donc à la cathode

b) β se dépend de la température, nature de la cathode, état de surface, etc.



$$U_{\min} \approx 1,3 \text{ V}$$

ΔU est la différence de potentiel pas le potentiel



$$R_1 = 1,83 \, \Omega \text{ cm}^2$$

$$R_2 = 2,1 \, \Omega \text{ cm}^2$$

$$R_2 - R_1 = 0,27 \, \Omega \text{ cm}^2$$

On a intérêt à avoir une résistance faible, donc une épaisseur faible $\rightarrow$ grande porosité

B. Risques liés à la libération de RuO_4

- 1) RuO_4 a une t_{fus} de fusion basse $\rightarrow$ peu de liaisons à casser : on a un cristal moléculaire, il suffit de casser les liaisons de Van der Waals.
 RuO_2 a une t_{fus} de fusion bien plus élevée, on peut avoir un solide covalent, ou métallique

- 2) on sait que $\ln K = -\frac{\Delta_r G^\circ}{RT} = -\frac{\Delta_r H^\circ}{R} \cdot \frac{1}{T} + \frac{\Delta_r S^\circ}{R}$
 on s'identifie $\frac{\Delta_r S^\circ}{R} = -3,6829 \Rightarrow \Delta_r S^\circ = -30,61 \text{ JK}^{-1}\text{mol}^{-1}$
 $-\frac{\Delta_r H^\circ}{R} = 14461 \Rightarrow \Delta_r H^\circ = 120,23 \text{ kJmol}^{-1}$

Enfin avec une cinétique d'ordre 1
 on sait que $t_{1/2} \sim \frac{1}{k}$ donc $t_{1/2} \sim e^{\frac{E_a}{RT}}$
 donc $\ln t_{1/2} = \text{cte} + \frac{E_a}{R} \cdot \frac{1}{T}$

T	$t_{1/2}$
323	$2,6 \cdot 10^7$
373	$4,3 \cdot 10^4$
423	$3,5 \cdot 10^2$

on trace, on trouve une droite
 de pente $\frac{E_a}{R} \approx 15300$
 $\Rightarrow E_a = 127,2 \text{ kJmol}^{-1}$

- 3) plus $T \uparrow$ plus la cinétique de décomposition de RuO_4 est rapide; et plus l'équilibre est déplacé vers la gauche (réaction exothermique, loi de Van't Hoff).

III Surveillance sismique d'un site nucléaire.

A $\delta = 2(d_0 + y(t))$

B. on nomme les amplitudes: $\underline{z} = A(1 + e^{+i \frac{2\pi \delta}{\lambda}})$

l'intensité est

$$I = |\underline{z}|^2 = A^2(1 + 1 + 2\cos(\frac{2\pi \delta}{\lambda}))$$

$$= 2A^2(1 + \cos(\underbrace{\frac{2\pi}{\lambda} 2d_0}_{\phi_0} + \frac{4\pi}{\lambda} y(t)))$$

- C Il faut se placer dans une zone où I varie beaucoup $\Rightarrow$ on choisit plutôt le point Q.

Q correspond à $\cos \phi_0 = 0 \Rightarrow \phi_0 = \frac{\pi}{2} [\pi]$

(5)

D $d_0 = \frac{\pi}{8} \quad \phi_0 = \frac{2\pi}{\lambda} \times 2d_0 = \frac{\pi}{2} : \text{oui} \dots$

1) entre 0,1 et 0,2 λ , on voit 8 oscillations, la différence de marche a passé $8 \cdot \lambda$, alors que $y(t)$ a varié de -4μ à $+4\mu$. donc δ de -24μ à $+24\mu$
donc $4\mu = \frac{4}{2} \lambda = 2\lambda$.

$\frac{T}{2} = 0,1 \lambda \Rightarrow T = 0,2 \lambda \Rightarrow f = 5 \text{ Hz}$

E. Cette fois $\Delta\delta = 8,5 \lambda \Rightarrow 4\mu = 2,125 \lambda$ fig 12

$\frac{I}{I_{\max}} = 0,25 \Rightarrow \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda}\right) = -0,25 \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} \delta = 0,98\pi \quad \delta = 0,23\pi$
 $0,25 \quad \quad \quad 0,25 \quad \quad \quad \delta = 0,2\pi$

on compte $\delta = (0,2 + 0,23 + 8,5) \lambda \approx 9 \lambda$

$4\mu = \frac{9}{4} \lambda = 2,25 \lambda$

Q1. Le spectre ultraviolet débute pour des longueurs d'onde inférieures à 400 nm ce qui est cohérent avec les données de la figure 1.

Considérons un photon de longueur d'onde 400 nm, son énergie vaut :

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6,626 \times 10^{-34} \times 3,00 \times 10^8}{4 \times 10^{-7}} \approx 5 \times 10^{-19} \text{ eV} \Rightarrow E \approx 3 \text{ eV}$$

L'énergie des photons ultra-violet est d'au moins quelques eV, comparable à l'énergie de liaison des électrons du cortège électronique (Cf. énergie du niveau fondamental de l'hydrogène en annexe). Lors de l'absorption d'un tel photon, un électron peut donc être arraché et l'entité ionisée.

Q2. La figure 2 montre que, lors de la traversée de l'atmosphère, la couche d'ozone réduit de moitié le flux de rayons UVa et totalement les UVc qui sont associés aux photons les plus énergétiques.

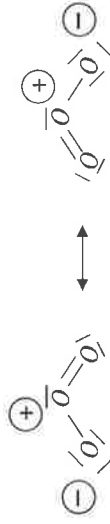
Ces rayons pénètrent en profondeur dans la peau pouvant provoquer lésions et brûlures et favoriser le développement de cancers, les plus énergétiques pouvant briser l'ADN et entraîner des mutations. Il est donc important que la couche d'ozone filtre ce rayonnement UV.

Q3. Pour l'oxygène $Z = 8$, configuration électronique $1s^2 2s^2 2p^4$.

Q4. L'oxygène possède 6 électrons de valence, il y a donc 12 électrons à répartir sur la structure, c'est à dire 6 doublets. On répartit ces doublets de manière à respecter la règle de l'octet pour chacun des atomes d'oxygène.



Q5. Pour la molécule d'ozone, il y a $3 \times 6 = 18$ électrons à répartir, c'est à dire 9 doublets. On constate la présence de deux formes mésomères équiprobables. Les propositions assurent que la règle de l'octet est vérifiée pour chacun des atomes d'oxygène.



Q6. Les charges formelles qui apparaissent et les deux formes mésomères permettent de définir une structure équivalente moyenne où un dipôle (dirigé du pôle négatif vers le pôle positif) apparaît sur chacune des liaisons oxygène-oxygène.

1. Remarques : cedric.grainge@laposte.net

Le moment dipolaire $\vec{P}$ de la molécule résulte de l'addition vectorielle de ces deux dipôles élémentaires.



Q7. On commence par déterminer les grandeurs standard de réaction dans l'approximation d'Ellingham sachant que l'enthalpie standard de formation du dioxygène gazeux est nulle :

$$\Delta_r H^\circ = 2 \times 141,9 \Rightarrow \Delta_r H^\circ = 283,8 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$\Delta_r S^\circ = 2 \times 239 - 3 \times 205 \Rightarrow \Delta_r S^\circ = -137 \text{ J} \cdot \text{K} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$\Delta_r G^\circ = 283,8 \times 10^3 - 298 \times (-137) \Rightarrow \Delta_r G^\circ = 342,6 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

On en déduit alors la constante d'équilibre :

$$K^\circ = \exp\left(-\frac{\Delta_r G^\circ}{RT}\right) = \exp\left(-\frac{342,6 \times 10^3}{8,31 \times 298}\right) \Rightarrow K^\circ = 1,2 \times 10^{-57}$$

Q8. On exprime alors la constante d'équilibre à l'aide des pressions partielles (avec une pression totale égale à la pression standard) :

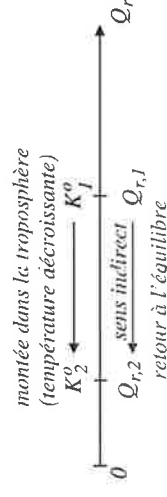
$$K^\circ = \frac{a_{\text{O}_2}^2}{a_{\text{O}_3}^3} = \frac{p_{\text{O}_3}^2 p^\circ}{p_{\text{O}_2}^3 (p^\circ)^3} \Rightarrow p_{\text{O}_3} = p^\circ \times x_{\text{O}_2}^{3/2} \times \sqrt{K^\circ}$$

$$p_{\text{O}_3} = 10^5 \times (0,20)^{3/2} \times (1,2 \times 10^{-57})^{1/2} \Rightarrow p_{\text{O}_3} = 3,1 \times 10^{-25} \text{ Pa}$$

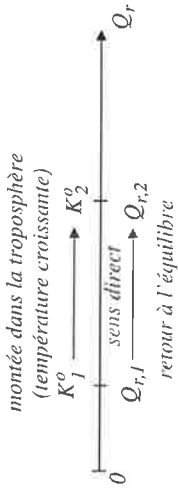
Q9. La figure 1 fait apparaître l'évolution de la température dans l'atmosphère, température décroissante dans la troposphère et croissante dans la stratosphère.

De plus, comme $\Delta_r H^\circ > 0$, la loi de Van't Hoff $\frac{d \ln(K^\circ)}{dT} = \frac{\Delta_r H^\circ}{RT^2}$ assure que la constante d'équilibre est une fonction croissante de la température.

Dans la troposphère : la température diminue avec l'altitude, il en va de même de la constante d'équilibre ; un retour à l'équilibre nécessite donc une diminution du quotient de réaction est une réaction dans le sens indirect, la formation d'ozone est défavorisée.

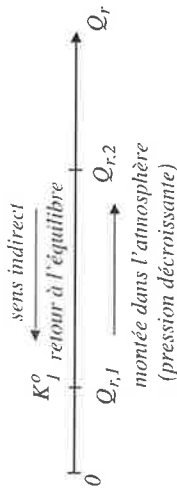


Dans la stratosphère : la température augmente avec l'altitude, il en va de même de la constante d'équilibre ; un retour à l'équilibre nécessite donc une augmentation du quotient de réaction est une **réaction dans le sens direct, la formation d'ozone est favorisée.**



Le raisonnement précédent a tenu compte du seul paramètre d'équilibre température. Lors de l'élévation dans l'atmosphère, on observe également une baisse de la pression. Le quotient de réaction s'écrit : $Q_r = \frac{n_{O_3}^2 n_{tot}}{n_{O_2}^3} \times \frac{p^\circ}{p_{tot}}$.

Une baisse de la pression entraîne une augmentation du quotient d'équilibre, un retour à l'équilibre est alors marqué par une réaction dans le sens indirect. Une élévation associée à une **baisse de pression favorise la réaction dans le sens indirect.** Cet effet nuance les résultats obtenus avec la seule température.



Q10. L'équilibre I.1 conduisant à la formation de l'ozone nécessite la présence de dioxygène et un rayonnement ultraviolet ; en basse altitude la concentration en dioxygène est maximale mais le rayonnement UV est filtré par l'ozone ; en haute altitude le rayonnement UV est maximal mais la présence de dioxygène quasi-nulle.
On conçoit donc une concentration maximale à une altitude intermédiaire.

Q11. D'après l'équation de réaction I.1, $K_R^\circ = \frac{p_{O_3}^2}{p_{O_2} p^\circ}$.

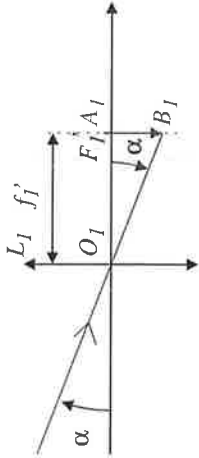
Q12. D'après la réaction I.2 vérifiant la loi de Van't Hoff :

$$v_{O_3} = k p_{O_2} p_{O_3} \Rightarrow v_{O_3} = k \sqrt{K_R^\circ p^\circ} \times p_{O_2}^{3/2}$$

C'est à dire un ordre $\frac{3}{2}$ par rapport au dioxygène.

Q13. Soit $d_{TS} \approx 1,5 \times 10^{11}$ m la distance Terre-Soleil et $D_E = 3,9 \times 10^{16}$ m la distance Soleil-*Proxima Centauri*, comme $d_{TS} \ll D_E$, on peut assimiler la distance Terre-*Proxima Centauri* à la distance Soleil-*Proxima Centauri*.

Q14. $f'_1 \ll D_E$, l'étoile *Proxima Centauri* est considérée à l'infini, l'image intermédiaire se forme dans le plan focal image de la lentille L_1 .



Q15. L'étoile *Proxima Centauri* est vue sous un angle $\alpha \approx \frac{2R_E}{D_E}$ (approximation des petits angles). D'après la figure obtenue à la question 14 :

$$A_1 B_1 = f'_1 \alpha \Rightarrow A_1 B_1 = \frac{2R_E f'_1}{D_E}$$

Q16. Schéma synoptique : $A_1 \xrightarrow{L_2} A_2$; en appliquant la formule de grandissement et de conjugaison, il vient :

$$\frac{1}{O_2 A_2} - \frac{1}{O_2 A_1} = \frac{1}{f'_2} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{O_2 A_2}{O_2 A_1}$$

En combinant les deux relations, on en déduit : $\frac{1 - \gamma}{\gamma} f'_2 = 1,5 \text{ cm}$.

La lentille L_2 se trouve placée 1,5 cm avant l'image intermédiaire.

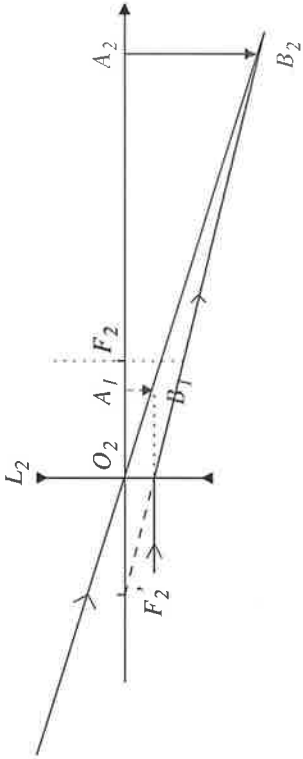
Il est sans doute préférable de proposer ce résultat que celui demandé par l'énoncé :

$$\overline{O_1 O_2} = \overline{O_1 A_1} + \overline{A_1 O_2} \Rightarrow \overline{O_1 O_2} = f'_1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma} f'_2$$

Q17. Pour le tracé de l'image finale, on considère deux rayons pour effectuer le tracé.

- le rayon incident passant par le centre optique (et dont le prolongement passe par B) n'est pas dévié ;
- le rayon parallèle à l'axe optique (et donc le prolongement passe par B) émerge avec son prolongement qui passe par F'_2 .

L'intersection des deux rayons fournit le point B_2 et le point A_2 par projection sur l'axe.



Q18. Compte tenu du facteur de grandissement : $A_2 B_2 = \frac{2\gamma R_E f'_1}{D_E}$.

$$\text{AN. : } A_2 B_2 = \frac{2 \times 4 \times 9,81 \times 10^4 \times 8}{3,99 \times 10^{13}} \Rightarrow A_2 B_2 = 0,16 \mu\text{m}.$$

La taille de l'image sur la plaque est inférieure à la taille d'un cristal, l'image apparaît ponctuelle.

Q19. Soit L et ℓ les dimensions du capteur, a le côté d'un pixel et N le nombre de pixels :

$$Na^2 = L \times \ell \Rightarrow a = \sqrt{\frac{L \times \ell}{N}}$$

$$\text{AN. : } a = \sqrt{\frac{24 \times 10^{-3} \times 36 \times 10^{-3}}{10^8}} \Rightarrow a = 3 \mu\text{m}.$$

Là encore la taille de l'image est plus petite que la taille d'un pixel, l'image est ponctuelle.

Q20. Démarche :

— Puissance de *Proxima Centauri* à la surface de la Terre

Faute d'information supplémentaire, on supposera que la puissance totale $\mathcal{P}_0$ émise par *Proxima Centauri* est identique à celle émise par le Soleil. Du fait de l'émission supposée isotrope, cette puissance se répartit sur une sphère, c'est à dire pour des sphères ayant respectivement le rayon de la distance Terre-Soleil d_{ST} puis le rayon de la distance Terre-*Proxima Centauri* D_E :

$$\mathcal{P}_0 = p_{PC} \times 4\pi \frac{D_E^2}{4} = p_S \times 4\pi \frac{d_{ST}^2}{4} \Rightarrow p_{PC} = p_S \times \frac{d_{ST}^2}{D_E^2}$$

Avec p_{PC} la puissance surfacique de *Proxima Centauri* à la surface terrestre et $p_S = 600 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ la puissance surfacique du Soleil à la surface de la

Terre.

— Flux de photons entrant dans la lunette

En multipliant par la section d'entrée de la lunette, on en déduit la puissance électromagnétique qui entre dans la lunette ; il suffit alors de prendre en compte l'énergie moyenne d'un photon $h\nu = hc/\lambda$ pour en déduire le flux de photons :

$$\phi = p_S \times \frac{d_{ST}^2}{D_E^2} \times \pi \frac{D_1^2}{4} \times \frac{\lambda}{hc}$$

— On considère alors la durée d'exposition et le rendement quantique pour un déduire le nombre d'électrons :

$$N = Q_E \times \phi \times T \Rightarrow N = p_S \times \frac{d_{ST}^2}{D_E^2} \times \pi \frac{D_1^2}{4} \times \frac{\lambda}{hc} \times Q_E \times T$$

$$N = 600 \times \left(\frac{1,5 \times 10^{11}}{3,99 \times 10^{16}} \right)^2 \times \frac{\pi \times (0,50)^2}{4} \times \frac{6,0 \times 10^{-7}}{6,626 \times 10^{-34} \times 3,00 \times 10^8} \times 0,30 \times 12 \times 60$$

$$N = 1,1 \times 10^{12} \text{ électrons} \text{ et donc pour la charge, en valeur absolue, } |Q| = Ne = 1,7 \times 10^{-7} \text{ C}.$$

Q21. L'ouverture de la lunette de rayon D_1 génère une diffraction dont le demi-angle vaut, en ordre de grandeur :

$$\theta_{\text{dif.}} \approx \frac{\lambda}{D_1} = \frac{6 \times 10^{-7}}{5 \times 10^{-1}} \Rightarrow \theta_{\text{dif.}} \approx 10^{-6} \text{ rad}$$

Cette angle étant supérieur à l'angle α sous lequel est vue l'étoile, il est gênant pour la résolution.

Q22. Le satellite Hipparcos tournant au voisinage de la Terre, on peut à l'échelle de la distance Terre-Soleil confondre sa position avec celle de la Terre.

Dans la limite des « petits angles » : $P_E \approx \frac{O_1 O_2}{SE} = \frac{2d_{TS}}{SE}$, il vient :

$$SE = \frac{2d_{TS}}{P_E}$$

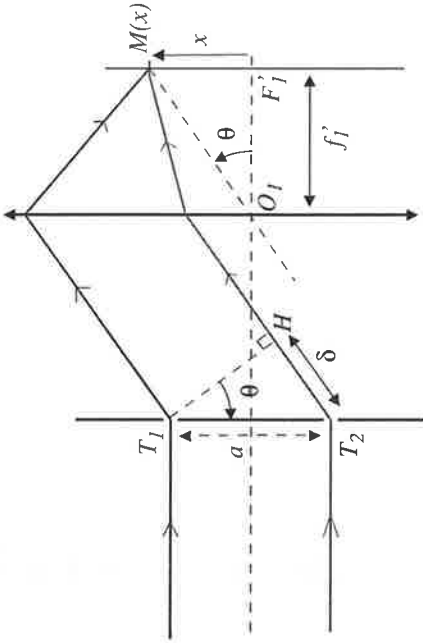
$$\text{A.N. : } SE = \frac{2 \times 1,50 \times 10^8}{1545 \times 10^{-3} \times \frac{1}{3600} \times \frac{\pi}{180}} \Rightarrow SE = 4,00 \times 10^{13} \text{ km}$$

L'énoncé propose une valeur $D_E = 3,99 \times 10^{13} \text{ km}$, les résultats sont cohérents, la question suivante permet de proposer une explication de l'écart relatif de l'ordre

de 0,2%.

Q23. La distance entre le Soleil et la Terre varie au cours de l'année car la Terre parcourt une ellipse d'excentricité 0,017 et non un cercle.

Q24. Les rayons qui convergent en M point du plan focal image sont nécessairement issus de rayons incidents parallèles entre eux, on les obtient en traçant le rayon d'appui qui passe par le centre optique de la lentille et par M .



La source étant à l'infini sur l'axe, la différence de marche est nulle au niveau des trous d'Young. Par retour inverse de la lumière, on a nécessairement $(T_1 M) = (H M)$, au final :

$$\delta_S(x) = (SM)_2 - (SM)_1 \Rightarrow \delta_S(x) = T_2 H$$

Q25. Dans la limite des petits angles, $\delta_S(x) \approx a\theta$ et $\theta \approx x/f'_1$, il vient pour la différence de marche $\delta_S(x) = ax/f'_1$. Par définition de l'ordre d'interférence :

$$p_S(M) = \frac{\delta_S(x)}{\lambda} \Rightarrow p_S(M) = \frac{ax}{\lambda f'_1}$$

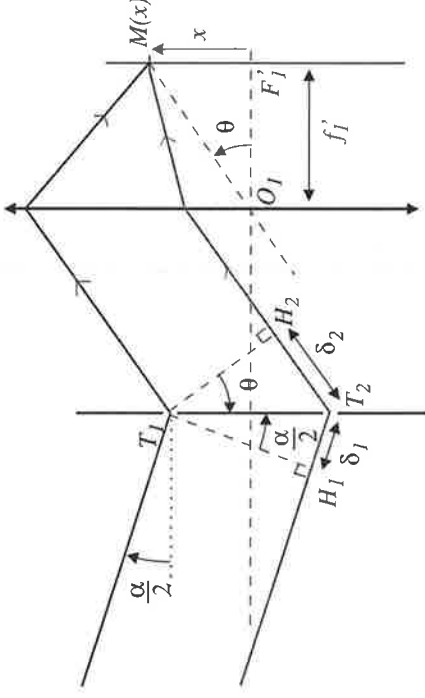
Q26. Un ordre d'interférence fixé est associé à un x fixé, la figure d'interférences correspond à des **franges d'interférences** avec une frange claire au centre $x = 0$.

Q27. Pour une interférence à deux ondes de même amplitude :

$$I(x) = I_0 \times \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi ax}{\lambda f'_1} \right) \right]$$

Q28. Les rayons interférant au même point M , le déphasage est le même en aval des trous d'Young. Il faut ajouter le déphasage en amont du fait d'un angle α non

nul (l'angle à considérer est $\alpha/2$ car α est associé au diamètre).



Q29. Pour la nouvelle différence de marche : $\delta_{S'}(x) = \frac{a\alpha}{2} + \frac{ax}{f'_1}$ et l'ordre d'interférence :

$$p_{S'}(M) = \frac{a\alpha}{2\lambda} + \frac{ax}{\lambda f'_1}$$

Q30. Les deux sources étant incohérentes, on somme les intensités des deux figures d'interférences. Les ordres d'interférence différent de $\frac{a\alpha}{2\lambda}$, il y aura brouillage quand cette différence vaudra une valeur demi-entière, les deux systèmes de frange seront alors décalés de telle façon que les franges brillantes d'un système correspondent aux franges sombres de l'autre système et le contraste s'annulera. La première valeur de a vérifiant cette condition est :

$$\frac{a_{\min}\alpha}{2\lambda} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a_{\min} = \frac{\lambda}{\alpha}$$

$$\text{Q31. A.N. : } a_{\min} = \frac{6,00 \times 10^{-7}}{1,02 \times 10^{-3} \times (1/3600) \times (\pi/180)} \Rightarrow a_{\min} = 121 \text{ m}$$

Cette distance paraît très significative mais elle est réalisable en utilisant deux télescopes mobiles (cas du VLT).

Q32. On peut appliquer le raisonnement en associant deux à deux les points de l'étoile comme indiqué sur le schéma suivant, pour chacun des couples il y a brouillage pour $a_{\min}$.

$$\begin{array}{c} S'_0 \\ S'_2 \\ S'_1 \\ S_0 \\ S_2 \\ S_1 \end{array}$$

Q33. Dans le vide, le champ électrique vérifie l'équation de d'Alembert :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}.$$

En reportant l'expression proposée pour le champ électrique dans l'équation de d'Alembert, on en déduit $\underline{k} = \omega/c$, caractérisant une **propagation non dispersive**, la vitesse de phase $v_\varphi = \frac{\omega}{k} = c$ est indépendante de la fréquence.

Q34. Pour une onde électromagnétique **plane progressive harmonique** se propageant dans le vide dans le sens des x croissants :

$$\underline{\vec{B}}(x, t) = \frac{\vec{u}_x}{c} \wedge \underline{\vec{E}}(x, t) \Rightarrow \underline{\vec{B}}(x, t) = \frac{\underline{E}_0}{c} \exp(j[\omega t - kx]) \vec{u}_z$$

$$\text{Q35. } \langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re} \left(\underline{\vec{E}}(x, t) \wedge \underline{\vec{B}}^*(x, t) \right) \Rightarrow \langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{|\underline{E}_0|^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_x$$

Remarque : une autre méthode consiste à exprimer les grandeurs réelles des champs électrique et magnétique, de déterminer alors le vecteur de Poynting et de prendre enfin la moyenne temporelle de cette expression.

Q36. Comparons les ordres de grandeur des deux termes du même de droite de l'équation :

$$r = \frac{\left| \mu_0 \gamma \frac{\partial \underline{\vec{E}}_t}{\partial t} \right|}{\left| \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}_t}{\partial t^2} \right|} \propto \frac{\mu_0 \gamma \omega}{\mu_0 \varepsilon_0 \omega^2} = \frac{\gamma}{\varepsilon_0 \omega} = \frac{\gamma}{\varepsilon_0 \times 2\pi f} = \frac{\gamma \times \lambda}{\varepsilon_0 \times 2\pi c}$$

Considérons une onde de lumière rouge $\lambda \approx 6 \times 10^{-7}$ m, c'est à dire :

$$r = \frac{4,5 \times 10^7 \times 6 \times 10^{-7}}{8,85 \times 10^{-12} \times 2\pi \times 3 \times 10^8} \Rightarrow r \approx 1,6 \times 10^3$$

La longueur d'onde augmente dans l'infrarouge et le rapport est encore plus important, on peut donc négliger le terme associé à la dérivée seconde :

$$\Delta \underline{\vec{E}}_t \approx \mu_0 \gamma \frac{\partial \underline{\vec{E}}_t}{\partial t}$$

Q37. En reportant l'expression proposée pour le champ électrique transmis dans l'équation de diffusion, on en déduit :

$$-\underline{k}_m^2 = \mu_0 \gamma \times j\omega \Leftrightarrow \underline{k}_m^2 = -j\mu_0 \gamma \omega = \mu_0 \gamma \omega e^{-j\pi/2}$$

$$\text{Il vient } \underline{k}_m = \pm \sqrt{\mu_0 \gamma \omega} e^{-j\pi/4} = \pm \sqrt{\mu_0 \gamma \omega} \times \frac{1-j}{\sqrt{2}} = \pm \sqrt{\frac{\mu_0 \gamma \omega}{2}} (1-j).$$

La solution avec le signe - serait associée à une propagation vers les $x < 0$, non pertinente ici. On retient donc :

$$\underline{k}_m = \frac{1-j}{\delta} \text{ avec } \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$$

On reporte alors dans l'expression du champ électrique :

$$\forall x > 0, \forall t, \underline{\vec{E}}_t(x, t) = \underline{E}_0 \exp \left(j \left(\omega t - \frac{x}{\delta} \right) \right) \exp \left(-\frac{x}{\delta} \right) \vec{u}_y$$

Le champ électrique s'atténue sur une distance caractéristique δ du fait de la dissipation par effet Joule, il s'agit de **l'épaisseur de peau**. C'est la longueur caractéristique sur laquelle le champ se propage au sein du métal.

Q38. Commençons par déterminer la valeur de δ :

$$\delta = \sqrt{\frac{2\lambda}{\mu_0 \gamma \times 2\pi c}} = \sqrt{\frac{2 \times 6 \times 10^{-7}}{4\pi \times 10^{-7} \times 4,5 \times 10^7 \times 2\pi \times 3 \times 10^8}}$$

C'est à dire $\delta \approx 3 \times 10^{-9}$ m. En pratique, une épaisseur $e = 5\delta$ est suffisante pour considérer une atténuation quasi-totale du champ et un milieu semi-infini. De ce point de vue, **une voile d'une épaisseur de quelques dizaines de nanomètre est suffisante.**

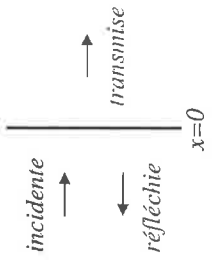
On peut toutefois s'interroger sur la résistance d'une voile solaire aussi fine qui devra être déployée dans l'espace, considérons alors plutôt une épaisseur $e \approx 1 \mu\text{m}$ et pour la masse :

$$m = \rho S e = 19,3 \times 10^3 \times 100 \times 10^{-6} \Rightarrow m \approx 2 \text{ kg}$$

Q39. Notons tout d'abord que ce n'est pas la moyenne de la norme du vecteur de Poynting qui est représentée mais cette grandeur divisée par la norme du vecteur de Poynting de l'onde incidente.

Considérons alors une situation idéalisée pour laquelle l'énergie incidente se par-

tage en deux au niveau d'une interface infiniment fine et non absorbante.



À l'interface la puissance surfacique incidente se partage entre une puissance surfacique réfléchie et une puissance transmise :

$$\left\langle \|\vec{\Pi}_i\| \right\rangle_{x=0^-} = \left\langle \|\vec{\Pi}_r\| \right\rangle_{x=0^-} + \left\langle \|\vec{\Pi}_t\| \right\rangle_{x=0^+}$$

En divisant par la norme du vecteur de Poynting incident et en appelant R le coefficient de réflexion en énergie et T le coefficient de transmission en énergie, il vient :

$$1 = R + T \Leftrightarrow T = 1 - R$$

Il y a donc une proportion $1 - R$ de l'énergie qui est transmise et on retrouve en amont de l'interface, le faisceau incident et le faisceau réfléchi pour une énergie représentant une proportion $1 + R$ de l'énergie incidente.

Les **oscillations en amont** sont associées aux **interférences des ondes incidente et réfléchie** créant des zones où le vecteur de Poynting résultant est plus ou moins intense.

Notons toutefois que le document ne semble pas tenir compte de l'absorption au sein du métal réel ainsi que de la seconde interface métal-vide.

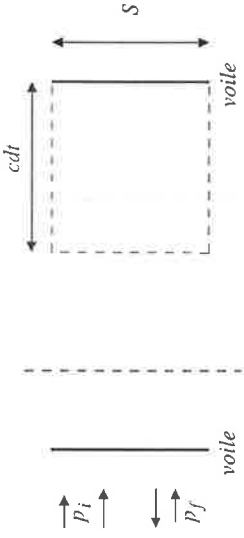
Q40. Pour simplifier on supposera que les photons ont tous la même longueur d'onde moyenne λ . Dans un premier temps, on se place dans un modèle de voile parfaitement réfléchissante et la démarche est alors la suivante :

- déterminer l'action de la voile sur un photon ;
- en déduire, l'action d'un ensemble de photons sur la voile ;
- relier le flux de photons au vecteur de Poynting.

Considérons une durée arbitraire dt pendant laquelle un photon vient frapper la voile ; le photon, de longueur d'onde moyenne λ se réfléchit de manière élastique, un bilan de quantité de mouvement conduit à :

$$\vec{F}_{\text{voile} \rightarrow \text{photon}} dt = \vec{p}_f - \vec{p}_i = -\frac{h}{\lambda} \vec{u}_x - \left(\frac{h}{\lambda} \vec{u}_x \right) = -\frac{2h}{\lambda} \vec{u}_x$$

C'est à dire pour l'action du photon sur la voile : $\vec{F}_{\text{photon} \rightarrow \text{voile}} = \frac{2h}{\lambda} \frac{\vec{u}_x}{dt}$



Pendant cet intervalle de temps dt , il y a δN photons qui viennent frapper la voile, pour une force résultante :

$$\vec{F}_{\text{flux} \rightarrow \text{voile}} = \frac{2h}{\lambda} \frac{\delta N}{dt} \vec{u}_x$$

Il reste maintenant à relier le flux de photons au vecteur de Poynting. En multipliant le débit de photons $\delta N/dt$ par l'énergie d'un photon, on obtient la puissance du faisceau qui est le produit de la norme de la moyenne du vecteur de Poynting par la surface du faisceau :

$$\frac{\delta N}{dt} \times h\nu = \Pi \times S \Leftrightarrow \frac{\delta N}{dt} = \frac{\Pi \times S}{h\nu}$$

Il vient alors :

$$\vec{F}_{\text{flux} \rightarrow \text{voile}} = \frac{2\Pi S}{\lambda\nu} \vec{u}_x \Rightarrow \vec{F}_{\text{flux} \rightarrow \text{voile}} = 2 \frac{\Pi}{c} S \vec{u}_x$$

Le facteur 2 est lié au fait qu'il y a un double effet de pression de radiation, pour les photons qui viennent frapper la voile et ceux qui repartent. Si la voile n'est pas parfaitement réfléchissante et que seule une proportion de puissance R est réfléchie (les autres photons étant absorbés dans le métal), il faut remplacer 2Π par $(1 + R)\Pi$ (car $(1 - R) + 2 \times R = 1 + R$) et finalement :

$$\vec{F}_{\text{flux} \rightarrow \text{voile}} = (1 + R) \frac{\Pi}{c} S \vec{u}_x$$

A.N. (avec $R = 1$) :

$$\|\vec{F}_{\text{flux} \rightarrow \text{voile}}\| = \frac{2 \times 10^3 \times 100}{3 \times 10^8} \Rightarrow \|\vec{F}_{\text{flux} \rightarrow \text{voile}}\| \approx 10^{-3} \text{ N}$$

L'effet paraît très limité, la force correspondant au poids d'un objet de 0,1 g générant une accélération très modeste. Cependant, contrairement à des boosters, **cet effet perdure sur la durée** et permet par accumulation d'affecter significativement le mouvement de l'objet.

Q41. En partant de la définition du centre de masse :

$$\vec{0} = M_E \vec{GE} + M_P \vec{GP} = M_E (\vec{GP} + \vec{PE}) + M_P \vec{GP}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{GP} = \frac{M_E}{M_E + M_P} \vec{EP}}$$

Étude des cas limites :

- pour $M_E \gg M_P$: $\vec{GP} = \vec{EP}$, toute la masse se concentre au niveau de l'étoile, le centre de masse et l'étoile se confondent, c'est par exemple une très bonne approximation dans le cas du système Soleil-Terre ;
- pour $M_E = M_P$: $\vec{GP} = \vec{EP}/2$, le centre de masse est au milieu du segment joignant l'étoile et la planète.

Q42. Le système planète-étoile est un système isolé. Le centre de masse est donc en mouvement de translation uniforme et le référentiel d'étude ayant pour centre, le centre de masse G et trois directions pointant vers des étoiles lointaines fixes constitue bien un référentiel galiléen.

On applique alors, dans ce référentiel, le principe fondamental de la dynamique à la planète soumise à l'action de l'étoile :

$$M_P \frac{d^2 \vec{GP}}{dt^2} = -G \frac{M_E M_P}{EP^3} \vec{EP}$$

C'est à dire compte tenu de la relation obtenue à la question précédente :

$$\frac{M_P M_E}{M_E + M_P} \frac{d^2 \vec{EP}}{dt^2} = -G \frac{M_E M_P}{EP^3} \vec{EP} \Leftrightarrow \boxed{\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{G(M_E + M_P)}{r^2} \vec{u}_r}$$

$\vec{r} = \vec{EP}$

Q43. Pour un mouvement circulaire et uniforme à la vitesse v :

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{a} = a_r \vec{u}_r = -\frac{v^2}{r} \vec{u}_r = -\frac{G(M_E + M_P)}{r^2} \vec{u}_r$$

Avec $v = \frac{2\pi r}{T}$, on en déduit :

$$\frac{4\pi^2 r^2}{T^2} \times \frac{1}{r} = \frac{G(M_E + M_P)}{r^2} \Leftrightarrow \boxed{\frac{r^3}{T^2} = \frac{G(M_E + M_P)}{4\pi^2}}$$

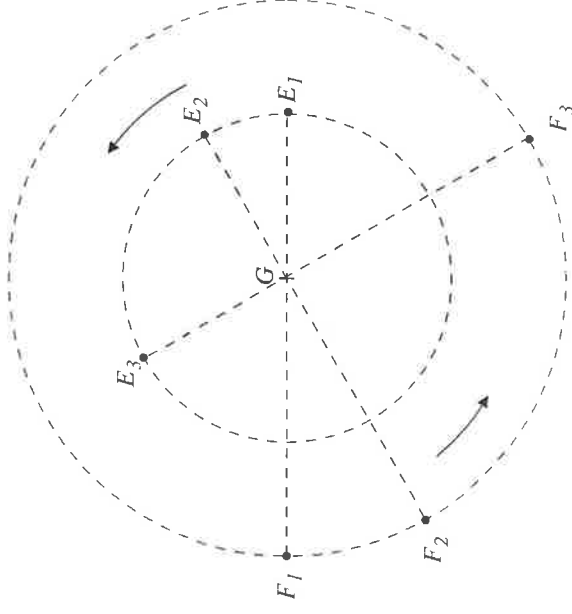
Cette loi porte le nom de **troisième loi de Kepler**. Il s'agit de la version généralisée dans le cas de figure où les deux objets ont des masses comparables et où l'on ne peut plus considérer l'étoile comme fixe. Pour $M_P \ll M_E$, on retrouve la formulation simplifiée bien connue.

Q44. Repartons de la définition du centre de masse :

$$M_P \vec{GP} + M_E \vec{GE} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{GP} = -\frac{M_E \vec{GE}}{M_P}$$

Il vient alors :

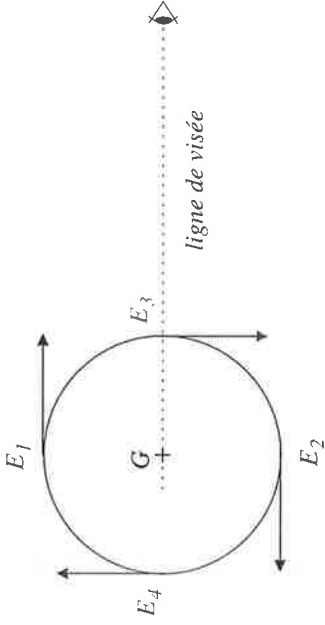
$$\vec{r} = \vec{EP} = \vec{EG} + \vec{GP} = \vec{EG} \times \left(1 + \frac{M_E}{M_P}\right) \Leftrightarrow \boxed{\vec{GE} = -\frac{M_P}{M_P + M_E} \vec{r}}$$



L'étoile a donc par rapport au centre de masse un mouvement homothétique à celui du point F , c'est à dire un **mouvement circulaire de même période** mais de rayon $\frac{M_P}{M_P + M_E} r$ et donc pour la vitesse de l'étoile :

$$v_E = \frac{2\pi G E}{T} \Rightarrow \boxed{v_E = \frac{2\pi r}{T} \times \frac{M_P}{M_P + M_E}}$$

Q45. Considérons tout d'abord la situation où l'étoile est en E_1 (Cf. figure page suivante) pour laquelle sa vitesse est dirigée en totalité selon la direction de la ligne de visée. L'étoile se déplaçant vers la Terre, la fréquence observée est supérieure à la fréquence d'émission.



$$\frac{f_{\text{obs}} - f_{\text{em}}}{f_{\text{em}}} = \frac{V_{E1}}{c} = \frac{1}{c} \times \frac{2\pi r}{T} \times \frac{M_P}{M_P + M_E}$$

Par ailleurs le rayon de la trajectoire vérifie la troisième loi de Kepler « généralisée » : $r = \left(\frac{G(M_P + M_E)T^2}{4\pi^2} \right)^{1/3}$. En reportant cette expression dans la formule de l'effet Doppler, il vient :

$$\frac{f_{\text{obs}} - f_{\text{em}}}{f_{\text{em}}} = \frac{1}{c} \times \frac{M_P}{(M_P + M_E)^{2/3}} \times \left(\frac{2\pi G}{T} \right)^{1/3}$$

Dans la situation E_2 , l'étoile s'éloigne et on observe un décalage opposé vers le rouge. Finalement, pour les valeurs extrêmes de la variation relative de fréquence :

$$\frac{f_{\text{obs}} - f_{\text{em}}}{f_{\text{em}}} = \pm \frac{1}{c} \times \frac{M_P}{(M_P + M_E)^{2/3}} \times \left(\frac{2\pi G}{T} \right)^{1/3}$$

Au cours de la trajectoire circulaire, la variation relative de fréquence varie entre ces deux valeurs extrêmes en s'annulant en particulier pour les positions E_3 et E_4 de l'étoile.

La formule obtenue sur ce cas simplifié se déduit de la formule de l'énoncé en posant :

— $e = 0$ (mouvement circulaire) ;

— $i = \pi/2$, la Terre étant supposée dans le plan de la trajectoire de l'étoile autour du centre de masse, la ligne de visée et la normale au plan de la trajectoire sont perpendiculaires.

La formule de l'énoncé ne fournit que le décalage extrême lorsque l'étoile s'éloigne ce qui n'est pas tout à fait explicite dans l'énoncé.

Q46. On constate que la vitesse de l'étoile autour du centre de masse au cours du temps suit une loi sinusoïdale d'amplitude $V_E \approx 6,5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ et de période

$T \approx 68/6 \text{ jours}$ (environ 6 périodes entre le jour 20 et le jour 88).

La dérive observée peut certainement s'expliquer par des mouvements annexes non pris en compte comme par exemple le déplacement de la Terre autour du Soleil.

D'après la question Q45, la vitesse de l'étoile autour du centre de masse est donnée par :

$$V_E = \frac{M_P}{(M_P + M_E)^{2/3}} \times \left(\frac{2\pi G}{T} \right)^{1/3} \approx \frac{M_P}{M_E^{2/3}} \times \left(\frac{2\pi G}{T} \right)^{1/3}$$

L'énoncé évoque une planète de masse égale à 1,3 fois la masse de la Terre, il semble donc raisonnable de négliger la masse de la planète vis à vis de la masse de l'étoile ce qui donne la formule approchée dérivée ci-dessus. On en déduit :

$$M_P = V_E M_E^{2/3} \times \left(\frac{T}{2\pi G} \right)^{1/3}$$

$$\text{A.N. : } M_P = \frac{6,5}{3,6} \times (2,44 \times 10^{29})^{2/3} \times \left(\frac{68 \times 24 \times 3600}{6 \times 2 \times \pi \times 6,67 \times 10^{-11}} \right)^{1/3}$$

$$M_P = 9,4 \times 10^{24} \text{ kg.}$$

Le résultat obtenu correspond à environ 1,5 fois la masse de la Terre, résultat cohérent avec l'énoncé si on considère une détermination assez grossière de l'amplitude des vitesses et des simplifications opérées sur e et i .

I. Champ gravitationnel et champ de pesanteur

(A)

Q1 $\oint \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi G M_{int}$

Q2 symétries ... + cours $\Rightarrow \vec{g} = -\frac{GM_T}{(R_T+z)^2} \vec{u}_r$

(B)

Q3 $\|\vec{g}\| = \frac{GM_T}{(R_T+z)^2} \approx \frac{GM_T}{R_T^2} \left(1 - \frac{2z}{R_T}\right)$ (DL à l'ordre 1)

Q4 variation de 1% $\Rightarrow \frac{2z}{R_T} = 10^{-2} \Rightarrow z = 31,3 \text{ km}$

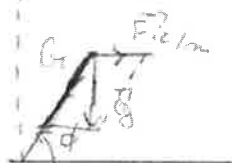
Q5 $\frac{\partial g_T}{\partial z} = -\frac{2GM_T}{R_T^3}$ permet de savoir comment varie g_T lorsque z varie ...

Q6 $\frac{\partial g_T}{\partial z} = 3,08 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-2} = 3,08 \mu\text{gal.cm}^{-1}$

(C) Q7

$$\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e = m\omega^2 R_T \cos\phi \vec{u}$$

Q8 $\vec{P} = m\vec{g} = m\vec{g}_T + m\omega^2 R_T \cos\phi \vec{u} \Rightarrow \vec{g} = -g_T(z)\vec{u}_z + \omega^2 R_T \cos\phi \vec{u}$



(le dessin n'est pas à l'échelle !)

Q9 Il faut calculer $\frac{\omega^2 R_T}{g_T(0)} = \frac{\omega^2 R_T^3}{GM_T} \approx 3,45 \cdot 10^{-3} \ll 1$

$$(\omega = \frac{2\pi}{86164} = 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}) \text{ la correction est faible.}$$

II Méthodes de mesure par pendule

(A)

L'eq du mouvement est $\theta'' + \frac{g}{l} \sin\theta = 0$

donc la période des petites oscillations est

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \text{ dépend de } g \dots$$

Q11

on peut s'imaginer que l'altitude varie, mais la fourchette est roche. On a surtout la latitude qui varie.

$$\ln T = \ln(2\pi\sqrt{l}) - \frac{1}{2} \ln g \Rightarrow \frac{\Delta T}{T} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta g}{g}$$

$$\Rightarrow \frac{g_{\text{Geyserne}} - g_{\text{Paris}}}{g_{\text{Paris}}} = -2 \cdot \frac{T_{\text{Geyserne}} - T_{\text{Paris}}}{T_{\text{Paris}}} = -2 \times \frac{148}{86400}$$

$$= -3,43 \cdot 10^{-3}$$

$$\Rightarrow g_{\text{Geyserne}} = 9,776 \text{ m.s}^{-2}$$

Q12 $\Delta g = 1 \mu g$, $g = 9.81 \text{ ms}^{-2} = 981 \text{ gal}$
 $\Rightarrow \left| \frac{\Delta T}{T} \right| = \frac{1}{2} \frac{\Delta g}{g} = 5 \cdot 10^{-10}$ soit $5 \cdot 10^{-8} \%$... invraisemblable!

Q13 $\textcircled{B}$ équilibre d'un ressort usuel: $l = l_0 + \frac{mg}{k} \Rightarrow \Delta l = \frac{m}{k} \cdot \Delta g$
 avec $\omega^2 = \frac{k}{m} \approx \frac{4\pi^2}{T^2} \approx 4\pi^2$ si on prend $T \approx 1 \text{ s}$.
 d'où $\Delta l = \frac{\Delta g}{4\pi^2} = 2.5 \cdot 10^{-10} \text{ m}$: non mesurable!

Q14 Aucun intérêt car Δl_{sp} ne dépend pas de l_0 ...

III Gravimétrie à fléau de Lacoste et Romberg

Q15 un changement de $\vec{g}$ modifie θ , car le moment des poids varie. Grâce à y , on peut choisir $\theta = 0$ au départ, et mesurer des petites variations de θ .

Q16 $E_p = -mga \sin \theta + \frac{1}{2} k (s - s_0)^2$

Q17 avec $s^2 = (y + b \sin \theta)^2 + l^2 \cos^2 \theta = y^2 + b^2 + 2yb \sin \theta$

Q18 $\Gamma = - \frac{\partial E_p}{\partial \theta} = + mga \cos \theta - k(s - s_0) \cdot \frac{\partial s}{\partial \theta}$

avec $\frac{\partial s}{\partial \theta} = \frac{1}{2} \frac{2yb \cos \theta}{\sqrt{y^2 + b^2 + 2yb \sin \theta}}$

$\Gamma = \cos \theta \left[mga - \frac{k y b (s - s_0)}{\sqrt{y^2 + b^2 + 2yb \sin \theta}} \right]$
 $= \cos \theta \left[mga + \frac{k y b s_0}{\sqrt{y^2 + b^2 + 2yb \sin \theta}} - k y b \right] \quad \text{CQFD.}$

Q19 Avec $s_0 = 0$ Γ devient $\Gamma = \cos \theta [mga - k y b]$

$\Gamma = 0 \Rightarrow g = \frac{k y b}{m a}$

On fait varier y de sorte que le ressort reste à la position initiale. Il suffit alors de mesurer y ...

Si $s_0 \neq 0$ on peut encore ajuster y pour annuler Γ mais il faudrait mesurer s et s_0 ... peu pratique, beaucoup d'écarts.

Q20 On aura une nouvelle expression de s :

$s^2 = (y \cos \phi + b \sin \theta)^2 + (y \sin \phi - b \cos \theta)^2$

$s = y^2 + b^2 + 2 y b \sin(\theta - \phi)$

(ou Ab. Kachi...)

$$\text{d'où } E_p = -mga \sin \theta + \frac{1}{2} k \left[(y^2 + b^2 + 2yb \sin(\theta - \varphi))^{1/2} - s_0 \right]^2 \quad (3)$$

Q21 L'équilibre est lorsque $\Gamma = 0$, donc à un extremum de $E_p(\theta)$. Avec $\varphi = 0$ on a un maximum $\Rightarrow$ instable avec $\varphi \neq 0$ minimum, stable.

Q22 $\Gamma' = \cos \theta mga + k(s - s_0) \times \frac{1}{2\Delta} \times 2yb \cos(\theta - \varphi)$ et $s_0 = 0$
(par hypothèse)

d'où $M' = mga \cos \theta - kyb \cos(\theta - \varphi)$

$$= (mga - kyb \cos \varphi) \cos \theta - kyb \sin \theta \sin \varphi \quad \text{CQFD}$$

Q23 le TMC / à l'axe de rotation donne (liaison parfaite):

$$J\ddot{\theta} = M'$$

A l'ordre 1 en θ $J\ddot{\theta} = (mga - kyb \cos \varphi) - kyb \sin \varphi \cdot \theta$

$$\ddot{\theta} + \frac{k y b \sin \varphi}{J} \theta = \frac{mga - k y b \cos \varphi}{J}$$

Q24 on pose $\omega^2 = \frac{k y b \sin \varphi}{J}$ = pulsation

et $\theta_0 = \theta_{\text{moy}} = \frac{mga - k y b \cos \varphi}{k y b \sin \varphi}$ la solution particulière

Q25 $\theta_0 = 0$ pour $g = g_0 \Rightarrow y = \frac{m g_0 a}{k b \cos \varphi}$

Alors $\omega^2 = \frac{m g_0 a \tan \varphi}{J} = \frac{4\pi^2}{T^2}$

on doit prendre $\tan \varphi = \frac{4\pi^2}{T^2} \frac{J}{m g_0 a} = \frac{4\pi^2}{T^2} \frac{a}{g_0}$

A.N $\tan \varphi = 9,9 \cdot 10^{-5}$ $\varphi = 9,9 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$: très petit !

Q26 $\theta_0' = \frac{mga - m g_0 a \cos \varphi}{m g_0 a \sin \varphi} = \frac{g - g_0 \cos \varphi}{g_0 \sin \varphi} = \frac{\Delta g}{g_0 \tan \varphi}$

comme $\tan \varphi$ est très petit, on a une grande "amplification" de la variation de g .

Q27 $\theta_0' = \frac{10^{-7}}{10} \frac{1}{9,9 \cdot 10^{-5}} = 10^{-4} \text{ rad}$

C'est faible, mais moins ridicule que les valeurs précédentes. Mesurable.

IV - Applications de la gravimétrie

Q28 on prend uniquement la boule de masse volumique μ' invariables, symétriques Gauss $\Rightarrow$ pour $r > R$

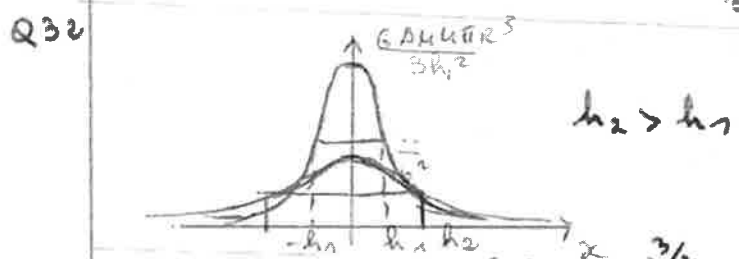
$$\vec{g}_{\text{boule}} = - G \mu' \frac{4\pi R^3}{3} \times \frac{1}{r^2} \vec{e}_r$$

Q29 $\vec{g}_{\text{boule}} \cdot \vec{u}_z = G \mu' \frac{4\pi R^3}{3 r^2} \cos \theta$ avec $\cos \theta = \frac{h}{r}$ $r = \sqrt{x^2 + h^2}$

Q30 loin de la boule, $\vec{g} = g_0 \vec{u}_z =$ due par le sol plein et homogène.
 On superpose les champs, si on avait $\mu' = \mu_m$ on aurait $\vec{g} = g_0 \vec{u}_z$. La différence est le champ due par une boule de masse volumique $\Delta \mu$

Q31 et $\Delta g = g_z - g_0 = G \Delta \mu \cdot \frac{4\pi R^3}{3} \frac{h}{(x^2 + h^2)^{3/2}}$

pour $x=0$ $\Delta g(0) = G \Delta \mu \frac{4\pi R^3}{3} \frac{1}{h^2} =$ anomalie maximale.



Q33 A mi hauteur $(x^2 + h^2)^{3/2} = 2 h^3 \Rightarrow x = h \sqrt{2^{2/3} - 1}$
 plus h est grand, plus l'anomalie est "faible" et fortement étalée.

Q34 on lit à mi hauteur $\Rightarrow \Delta g_{1/2} = 60 \text{ m.u.} \Rightarrow h = 48,3 \text{ m}$

Q35 Compenser avec une sphère "creuse" de même centre de sorte que les deux anomalies se compensent ("creuse" : $\Delta \mu$ ceux de signe opposé à $\Delta \mu_{\text{or}}$)

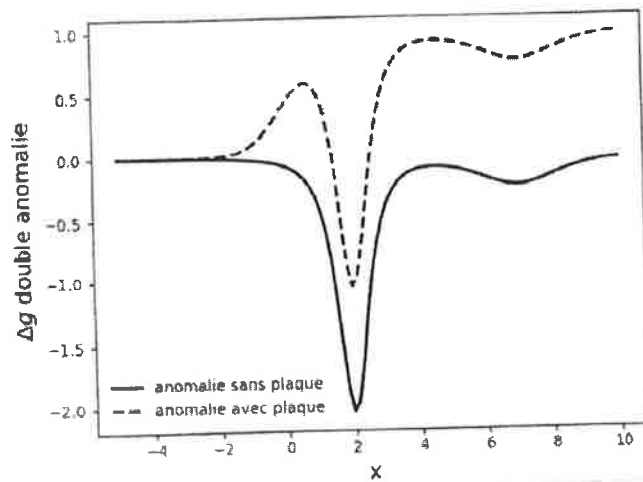
Q36

$$\mu_{\text{or}} R_{\text{or}}^3 - \mu_m R^3 = 0$$

$$R_{\text{cr}} = \left(\frac{\mu_m}{\mu_{\text{or}}} \right)^{1/3} R$$

avec $\mu = 2000 \text{ kg.m}^{-3} \Rightarrow R_{\text{cr}} = 0,47 \text{ m.}$

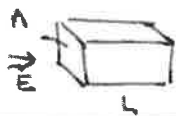
Q37 pour les grottes : $\Delta \mu = -\mu_m$ est négatif, et les hauteurs sont différentes.
 Il faut superposer l'effet de la plaque.



V. Prospection électrique des sols.

(A)

Q38



$$R = \rho \frac{L}{S}$$

Q39

courant alternatif pour ne pas accumuler de charges aux électrodes. Bonne fréquence pour laisser le régime transitoire s'établir et avoir une mesure $\approx$ en régime continu

Q40

Si on ne considère que l'électrode A, le courant se répartit de manière "isotrope" dans le sol.

$$\vec{j} = j(r) \vec{e}_r \quad \text{et} \quad I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} = 2\pi r^2 j(r)$$

(flux à travers la 1/2 sphère)



Q41

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \rho \cdot \frac{I}{2\pi r} \vec{e}_r$$

$$\vec{E} = -\text{grad} V \Rightarrow \frac{dV}{dr} = -\frac{\rho I}{2\pi r} \Rightarrow V_A = +\frac{\rho I}{2\pi} \frac{1}{r} \quad (V \rightarrow 0 \text{ as } r \rightarrow \infty)$$

Q.42

On superpose les 2 potentiels créés par A et B

$$\Rightarrow V = +\frac{\rho I}{2\pi} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

$\downarrow$ I $\downarrow$ -I

les équipotentielles vérifient $V(P) = \text{cte}$

Q43

$$V_M - V_N = \frac{\rho I}{2\pi} \left(-\frac{1}{r_{BM}} + \frac{1}{r_{AM}} + \frac{1}{r_{BN}} - \frac{1}{r_{AN}} \right)$$

on peut donc avoir ρ à partir de ΔV

Q.44

sur la configuration de Wenner

$$\Delta V = \frac{\rho I}{2\pi} \left(\frac{1}{2a} - \frac{1}{a} - \frac{1}{a} + \frac{1}{2a} \right) = +\frac{\rho I}{2\pi a}$$

donc $\rho = +\frac{2\pi \Delta V a}{I}$ et $f = \frac{1}{a}$

Q45

on a $2l = 10 \text{ m} \Rightarrow f = \frac{1}{l} = 0,3 \text{ m}^{-1}$

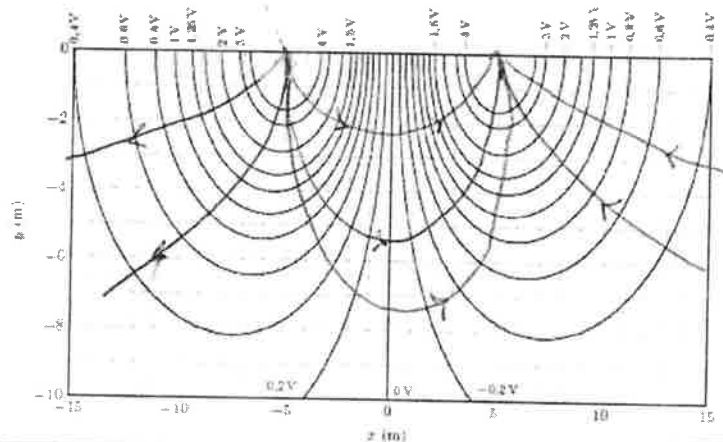
on peut lire $V(M)$ et $V(-M)$ en $\pm \frac{l}{2} = 1,67 \text{ m}$

$\Rightarrow \Delta V = 1,2 \times 2 = 2,4 \text{ V}$

D'où $f = \frac{2\pi \Delta V}{I \rho} = 0,30 \text{ m}^{-1}$ c'est bien cohérent.

Q46

les lignes de courant sont les lignes de champ de $\vec{E}$ et sont $\perp$ aux équipotentielles.



③ Modèle à 2 terrains

Q47

$AB \rightarrow 0 \quad \rho \rightarrow \rho_1$

$AB \rightarrow \infty \quad \rho \rightarrow \rho_2$

aucune des lignes de champ.

Q48

on peut lire avec les asymptotes $\rho_1 = 400 \text{ } \Omega \cdot \text{m}$
 $\rho_2 = 40 \text{ } \Omega \cdot \text{m}$

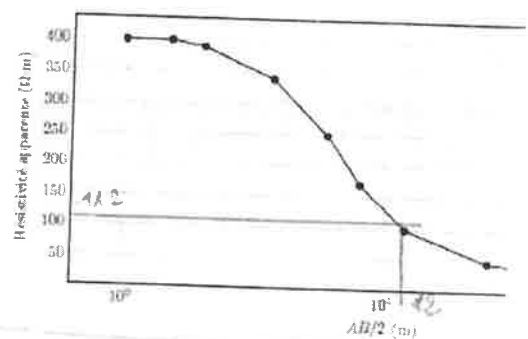
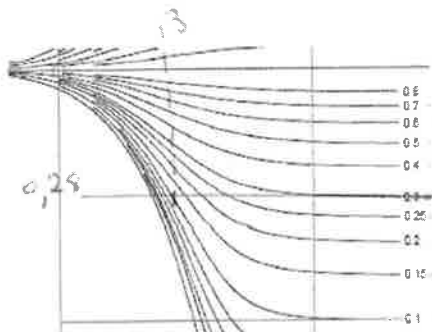
d'où $\frac{\rho_2}{\rho_1} = 0,1 \Rightarrow$ on lit sur cette courbe

on peut chercher quand on est entre ρ_a et ρ_1 ($\frac{\rho_a}{\rho_1} = 0,28$)

et on lit $\frac{AB}{2h_1} = 3 \Rightarrow \frac{AB}{2} = 3h_1$ pour $\frac{\rho_a}{\rho_1} = 0,28$ (fig 13)

sur la figure 13 la valeur $\rho_a = 0,28 \times 400$ est pour $\frac{AB}{2} \approx 12 \text{ m}$

$\Rightarrow h_1 = \frac{AB}{6} = 4 \text{ m}$



I - Température dans la couronne solaire

(A)

Q1 $E_p(z) = m g z$ (en $z=0$ $n=n_0 \dots$)
 on en déduit $H = \frac{k_B T}{m g}$

Q2 $m = \frac{m_p + m_e}{2} \approx m_p/2$

Q3 $\exp\left(-\frac{R_s}{H}\right) = 10^{-3} \Rightarrow H = \frac{R_s}{3 \ln 10} \approx 1,1 \cdot 10^8 \text{ m.}$

on peut alors évaluer $T = \frac{m g H}{k_B} = 1,7 \cdot 10^6 \text{ K}$

Q4. on utilise le th. de Gauss.

$\Rightarrow$ symétries + attention au signe

$\Rightarrow 4\pi r^2 g(r) = +4\pi G \cdot M_s = 4\pi R_s^2 g_s$

$\Rightarrow g(r) = g_s \frac{R_s^2}{r^2}$

Q5. pour un C.P., on a $P = n_2 k_B T$

on conserve l'hypothèse $T = \text{cte}$, mais cette fois g dépend de r .

$\frac{dP}{dr} = -m \cdot g_s \frac{R_s^2}{r^2} \cdot \frac{P}{k_B T}$ (car $p = m \cdot n$)

on intègre entre R_s et r , en séparant les variables:

$\ln\left(\frac{P(r)}{P(R_s)}\right) = \ln\left(\frac{n_2(r)}{n_2'(r)}\right) = + \frac{m g_s R_s^2}{k_B T} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_s}\right)$

Q6 on peut tracer

$y = \ln(n_2)$ en fonction de $x = \frac{R_s}{r}$ et vérifier que l'on a une droite : $\underbrace{\ln n_2}_y = \ln n_2' - \frac{m g_s R_s}{k_B T} + \frac{m g_s R_s}{k_B T} x \frac{R_s}{r}$

on utilise le tableau de la calculatrice, et on

trouve une droite de pente 10,38

c'est cohérent -

On peut encore estimer T :

$T = \frac{m g_s R_s}{k_B \times 10,38} = 1,1 \cdot 10^6 \text{ K}$

(2)

(B)

Q.7 il faut $h\nu = \frac{hc}{\lambda} > E_1 \Rightarrow \lambda < \frac{hc}{E_1} = 7,7 \cdot 10^{-9} \text{ m}$
 ce sont des rayons X.

Q8 $\langle E_c \rangle = \frac{3}{2} k_B T$ (théorème d'équipartition de l'énergie)

Q9 formule valable pour l'ion et l'électron

il faut donc $3k_B T > E_1 \quad T > \frac{E_1}{3k_B} = 1,3 \cdot 10^6 \text{ K}$

Q.10 on considère que le plus émissif correspond à la fraction maximale la plus élevée

soit pour Fe XII : $\log T_{\text{max}} = 6,2 \quad T = 1,6 \cdot 10^6 \text{ K}$

Fe XV : $\log T_{\text{max}} = 6,35 \quad T = 2,2 \cdot 10^6 \text{ K}$

sur les images, Fe XV semble plus "brillant",
 donc la fraction maximale de Fe XV doit être supérieure
 à celle de Fe XII $\rightarrow T_1 = 10^{6,49} = 1,3 \cdot 10^6 \text{ K}$

Q.11. prendre diverses longueurs d'onde permet
 d'explorer des gammes plus larges de température

Q.12 l'hydrogène est totalement ionisé à ces températures.

(C)

Q.13 il s'agit de l'effet Doppler.

$$Q.14 (\nu - \nu_0)^2 = \left(\frac{\nu_0}{c}\right)^2 (\vec{v} \cdot \vec{u})^2 \Rightarrow \Delta\nu = \frac{\nu_0}{c} \sqrt{\langle \vec{v} \cdot \vec{u} \rangle^2}$$

$$Q.15 \langle v^2 \rangle = \frac{2}{m_{Fe}} \langle E_c \rangle = \frac{3k_B T}{m_{Fe}}$$

$$Q.16 \vec{v} \cdot \vec{u} = v_x \text{ par exemple} \dots \langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle \text{ car isotrope}$$

$$\Rightarrow \langle (\vec{v} \cdot \vec{u})^2 \rangle = \frac{k_B T}{m_{Fe}}$$

$$Q.17 \text{ D'où } \Delta\nu = \frac{\nu_0}{c} \sqrt{\frac{k_B T}{m_{Fe}}}$$

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \Rightarrow \frac{d\lambda}{\lambda} = - \frac{d\nu}{\nu} \Rightarrow \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\Delta\nu}{\nu_0} = \left(\frac{k_B T}{c^2 m_{Fe}} \right)^{1/2} = \left(\frac{RT}{c^2 M_{Fe}} \right)^{1/2}$$

$$Q.18 \text{ raie verte de Fe XIV : } T = \frac{c^2 m_{Fe}}{k_B} \left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \right)^2$$

$$= \frac{c^2 M_{Fe}}{R} \left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \right)^2 = 1,9 \cdot 10^6 \text{ K}$$

Q.19 Fe XIV max à $\log T = 6,3 \rightarrow T = 2 \cdot 10^6 \text{ K}$ cohérent.

II - Densité volumique d'électrons dans la colonne (3)

(A)

Q20 $\vec{B} = \vec{k} \frac{1}{c} \vec{E}$; $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$; $\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$; $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$

Q20 $\vec{\pi} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} = \epsilon_0 c E^2 \vec{u}_z$

Q22 $I = \langle \vec{\pi} \cdot \vec{u}_z \rangle = \epsilon_0 c \langle E^2 \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 c \overset{\text{amplitude}}{E_0^2}$

(B)

Q23 $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$ le terme en $\vec{v} \wedge \vec{B}$ est négligeable devant $\vec{E}$ si $\frac{v}{c} \ll 1$

avec $\langle v^2 \rangle = 3 \frac{k_B T}{m_e} \approx v_{qm} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} \approx 8,2 \cdot 10^6 \text{ m.s}^{-1}$

$\frac{v_{qm}}{c} \approx 2,7 \cdot 10^{-2} \ll 1$ l'approximation est valide.

Q24 il faut que l'amplitude du mot de l'électron soit faible devant la longueur d'onde de l'onde e.m.

Avec une hypothèse harmonique:

amplitude $\approx \frac{v}{\omega} \approx \frac{v}{2\pi\nu} \approx \frac{v}{2\pi c} \lambda$ $\frac{v}{2\pi c} \ll 1$ OK.

Q25 $S = \frac{\langle P \rangle}{I} \leftarrow W$ S est en m^2 .

$S = \frac{e^2 \langle a^2 \rangle}{6\pi \epsilon_0 c^3 I}$ avec par ailleurs le P.F.D sur l'él. $\Rightarrow m_e \cdot a_0 = e \cdot E_0$ et $\langle a^2 \rangle = \frac{a_0^2}{2}$

$\Rightarrow S = \frac{1}{2} \frac{e^4 E_0^2}{6\pi \epsilon_0 c^3 m_e^2} \times \frac{2}{E_0 c E_0^2} = \frac{e^4}{6\pi \epsilon_0^2 c^4 m_e^2}$

A.N $S = 6,6 \cdot 10^{-23} \text{ m}^2$ ouf!

(C)

Q26 on fait un bilan de puissance sur le volume grisé:

$S I(z+dz) - S I(z) + \underbrace{m_e(z) \times S \times dz \times S \cdot I(z)}_{\text{sort sur les côtés}}$

d'où l'eq. diff $\frac{dI}{dz} = - m_e(z) \cdot I(z) S$

$\Rightarrow \ln \frac{I(z)}{I(0)} = - S \int_0^z m_e(z) dz$ en séparant les variables.

$I(z) = I(0) \exp(-SN)$

Q27 $I(z) = I(0) (1 - SN) \Rightarrow f = - \left(\frac{I(z) - I(0)}{I(0)} \right) = +SN$

Q29 $N = \bar{n}_e \times 0,6 R_s$ d'où $\bar{n}_e = \frac{1}{0,6 R_s} = 3,6 \cdot 10^{13} \text{ m}^{-3}$
(soit $3,6 \cdot 10^7 \text{ cm}^{-3}$)

4

III Rayonnement radio de la couronne solaire

(A) Q29 cf cours $\rightarrow$ notation complexe à définir...

Q30 Equations de Maxwell
 $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \vec{\nabla}_\perp \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \vec{\nabla}_\perp \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$

$\vec{j} = -n_e e \vec{v}$ et $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e \vec{E}$

Avec une notation en esq ($i(\omega t - k_z z)$) $\Rightarrow \vec{v} = \frac{-e \vec{E}}{m i \omega}$

et $\vec{j} = \frac{n_e e^2}{m i \omega} \vec{E}$

$\vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \quad \vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \quad \vec{k}_\perp \vec{E} = \omega \vec{B} \quad -i \vec{k}_\perp \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \omega \vec{E} \right)$

soit $-i \vec{k}_\perp \left(\frac{\vec{k}_\perp \vec{E}}{\omega} \right) = \mu_0 \left(\frac{n_e e^2}{m i \omega} + i \epsilon_0 \omega \right) \vec{E}$

$i \frac{k^2}{\omega} \vec{E} = \mu_0 \left(\frac{n_e e^2}{m \omega} + i \epsilon_0 \omega \right) \vec{E}$

soit $k^2 = \frac{1}{c^2} \omega^2 \left(1 - \frac{1}{c^2} \times \frac{n_e e^2}{m \epsilon_0} \right) \quad k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$

Q31 il y aura propagation si $k^2 > 0$ soit $\omega > \omega_p$
 si $\omega < \omega_p$, on aura une onde évanescente.

(B) Q32 $\rho = [n_0 - n_e(x, t)] e$

Q33 $\vec{j} = -n_e(x, t) e \vec{v}_e + 0$

conservation de la charge: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0$

$\Rightarrow -e \frac{\partial n_e}{\partial t} + (-e) \frac{\partial}{\partial x} (n_e v_e) = 0 \Rightarrow \frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (n_e v_e) = 0 \quad (1)$

Q34 $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{e}{\epsilon_0} (n_e - n_0) \quad (2)$

Q35 P.F.D: $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e \vec{E} \Rightarrow m \frac{\partial v}{\partial t} = m \frac{dv}{dt} = -e E \quad (3)$

Q36 Avec les notations complexes:

(2) $\Rightarrow -i k E_0 = -\frac{e}{\epsilon_0} N$ (3) $\Rightarrow i m \omega V = -e E_0$

En revanche il faut lineariser (1)

(5)

$$n_e \cdot v_e \approx n_0 \cdot v_e$$

$$(1) \text{ devient } i\omega N - ik m_0 V = 0 \Rightarrow N = \frac{k}{\omega} m_0 V$$

$$\text{d'où } E_0 = \frac{e}{ik\epsilon_0} N = \frac{e}{i\omega\epsilon_0} m_0 V = -\frac{e^2 m_0}{\omega^2 m \epsilon_0} E_0$$

donc soit $E_0 = 0$

$$\text{soit } \omega^2 = \frac{n_e e^2}{m \epsilon_0} = \omega_p^2$$

$$Q37 \quad f_p = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{n_e e^2}{m \epsilon_0}} = 9,0 \cdot 10^7 \text{ Hz} \approx 90 \text{ MHz}$$

Q38 ce rayonnement traverse l'espace interplanétaire; pour traverser l'atm. terrestre il faut être au delà de la fréquence plasma de la ionosphère. Cette fréquence est de l'ordre de la modulation de fréquence qui permet de communiquer avec des satellites (radio, TV...) donc le ray! traverse l'atmosphère.

$$Q39 \quad \left. \begin{array}{l} f_{p1} = 120 \text{ MHz} \\ f_{p2} = 75 \text{ MHz} \end{array} \right\} \text{ on calcule } n_1 \text{ et } n_2 \text{ puis } r_1 \text{ et } r_2 :$$

$$n_i = \frac{4\pi^2 f_{pi}^2 m \epsilon_0}{e^2} = N_1 \exp\left(\frac{e R S}{n_i}\right)$$

$$\Rightarrow r_i = \frac{e R S}{\ln\left(\frac{4\pi^2 f_{pi}^2 m \epsilon_0}{e^2 N_1}\right)} = \frac{6,96 \cdot 10^3}{\ln(f_{pi}^2 \times 3,1 \cdot 10^{-13})} \Rightarrow \begin{array}{l} r_1 = 8,28 \cdot 10^8 \text{ m} \\ r_2 = 9,32 \cdot 10^8 \text{ m} \end{array}$$

$$v \approx \frac{r_2 - r_1}{\Delta t} \approx 1,0 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1} : \text{ les particules sont relativistes}$$

IV - Prolongement de la couronne dans l'espace 1...

Q40 $\lambda_0 = 3 \cdot 10^3 \text{ W K}^{-1} \text{ m}^{-1}$ à comparer à ≈ 100 pour un métal c'est donc un bon conducteur.

Q41 loi de Fourier $\vec{J} = -\lambda \text{ grad } T$

Q42 on se place en régime permanent $\Rightarrow$ conservation du flux : $4\pi r^2 j(r) = v_{te} = \phi$
 $-4\pi \lambda r^2 \frac{dT}{dr} = \phi$

$$\lambda(T) \frac{dT}{dr} = -\frac{\phi}{4\pi} \frac{1}{r^2} \Rightarrow \lambda_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^{5/2} dT = -\frac{\phi}{4\pi} \frac{dr}{r^2}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{7} \lambda_0 \frac{1}{T_0^{5/2}} \left[T^{7/2} - T_0^{7/2} \right] = + \frac{\phi}{4\pi} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)$$

soit encore: $T(r) = T_0 \left(1 + \underbrace{\frac{\phi}{\frac{2}{7} \lambda_0 T_0}}_K \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \right)^{2/7}$ 16

Q43 si $r \rightarrow +\infty$ $\frac{T(r)}{T_0} \rightarrow 0$ donc $1 - \frac{K}{r_0} = 0$

et finalement $T(r) = T_0 \cdot \left(\frac{r_0}{r} \right)^{2/7}$

Q44 $T(r_p) \approx T_0 \left(\frac{1,2}{9,6} \right)^{2/7} \approx 0,55 \cdot T_0 \approx 5,5 \cdot 10^5 \text{ K}$
le bouclier thermique n'est pas suffisant!

Q45 on utilise la 3^e loi de Kepler
 $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\lambda_T^3}$ avec $a = \frac{r_p + r_a}{2} = 0,388 \text{ u.a.}$
 $T = 1 \text{ an} \times (0,388)^{3/2} = 0,24 \text{ an} = 88 \text{ jours.}$

Q46 conservation de l'énergie:
 $E = -\frac{GM_S m}{r_a + r_p} = \frac{1}{2} m v_p^2 - \frac{GM_S m}{r_p} \Rightarrow v_p = \left(\frac{GM_S}{r_p} \frac{r_a}{r_a + r_p} \right)^{1/2}$
A.N: $v_p = 4,3 \cdot 10^4 \text{ m s}^{-1}$

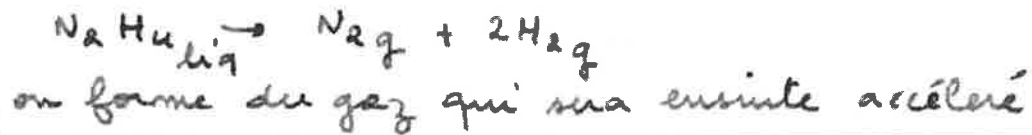
Q47 $r_a = \frac{r}{1-e}$ $r_p = \frac{r}{1+e} \Rightarrow \frac{1+e}{1-e} = \frac{r_a}{r_p} \Rightarrow e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p} = 0,88$
et on en déduit $r = r_p (1+e) = \frac{2r_a r_p}{r_a + r_p} = 8,65 \cdot 10^{-2} \text{ u.a.}$
 $= 1,29 \cdot 10^{10} \text{ m}$

Q48 θ va varier entre $-\theta_{10}$ et $+\theta_{10}$ avec $r_{10} = \frac{r}{1+e \cos \theta_{10}}$
 $\Rightarrow \theta_{10} = \arccos \left(\frac{1}{e} \left(\frac{r}{r_0} - 1 \right) \right) = 0,24 \text{ rad}$
La loi des aires donne $r^2 \dot{\theta} = v_p r_p$; ici $r \approx r_p \approx r_{10}$
 $\Rightarrow \dot{\theta} \approx \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{v_p}{r_p}$ (on approxime l'ellipse à un cercle de rayon r_p)
 $\Rightarrow \Delta t = \frac{r_p}{v_p} \cdot 2\theta_{10} = 4,6 \cdot 10^4 \text{ s} \approx 21 \text{ h.}$

I Correction de l'épreuve

(A)

Q49



Q50

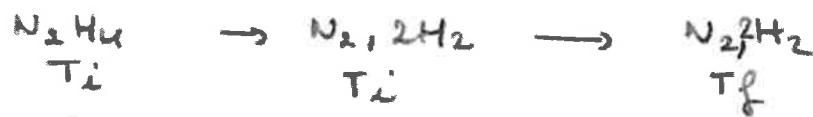
le catalyseur modifie le mécanisme cinétique. Il n'est pas consommé et n'intervient pas dans l'équation bilan.

Q51

$$\Delta_r H = -\Delta H_f^\circ(\text{N}_2\text{H}_4) < 0 \text{ la réaction est donc exoth.}$$

Q52

schéma fictif:



$\Delta H = Q = 0$ car adiabatique moudre

$$\Delta H = -\Delta H_f^\circ(T_i) + (2c_{p\text{H}_2} + c_{p\text{N}_2})(T_f - T_i) = 0$$

$$\Rightarrow T_f - T_i = \frac{\Delta H_f^\circ(T_i)}{2c_{p\text{H}_2} + c_{p\text{N}_2}} = 584 \text{ K}$$

Q53

$c_{p\text{O}_2}, c_{p\text{H}_2}, \Delta H_f^\circ$ sont en réalité fonction de T.
l'hypothèse adiabatique est forte

(B)

Q54

NH_3 en excès déplace l'équilibre vers la droite
($\Pi \searrow \Delta_r G = RT \ln \frac{\Pi}{K} \searrow$)

Q55

$x = [\text{NH}_2\text{d}]$. Avec une réaction d'ordre 1:

$$v = k x [\text{NH}_3] \approx k' x \text{ car } [\text{NH}_3] \text{ est } \approx \text{constant}$$

$$\frac{dx}{dt} = -k' x \Rightarrow \ln x = \ln x_0 - k' t$$

on trace $\ln x$ en fonction de t à la calculatrice
on obtient une droite de pente $-7,15 \cdot 10^{-3} \text{ min}^{-1} \rightarrow \text{VALIDE}$

t	0	10	20	30	40	50	60
$\ln x$	-6,21	-6,29	-6,36	-6,43	-6,57	-6,72	-6,86

Q56

$$k' = +6,21 \text{ s}^{-1} \text{ donc } k = 7,15 \cdot 10^{-3} \text{ min}^{-1} \text{ mol}^{-1} \text{ L.}$$

Q57 on refait l'expérience à une température différente puis $\frac{k_1}{k_2} = \exp \left[\frac{E_a}{R} \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) \right]$

Q58 le temps $t_{1/2}$ vérifie $x = \frac{x_0}{2} \Rightarrow e^{-k' t_{1/2}} = \frac{1}{2}$

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{k_{app}} = \frac{\ln 2}{k \cdot [NH_3]}$$

$$\text{et } k(100) = k(27,3) \times \exp \left(\frac{E_a}{R} \left(\frac{1}{300,45} - \frac{1}{403,15} \right) \right)$$

$$= 13,54 \text{ L mol}^{-1} \text{ min}^{-1}$$

$$t_{1/2} = 1,7 \cdot 10^{-3} \text{ min} = 0,1 \text{ s.}$$

Q59 si $[OH^-] \uparrow$ $pH \uparrow$ $k_2 10^{pH} \uparrow$ la vitesse globale $\uparrow$
c'est donc possible.

(C)

Q60 on trace l'absorbance au max. d'absorption

Q61 figure 8 droite : vérification de la loi de Beer Lambert

$$A = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{coefficient} \\ \text{d'extinction molaire} \\ \text{L} \cdot \text{mol}^{-1} \text{ cm}^{-1}}}{\epsilon} \times \underset{\substack{\downarrow \\ \text{longueur ave (cm)}}}{l} \times \underset{\substack{\downarrow \\ \text{conc en azine (mol} \cdot \text{L}^{-1})}}{c}$$

Q62 A la pipette on prélève 1 mL de solution à diluer, on la met dans une fiole jaugée de 100 mL et on complète avec de l'eau distillée jusqu'au trait

Q63 les 20' permettent d'attendre que la réaction soit faite.

$$Q64 \quad S_0 = \frac{S_{pure}}{2 \cdot 10^5} \quad \text{et} \quad S_{pure} = \frac{\epsilon}{M} = \frac{d \cdot \rho_{eau}}{M} = 3,14 \cdot 10^4 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$= 31,4 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

→ en théorie

par la mesure:

$$A_1 = 0,9 \Rightarrow C = 15,5 \mu\text{mol} \cdot \text{L}^{-1} \quad (\text{lu sur la droite})$$

$\Rightarrow$

(calculé avec l'eq.)

$$\text{Or } C = \frac{5}{50} \times S_0 \quad (5 \text{ mL dans } 50 \text{ mL de fiole jaugée})$$

$$\Rightarrow S_0 = 10 C \quad S_{pure} = 2 \cdot 10^6 \times C = 31 \mu\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

les deux valeurs sont proches.

I - généralités

A - le 4^{ème} dipôle

$$1) \quad \boxed{1} \quad u = R i \quad \boxed{2} \quad q = C u \quad \boxed{3} \quad \phi = L i$$

$\downarrow$
R

$\downarrow$
F

$\downarrow$
H

$$2) \quad \boxed{4} \quad i = \frac{dq}{dt}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \Rightarrow \iint \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint \rho \cdot d\vec{S}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell}}_{\text{en convention générateur}} = -\frac{d\phi}{dt}$$

donc en convention récepteur $u = \frac{d\phi}{dt}$ (relation $\boxed{5}$)

3) en écriture différentielle

$$\boxed{1} \quad dq = C du \quad \boxed{2} \quad du = R di \quad \boxed{3} \quad d\phi = L di$$

$$\boxed{4} \quad dq = i dt \quad \boxed{5} \quad d\phi = u dt$$

4) relation supplémentaire $d\phi = M dq \Leftrightarrow \frac{u}{i} dq$ (avec 4 et 5)
 $\Rightarrow M$ est en Ω , comme une résistance

5) en série : traversés par le même i : donc même dq

$$\Rightarrow d\phi_1 = M_1 dq \quad d\phi_2 = M_2 dq$$

$$d\phi_1 + d\phi_2 = (M_1 + M_2) dq$$

$$d\phi_{\text{tot}} = M_{\text{tot}} dq \quad \text{les } M \text{ s'ajoutent}$$

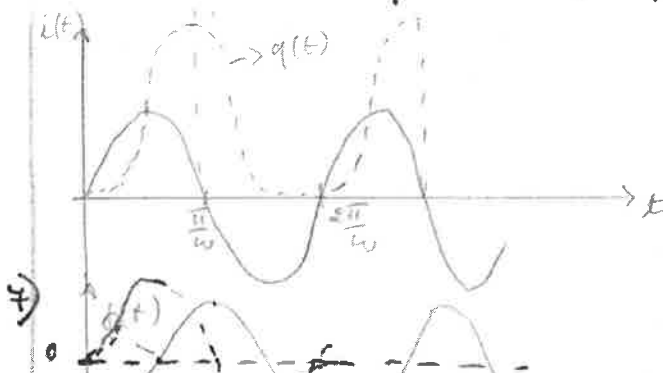
en parallèle : on peut supposer que le u est le même, donc $d\phi = u dt$ aussi.

$$dq = dq_1 + dq_2 = \left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}\right) d\phi \rightarrow \text{les } \frac{1}{M} \text{ s'ajoutent}$$

$$6) \quad i(t) = i_0 \sin \omega t$$

$$\frac{dq}{dt} = i \Rightarrow q(t) = -\frac{i_0}{\omega} \cos \omega t + \text{cte}$$

$$\text{avec } q(0) = 0 \Rightarrow q(t) = \frac{i_0}{\omega} (1 - \cos \omega t)$$



$$u = \frac{d\phi}{dt} : \text{ nul aux extrema de } \phi$$

$$16) \quad P = q \vec{E}_0 \cdot \vec{v} \Rightarrow P_v = n \cdot P_i = n q \vec{v} \cdot \vec{E}_0 = \vec{j}_0 \cdot \vec{E}_0 \quad (3)$$

$$17) \quad \text{Sur le conducteur total: } p = P_v \cdot \pi a^2 l = \underbrace{(j \cdot \pi a^2)}_i \times \underbrace{E_0 l}_u$$

on retrouve bien $p = u \cdot i$

$$18) \quad \text{pour un memristor } u = M i \quad (M = M_1 \text{ ou } M_2)$$

$$\Rightarrow p = M i^2$$

II - le memristor des HP Labs

$$19) \quad R_{\text{mem}_0} = R_{\text{on}} \frac{z_0}{l} + R_{\text{off}} \left(\frac{l - z_0}{l} \right) \quad (\text{résistances en série, proportionnelles à la longueur})$$

$$20) \quad \vec{v} = \mu \vec{E}_0 \text{ devient } \vec{v} \leftrightarrow \frac{dz}{dt}$$

$$E_0 \leftrightarrow \frac{U}{l} \leftrightarrow \frac{R_{\text{on}} i}{l}$$

$$21) \quad \frac{dz}{dt} = \mu \frac{R_{\text{on}}}{l} \cdot \frac{dq}{dt} \Rightarrow z(t) - z_0 = \mu \frac{R_{\text{on}}}{l} q(t) \quad (\text{on intègre entre } t=0 \text{ et } t)$$

- état le plus conducteur possible $\Rightarrow z = l$

- cas le plus défavorable: $z_0 = 0$

$$\text{donc } R_{\text{min}} = \frac{l^2}{\mu R_{\text{on}}}$$

$$22) \quad R_{\text{mem}} = R_{\text{off}} + \frac{z}{l} (R_{\text{on}} - R_{\text{off}})$$

$$R_{\text{mem}_0} = R_{\text{off}} + \frac{z_0}{l} (R_{\text{on}} - R_{\text{off}})$$

$$\Rightarrow R_{\text{mem}} = R_{\text{mem}_0} + \frac{z(t) - z_0}{l} (R_{\text{on}} - R_{\text{off}})$$

$$= R_{\text{mem}_0} + \mu \frac{R_{\text{on}}}{l^2} (R_{\text{on}} - R_{\text{off}}) q(t)$$

$$\Rightarrow M(q) = R_{\text{mem}_0} + (R_{\text{on}} - R_{\text{off}}) \frac{q(t)}{Q_{\text{min}}}$$

Plus l est petit, plus Q_{min} est petit, donc on pourra passer plus vite de R_{off} à $R_{\text{on}} \rightarrow$ temps de réponse plus faible...

$$23) \quad i(t) = i_0 \sin \omega t \Rightarrow q(t) = \frac{i_0}{\omega} (1 - \cos \omega t) \quad (\text{déjà vu})$$

$$u(t) = M(q) \cdot i(t) = R_{\text{off}} \left(1 - \frac{i_0}{\omega Q_{\text{min}}} (1 - \cos \omega t) \right) i_0 \sin \omega t$$

$$\uparrow$$

$$R_{\text{mem}_0} = R_{\text{off}} \text{ et } R_{\text{on}} - R_{\text{off}} = R_{\text{off}}$$

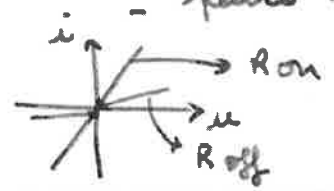
$$u(t) = R_{\text{off}} i_0 \sin(\omega t) \left[1 - \frac{i_0}{\omega Q_{\text{min}}} (1 - \cos \omega t) \right]$$

24

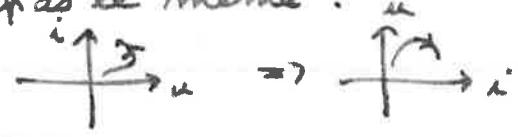
on a $i = f(u)$ au lieu de $u = f(i)$.

L'allure est ressemblante :

- zone de transition plus étendue
- pente différente pour $u < 0$ et $u > 0$ pour R_{off}



- le sens de parcours n'est pas le même ?



III

Une falaise de potentiel

25

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + V(x) \psi(x) = E \psi(x) \quad \left(i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = E \cdot \psi \right)$$

26

Dans le milieu 1 : $V(x) = 0 \Rightarrow \psi_1(x) = A e^{ik_1 x} + B e^{-ik_1 x}$
avec $k_1 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$

Dans le milieu 2 : $V(x) = -V_0$

$$\psi_2(x) = A' e^{ik_2 x} \quad \left(\text{pas de propagation depuis } +\infty \right)$$

avec $k_2 = \sqrt{\frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}}$

27

$$B = rA ; A' = tA$$

ψ et $\psi'(x)$ sont continues en $x=0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} A(1+r) &= A t \\ A k_1(1-r) &= A k_2 t \end{aligned}$$

$$\Rightarrow t = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}$$

$$r = \frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1}$$

28

$$\begin{aligned} \vec{J}_{in} &= |\psi_1|^2 \frac{\hbar k_1}{m} \\ &= |A|^2 \frac{\hbar k_1}{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{J}_{ref} &= |B|^2 \frac{\hbar k_1}{m} \\ &= |A|^2 r^2 \frac{\hbar k_1}{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{J}_t &= |A'|^2 \frac{\hbar k_2}{m} \\ &= t^2 |A|^2 \frac{\hbar k_2}{m} \end{aligned}$$

$$R = \frac{\|\vec{J}_{ref}\|}{\|\vec{J}_{inc}\|} = r^2$$

$$T = \frac{\|\vec{J}_t\|}{\|\vec{J}_{inc}\|} = t^2 \frac{k_2}{k_1} = \frac{4 k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2}$$

$$R = \left(\frac{\sqrt{E} - \sqrt{E+V_0}}{\sqrt{E} + \sqrt{E+V_0}} \right)^2 = \left(\frac{1 - \sqrt{1+d}}{1 + \sqrt{1+d}} \right)^2 \text{ avec } d = \frac{V_0}{E}$$

$$T = \frac{4 \sqrt{E} \sqrt{E+V_0}}{(\sqrt{E} + \sqrt{E+V_0})^2} = \frac{4 \sqrt{1+d}}{(1 + \sqrt{1+d})^2}$$

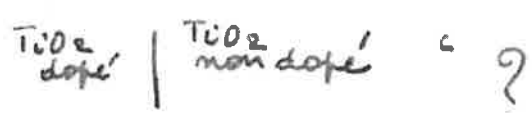
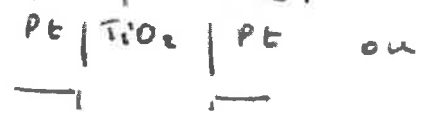
symétrique si on échange (1) et (2).

avec $d = 8$: $R = 0,25$; $T = 0,75$
plus d est grand : $R \rightarrow 1$, $T \rightarrow 0$

le sens de parcours importe peu.

29

texte pas clair :



I - Détermination expérimentale de la conductivité du Cu.

1. Pour avoir la plus grande précision, ou la meilleure résolution, il faut se placer sur le plus petit calibre, soit 500Ω .

On aura une incertitude élargie $\Delta R = \frac{0,3}{100} \times 0,1 + 3 \times 0,1$

$$\Delta R \approx 0,3 \Omega \approx 3R.$$

Ce n'est pas acceptable!

2. le montage 1 (longue dérivation) donne

$$\frac{V_1}{I_1} = R_1 = R + R_A \Rightarrow \varepsilon_1 = \frac{R_A}{R} \quad \varepsilon_1 \searrow \text{si } R \nearrow$$

le montage 2 (courte dérivation) donne $\frac{V_2}{I_2} = \frac{R R_V}{R + R_V}$

$$\varepsilon_2 = \left(R - \frac{R R_V}{R + R_V} \right) \frac{1}{R} = \frac{R}{R + R_V} \quad \varepsilon_2 \nearrow \text{si } R \nearrow \quad \left(\frac{1}{\varepsilon_2} = 1 + \frac{R_V}{R} \right)$$

donc pour les grandes résistances, le montage 1 convient
et pour les petites résistances le montage 2 convient

3. $R_x = \frac{287,5 \cdot 10^{-3}}{5,23} = 5 \cdot 10^{-2} \Omega$

L'erreur systématique est $\frac{0,05}{0,05 + 11 \cdot 10^6} = 5 \cdot 10^{-9}$ très faible (relative)

Il reste l'erreur sur U et sur I

$$\Delta U = \frac{0,3}{100} \times 287,5 + 2 \times 0,1 \text{ (mV)} = 0,8 \text{ mV} \quad \frac{\Delta U}{U} = \frac{0,8}{287,5}$$

$$\Delta I = \frac{1}{100} \times 5,23 + 3 \times 0,01 \text{ (A)} = 0,08 \text{ A} \quad \frac{\Delta I}{I} = \frac{0,08}{5,23}$$

La propagation des incertitudes, donne

$$\frac{\Delta R}{R} = \sqrt{\left(\frac{\Delta U}{U} \right)^2 + \left(\frac{\Delta I}{I} \right)^2} \approx \frac{\Delta I}{I} \quad \text{car } \frac{\Delta I}{I} \gg \frac{\Delta U}{U}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta R}{R} = \frac{8}{5,23} \quad \Delta R = \frac{8}{5,23} \times 5 \cdot 10^{-2} = 8 \cdot 10^{-4} \Omega$$

donc $R = 5 \cdot 10^{-2} \pm 10^{-3} \Omega$ (on n'a donné qu'un chiffre significatif à R : cet arrondi écarte l'incertitude!! 😊)

La précision est clairement meilleure.

4. On sait que $R = \frac{1}{\gamma} \frac{L}{S} \Rightarrow \gamma = \frac{L}{R \cdot S} = \frac{10}{0,05 \times \pi \times 10^{-3} \times 2}$

$$\gamma = \frac{10^7}{0,05 \pi} \approx \frac{20}{\pi} 10^7 \approx 6 \cdot 10^7 \text{ Sm}^{-1}$$

II Relation entre conductivités thermique et électrique ²

5) PFD sur $1 e^-$, le poids étant négligé :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{m}{\tau} \vec{v} + \vec{f}_c$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = \frac{\vec{f}_c}{m}$$

τ est le "temps de réponse" de l' e^- au champ $\vec{E}, \vec{B}$

En régime permanent, au bout de quelques τ ,

$$\vec{v} = \frac{\tau}{m} \vec{f}_c = \frac{\tau}{m} (-e) \vec{B}$$

$$\vec{j} = -ne\vec{v} = \frac{ne^2\tau}{m} \vec{E} \Rightarrow \boxed{\gamma = \frac{ne^2\tau}{m}}$$

6) Entre 2 collisions, $\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{f}_c$ (seule force réellement appliquée)

si il n'y a pas de choc pendant dt :

$$m\vec{v}_i(t+dt) = \vec{p}_i(t) + \vec{f}_c dt ; \text{ si il y a choc : on repart à } \vec{p}_i^{+0}$$

$$\vec{p}_i(t+dt) = \underbrace{\left(1 - \frac{dt}{\theta}\right)}_{\text{probab de non choc}} \times \left(\vec{p}_i(t) + \underbrace{\vec{f}_c dt}_m\right) + \underbrace{\frac{dt}{\theta}}_{\text{probab de choc}} \vec{p}_i^{+0}$$

7) En moyennant $\vec{p}(t+dt) = \left(1 - \frac{dt}{\theta}\right) (\vec{p}(t) + \frac{\vec{f}_c dt}{m}) + \frac{dt}{\theta} \vec{p}_i^{+0}$

$$\Rightarrow \frac{\vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t)}{dt} = \frac{\vec{f}_c(t)}{m} \left(1 - \frac{dt}{\theta}\right) + \frac{1}{\theta} (\vec{p}^{+0} - \vec{p}(t))$$

or en moyenne la direction de $\vec{p}_i^{+0}$ est aléatoire

$$\text{donc } \vec{p}^{+0} = \sum_i \vec{p}_i^{+0} = \vec{0}$$

Par passage à la limite :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{\vec{p}}{\theta} = \frac{\vec{f}_c(t)}{m} \Rightarrow \boxed{\theta = \tau}$$

8) pour qu'il n'y ait pas de choc entre 0 et $t+dt$ il faut qu'il n'y ait pas de choc de 0 à $t - \pi(t)$
 { qu'il n'y ait pas de choc entre t et $t+dt$:

$$1 - \frac{dt}{\theta}$$

$$\Rightarrow \pi(t+dt) = \pi(t) \times \left(1 - \frac{dt}{\theta}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d\pi}{dt} = -\frac{\pi}{\theta} \Rightarrow \boxed{\pi(t) = A e^{-t/\theta}}$$

A est un facteur de normalisation :

3

$$\pi(t) \times \frac{dt}{\theta} = \text{probab que le choc soit entre } t \text{ et } t+dt$$

On doit avoir $\int_0^{\infty} \pi(t) \frac{dt}{\theta} = 1 \Rightarrow A \int_0^{\infty} \frac{1}{\theta} e^{-t/\theta} dt = 1$

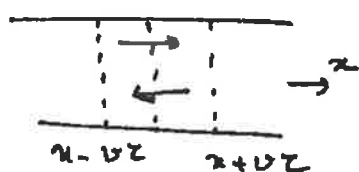
$$A \times \frac{1}{\theta} \times [-\theta e^{-t/\theta}]_0^{\infty} = 1 \Rightarrow A = 1$$

le temps moyen entre 2 collisions est

$$\begin{aligned} \langle t_{\text{moy}} \rangle &= \int_0^{\infty} t \pi(t) \frac{dt}{\theta} = \frac{1}{\theta} \int_0^{\infty} t e^{-t/\theta} dt \\ &= \frac{1}{\theta} \left([-t \theta e^{-t/\theta}]_0^{\infty} + \theta \int_0^{\infty} e^{-t/\theta} dt \right) \\ &= \frac{1}{\theta} \times (0 + \theta \times \theta) \Rightarrow \langle t_{\text{moy}} \rangle = \theta \end{aligned}$$

$\tau = \theta$ peut être interprété comme le temps moyen entre 2 chocs.

9)



on fait une bilan algébrique de l'énergie qui traverse une section à l'abscisse x , pendant dt

dans le sens $\rightarrow$: $\frac{1}{2} \times n \times (v dt) \times E_c(x-vz)$

dans le sens $\leftarrow$: $\frac{1}{2} n (v dt) E_c(x+vz)$

Lors d'un choc E_c varie : on considère donc que les électrons qui traversent, proviennent d'une zone telle qu'ils n'ont pas changé leur E_c , en moyenne.

finalement $j_0 = \frac{1}{2} n v (E_c(x-vz) - E_c(x+vz))$

10

$$E_c(x-vz) - E_c(x+vz) \approx -2vz \frac{dE_c}{dx} \quad \text{si } vz \ll L^*$$

L^* = longueur caractéristique des variations de E_c .

Alors $j_0 = \frac{1}{2} n \cdot v \times (-2vz \times \frac{dE_c}{dx} \frac{dT}{dt})$

$$= - n v^2 z C_v \frac{dT}{dx} \quad \text{avec } C_v = \frac{dE_c}{dT}$$

on peut donc relier $u u'$ à la loi de Fourier

$$j_0 = - \lambda \frac{dT}{dx} \quad \text{avec } \lambda = n v^2 z C_v$$

- 11 Pour un CP unidimensionnel, le type d'équipartition de l'énergie donne $E_C(T) = -\frac{1}{2} k_B T$
 soit $C_V = \frac{1}{2} k_B$
 on obtient $\lambda = \frac{1}{2} n v^2 \epsilon k_B$
 et de plus v^2 représente la vitesse quadratique moyenne $E_C \approx \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow v^2 = \frac{k_B T}{m}$
 d'où $\lambda = \frac{n k_B^2 T}{2 m} \epsilon$

12 on a alors $\frac{\lambda}{\gamma T} = \frac{\cancel{n} k_B^2 T \epsilon}{2 \cancel{m} T} \times \frac{\cancel{m}}{\cancel{n} e^2} = \frac{k_B^2}{2 e^2}$
 $\frac{\lambda}{\gamma T}$ est donc une constante.

Dans le modèle tridimensionnel

* on peut considérer que la probabilité que les e^- aillent dans la bonne direction est de $\frac{1}{6}$

$$\left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \leftarrow \\ \downarrow \\ \rightarrow \end{array} \right)$$

* $C_V = \frac{3}{2} k_B$

* $v^2 = \frac{3 k_B T}{m}$ (mais $v_x^2 = \frac{k_B T}{m} \dots$ *)

Donc $\delta Q = \frac{1}{6} n v \times -2 v \epsilon \times \frac{3}{2} k_B \cdot \frac{dT}{dx} = -\frac{1}{2} n v^2 \epsilon k_B \frac{dT}{dx}$

puis $\lambda = \frac{1}{2} n \times \frac{3 k_B T}{m} \epsilon k_B = \frac{3}{2} \frac{n}{m} k_B^2 T \epsilon$

d'où $\frac{\lambda}{\gamma T} = \frac{3}{2} \left(\frac{k_B}{e} \right)^2 = K_{\text{class}}$

(* soit on met $\frac{1}{6}$ et v^2 ; soit on laisse $\frac{1}{2} (\leftarrow, \rightarrow)$ et v_x^2)

- 13 Dans le modèle quantique $K = \frac{1}{3} n v^2 \epsilon \times \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{k_B T}{m v_F^2} \right) k_B$
 avec $v = v_F$ (énoncé)

$\Rightarrow \lambda = \frac{\pi^2}{3} \frac{n}{m} \epsilon k_B^2 T \Rightarrow \frac{\lambda}{\gamma T} = \frac{\pi^2}{3} \frac{k_B^2}{e^2} = K_{\text{quant}}$

14 $\frac{K_{\text{class}}}{K_{\text{quant}}} = \frac{3}{\pi^2} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{2 \pi^2} \approx 0,5$

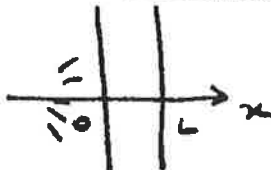
Les énergies des électrons sont entre 0 et E_F

le facteur de Boltzmann est en $\exp(-\frac{E}{k_B T})$

On ne peut pas considérer que l'on a un continuum d'énergie (qui serait si $E/k_B T \ll 1$) $\Rightarrow$ le modèle classique ne peut pas être bon.

III Détermination expérimentale du λ du Cu.

- 15 mesure de ρ : on mesure la masse d'un morceau de cuivre et son volume (en le plongeant dans l'eau par exemple - Puis $\rho = \frac{m}{v}$
 mesure de c_p : par une méthode calorimétrique.

16  cours ... $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Rightarrow D = \frac{\lambda}{\rho c}$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

17 $T(x, t) = f(x)g(t) \Rightarrow \frac{D f''(x)}{f(x)} = \frac{g'(t)}{g(t)} \quad \forall x, \forall t$
 donc $\frac{g'(t)}{g(t)} = -\frac{1}{\tau}$ (τ quelconque); le signe - vient du fait qu'on rejette $e^{+t/\tau}$!
 alors $f''(x) = -\left(\frac{1}{D\tau}\right) f(x) \Rightarrow$ solutions en $\begin{cases} \cos \frac{x}{\sqrt{D\tau}} \\ \sin \frac{x}{\sqrt{D\tau}} \end{cases}$
 Donc $T(x, t) = A \cos\left(\frac{x}{\sqrt{D\tau}} + \varphi\right) e^{-t/\tau}$
 (τ quelconque)

18: eq linéaire...
 La plaque est isolée $\Rightarrow \begin{cases} f(x=0, t) = 0 \\ f(x=L, t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial x}(L, t) = 0 \end{cases}$
 or $\frac{\partial T}{\partial x}(x, t) = \sum_n e^{-d_n t} (-k_n u_n \sin(k_n x) + w_n k_n \cos(k_n x))$
 en $x=0 \Rightarrow \sum_n w_n k_n e^{-d_n t} = 0 \quad \forall t \Rightarrow \boxed{w_n = 0}$
 en $x=L \Rightarrow \sum_n e^{-d_n t} (-k_n u_n \sin(k_n L)) = 0 \quad \forall t$
 $\Rightarrow \sin(k_n L) = 0$ ou $u_n = 0 \rightarrow$ solution nulle: non.
 $\Rightarrow \boxed{k_n = \frac{n\pi}{L}}$ et on doit avoir $\boxed{k_n^2 D = d_n}$
 $\Rightarrow \boxed{d_n = n^2 \frac{\pi^2 D}{L^2}}$

- 20 Pour trouver u_n on peut utiliser la formule

$$\int_0^L T(x, D) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx = \sum_m u_m \int_0^L \cos \frac{n\pi}{L} x \cos \frac{m\pi}{L} x dx$$

$$= u_n \frac{L}{2}$$

d'où $u_n \frac{L}{2} = \int_0^L \frac{\delta}{8} \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx = \frac{\pi L}{8 n \pi} \left[\sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \right]_0^L$

$$u_m = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \sin\left(n\pi \frac{\delta}{L}\right) \times \frac{\pi L}{\delta}$$

6

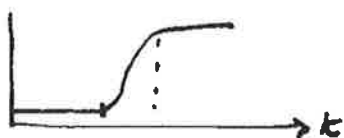
$$u_m = 2P \frac{\sin \frac{n\pi\delta}{L}}{\frac{n\pi\delta}{L}}$$

on obtient alors l'expression demandée.

21. $\cos(k_m L) = \cos(n\pi) = (-1)^n$
 si $\delta/L \ll 1$ $\sin_c\left(\frac{n\pi\delta}{L}\right) \approx 1$ } $\Rightarrow T(L, t) = P \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-\alpha_n t} \right)$

22. $\xi(b/2) = \frac{1}{2} \Rightarrow$ le calcul serait compliqué.
 on peut lire $\alpha_1 t = 1,4$

23. Si on considère le modèle valide, on aurait



mais il y a des pertes et
 $T(L, t)$ redescend lentement
 après $T_{\max} = 7 \text{ u.a.}$

$T = 3,5 \text{ u.a.}$ pour $t_{1/2} = 58 \text{ ms} - 48 \text{ ms} \approx 10 \text{ ms}$

donc $\alpha_1 = \frac{1,4}{10 \cdot 10^{-3}} \approx 1,4 \cdot 10^2 \text{ s}^{-1}$

or $\alpha_1 = \frac{\pi^2 D}{L} = \frac{\pi^2 \lambda}{L^2 \rho c} \Rightarrow \lambda = \frac{\rho \cdot c \cdot L^2 \alpha_1}{\pi^2}$

$\lambda = \frac{9 \cdot 10^3 \times 4 \cdot 10^2 \times (3,12 \cdot 10^{-3})^2}{\pi^2} \times 1,4 \cdot 10^2 \approx 9 \cdot 10^3 \times 4 \cdot 10^2 \times 10^{-6} \times 1,4$

$\lambda \approx 5 \cdot 10^2 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

24. on a $\lambda = 500$ $\sigma = 6 \cdot 10^7$ $T = 300 \text{ (u.a.)}$

$\frac{\lambda}{\sigma T} = \frac{500}{6 \cdot 10^7 \times 300} = 2,8 \cdot 10^{-8}$

Or $\frac{\pi^2}{3} \left(\frac{h_0}{e} \right)^2 = \frac{\pi^2}{3} \times \left(\frac{1,4 \cdot 10^{-23}}{1,6 \cdot 10^{-19}} \right)^2 = \frac{\pi^2}{3} \times \left(\frac{7}{8} \right)^2 \times 10^{-8}$
 $\approx 2,5 \cdot 10^{-8}$

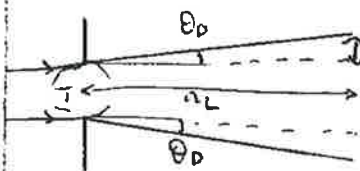
C'est bien compatible !

corrigé par oug!

Phases TP 2020. U1 - Au temps des Mayas.

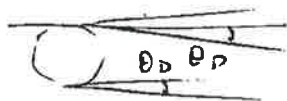
I - Couleur de la lune totalement éclipsée

- A)
- 1) la lune émerge de la zone d'ombre $\Rightarrow$ entre 3 et 4.
 - 2) Pour une ouverture de diamètre d , l'angle d'Airy est $1,22 \frac{\lambda}{d}$; donc ici $\theta_d = 0,61 \frac{\lambda}{R_T}$
avec un $\lambda_{\text{moyen}} \approx 0,55 \mu\text{m}$, $R_T = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$
$$\theta_d \approx \frac{0,61 \times 0,55 \cdot 10^{-12}}{6,37} \approx \underline{5 \cdot 10^{-14} \text{ rad}}$$



$x \approx \theta_d \times r_L \approx 5 \cdot 10^{-14} \times 3,8 \cdot 10^8 \approx 2 \cdot 10^{-5} \text{ m}$
cette distance est très faible
L'effet de diffraction par la Terre est négligeable

Rq: question mal posée, $x \ll R_T$, et il faudrait plutôt dessiner



pour éclairer dans la zone d'ombre.

B) Modèle d'atmosphère isotherme.

- 3) loi de la statique des fluides: $\frac{dP}{dz} = -\rho_a g$

$$GP \Rightarrow PV = nRT \Rightarrow P = \rho_a \frac{RT}{M_a}$$

$$\text{d'où } \frac{d\rho_a}{dz} = -\frac{M_a g}{RT} \rho_a \Rightarrow \rho_a(z) = \rho_a(0) e^{-\frac{z}{H_c}}$$

$$\text{avec } H_c = \frac{RT}{M_a g}$$

$$\text{A.N: } H_c = \frac{8,31 \times 293}{9,8 \times 29 \cdot 10^{-3}} \approx \frac{8,3}{9,8} \cdot 10^4 \approx \underline{8 \text{ km}}$$

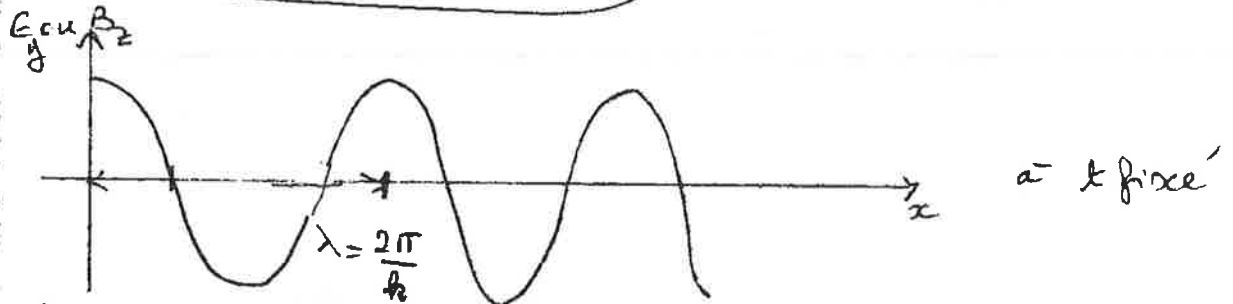
$$4) \text{ en } z=0 \quad P_0 = 10^5 \text{ Pa} \Rightarrow \rho_a(0) = \frac{M_a P(0)}{RT} = \frac{29 \cdot 10^{-3} \times 10^5}{8,31 \times 293}$$
$$\text{soit } \rho_a(0) \approx \frac{10}{8} \approx \underline{1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}}$$

$$\text{en } z = 8348 \text{ m} \quad P(z) \approx \frac{P(0)}{e} \quad (z \approx H_c) = \frac{1}{e} \times 1,2 \approx \underline{0,4 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}}$$

le modèle n'est pas bon du tout car l'atmosphère n'est pas isotherme! (écart de $40 \text{ K} / 270 \text{ K}$)

(2)

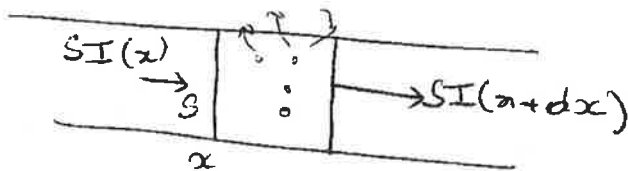
5) $\vec{E} = E_m \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$
 $\vec{B} = B_m \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z$ car
 $\nabla \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ E(x,t) \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial E}{\partial x} \end{vmatrix} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
 soit $+k E_m \sin(\omega t - kx) = +\omega B_m \sin(\omega t - kx)$
 $B_m = \frac{k}{\omega} E_m = \frac{1}{c} E_m \quad (k = \frac{\omega}{c})$



6) $\vec{R} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} = \frac{1}{\mu_0 c} E_m^2 \cos^2(\omega t - kx) \underbrace{\vec{e}_y \wedge \vec{e}_z}_{\vec{e}_x}$
 $\|\vec{R}\| = I_0 = \frac{1}{2\mu_0 c} E_m^2$ (prendre la valeur moyenne)
 $\Rightarrow E_m = \sqrt{2\mu_0 c I_0} = (2 \times 10^{-6} \times 3 \cdot 10^8 \times 10^3)^{1/2}$
 $= \sqrt{60 \cdot 10^4} \approx 8 \cdot 10^2 \text{ V/m}$

D - Transfert du rayonnement solaire

7) $P_a(x) = \frac{M_a}{M_A} \times \eta_a(x)$ donc $\eta_a(x) = \frac{P_A}{M_a} P_a(x)$



1 particule diffuse $P_a I(x)$ - (idem pour les poussières)
 Dans le volume on rencontre $(S dx) \eta_a(x)$ particules
 d'où $I(x+dx) S = I(x) S - S dx (\eta_a(x) P_a + \eta_p(x) P_p)$

d'où $\frac{dI}{dx} = -I(x) \times (\eta_a(x) P_a + \eta_p(x) P_p)$

par passage à la limite
 on sépare les variables

$\frac{dI}{I} = -(\eta_a(x) P_a + \eta_p(x) P_p) dx$
 et on intègre de 0 à x

on obtient $\ln \frac{I(x)}{I(0)} = - \underbrace{\left(P_a \int_0^x \eta_a(\xi) d\xi - P_b \int_0^x \eta_b(\xi) d\xi \right)}_{d_0(x)}$ (3)

E	Réfraction atmosphérique
---	--------------------------

10 Il y a réfraction car l'indice n n'est pas homogène

$$M_1 - \frac{z}{z_0} = \frac{R_T + z}{R_T + z_0} = \frac{1 + \frac{z}{R_T}}{1 + \frac{z_0}{R_T}} \approx 1 + \frac{z - z_0}{R_T} \propto \text{l'ordre 1}$$

$$\sqrt{\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 - 1} \approx \sqrt{1 + 2\left(\frac{u}{R_T}\right) - 1} \approx \sqrt{\frac{2u}{R_T}}$$

Par ailleurs: $dm = \frac{\varepsilon \lambda}{\rho_a(0)} d\rho_a$ et $\rho_a(z) = \rho_a(0) \times e^{-\frac{z}{H_c}}$ $\times -\frac{1}{H_c} dz$
avec $dZ = du$ et $\rho_a(z_0) = \rho_a(0) e^{-z_0/H_c}$

$$D'_{\alpha\bar{\alpha}} dm = \varepsilon \lambda \frac{\rho_{\alpha}(z_0)}{\rho_{\alpha}(0)} e^{-\frac{u}{H_c}} \times \frac{1}{H_c} du$$

12 On reports

$$\Theta_d(z_0, x) = 2\alpha \int_{\mu \neq 0}^{\mu=0} \frac{\epsilon_\lambda}{Hc} d\mu \sqrt{\frac{R_T}{2\mu}} e^{-\frac{\mu}{Hc}}$$

$n=1: z \rightarrow \infty$
 $\mu \rightarrow \infty$
 $n=n_0: z=z_0$
 $\mu \rightarrow 0$

Soit on pose $Q_d(z, \lambda) = E_\lambda \propto \frac{\sqrt{2RT}}{V H_c} \int_0^\infty \frac{e^{-v}}{\sqrt{v}} dv$ $v = \frac{u}{H_c}; dv = \frac{du}{H_c}$

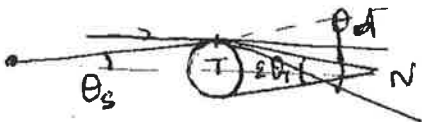
$$= \epsilon \lambda \sqrt{\frac{2 R_T \pi}{H_c}} \frac{p_a(z_0)}{p_a(0)}$$

sort enfin $\Theta_d(z_0, \lambda) = \varepsilon \lambda \Theta_e(z_0)$ and $\Theta(z_0) = \sqrt{\frac{2R_T \pi}{H_c}} e^{-\frac{z_0}{H_c}}$

④ (z_0) ist maximale paar $z_0 = 0$

$$13 - \delta\theta_d = \theta(z_0) \frac{d\epsilon_\lambda}{d\lambda} \delta\lambda = \theta(z_0) \left(-\frac{2\lambda c^2}{\lambda^3} \right) \delta\lambda$$

(penser aux dérivées $\epsilon_\lambda(\lambda + \delta\lambda) - \epsilon_\lambda(\lambda) \approx \delta\lambda \frac{d\epsilon_\lambda}{d\lambda}$)

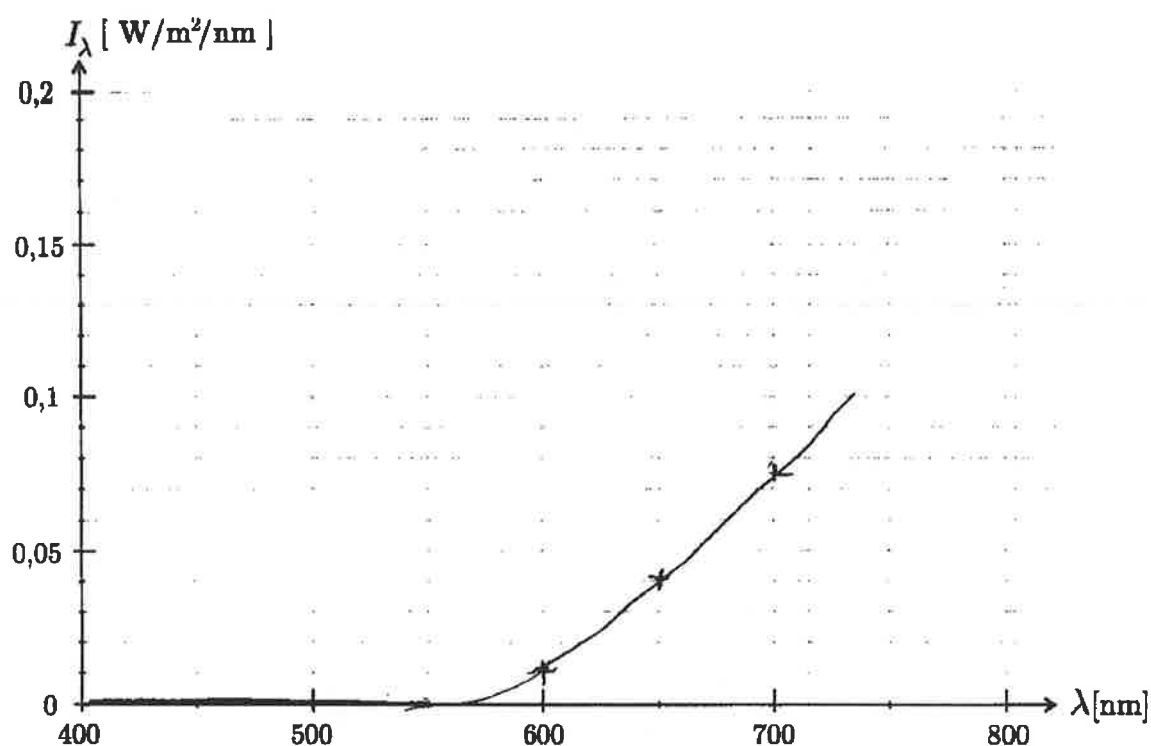


$$\theta_d \cdot \theta_s = 54^\circ \approx \bar{\alpha} \quad \theta_T = 57'$$

le point N est $\approx^n$ atteignable ⁴
par un rayon (même ordre de
grandeur)


 $\theta_d - \theta_s = 70 - 16 = 54'$

15 F. Précision du spectre



pour 600 nm : $1,8 \times 0,006 \approx 10^{-2}$
 650 nm : $1,6 \times 0,025 \approx 4 \cdot 10^{-2}$
 700 nm : $1,4 \times 0,06 = 8,4 \cdot 10^{-2}$

La lune paraît donc rouge.

II. Echo de la grande pyramide de Chichén Itzá

4

A. Sonogramme

- 16 on peut estimer $f_1 = 1500 \text{ Hz}$ et $f_2 = 3000 \text{ Hz}$
le pic 2 est à $-50 \text{ dB} \Rightarrow$

$$-50 = 20 \log \frac{a_2}{a_1} \Rightarrow \frac{a_2}{a_1} = 10^{-2,5} = 3,16 \cdot 10^{-3}$$

$$\text{donc } a_2 = 3,16 \cdot 10^{-3} \times 0,1 = 3,16 \cdot 10^{-4} \text{ V}$$

- 17 le théorème de Shannon impose $F_e > 2F_{\text{max}}$

$$\text{donc ici } F_e > 6 \text{ kHz}$$

$$\text{Pour une résolution spectrale } \delta f = \frac{1}{T_0} = 100 \text{ Hz}$$

$$\Rightarrow T_0 = 10^{-2} \text{ s} = 10 \text{ ms}$$

- 18 le spectre est calculé tous les multiples de T_a , sur les valeurs acquises entre $(n-1)T_a$ et nT_a . On a donc

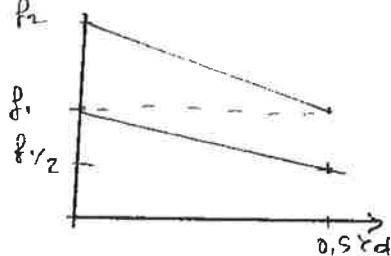
$$\delta f = \frac{1}{T_a}$$

le nombre de pixels en horizontal est $\frac{f_m}{\delta f}$
vertical est $\frac{f_2}{f_1} \cdot \frac{1}{T_a}$

le sonogramme comporte donc $\frac{f_2}{f_1} \times \frac{f_m}{\delta f} = \frac{f_2}{f_1} \times f_m \cdot T_a$ pixels.

$$\text{A.N. } \frac{f_2}{f_1} \times f_m \cdot T_a = 0,5 \times 3,5 \cdot 10^3 = 1,75 \cdot 10^3 \text{ pixels}$$

19. En 1 intervalle de temps T_a , la fréquence varie de $f_1 \frac{T_a}{T_d}$, la plus petite variation de fréquence décelable est δf ; il est préférable que le signal ne change pas trop vite de fréquence $\rightarrow \delta f > f_1 \frac{T_a}{T_d}$



- 20 La durée est environ 200 ms

$$f_1 = 600 \text{ Hz}, 1200 \text{ Hz}, 1800 \text{ et } 2400 \text{ Hz (peu précis)}$$

B. Diffraction du son

21 $\psi(s, t) = A(t - \frac{ss_n}{c_A})$ (onde progressive. $\uparrow$ aller)

Ensuite $\psi'(s, t) = K \cdot A(t - \frac{ss_n}{c_s}) - \frac{s_n s}{c_A}$

22 $\phi_m(t) = w(t - \frac{2d_m}{c_A})$ $\uparrow$ retour.

C - Superposition constructive

23 $\Delta \phi'_m = \frac{2\pi}{c\Delta} d_{m+1} - d_m$

24 la superposition est constructive si $\Delta \phi'_m \equiv 0 [2\pi]$
donc $\frac{2\pi}{c\Delta} (d_{m+1} - d_m) = 2p\pi \quad (p \in \mathbb{N})$

$\omega = 2\pi \nu \Rightarrow \frac{\nu}{c\Delta} (d_{m+1} - d_m) = p \Rightarrow \nu_p = p \times \frac{c\Delta}{2(d_{m+1} - d_m)}$

25 Or $d_m = [(a + mb)^2 + (mb)^2]^{1/2} = [a^2 + 2mab + 2m^2b^2]^{1/2}$

(en considérant que $b/a \ll 1$)

$d_m \approx a \left(1 + \frac{2mb}{a} + \frac{2m^2b^2}{a^2} \right)^{1/2} \approx a \left(1 + \frac{mb}{a} \right)$
ceci conduit à $d_m = a + mb$: trop simplifié

$d_{m+1}^2 - d_m^2 = 2ab + 2b^2((m+1)^2 - m^2) = 2ab + 2b^2(1+2m)$

$(d_{m+1} - d_m) = \frac{2ab + 2b^2(1+2m)}{d_{m+1} + d_m} = \frac{ab + b^2(1+2m)}{d_m}$

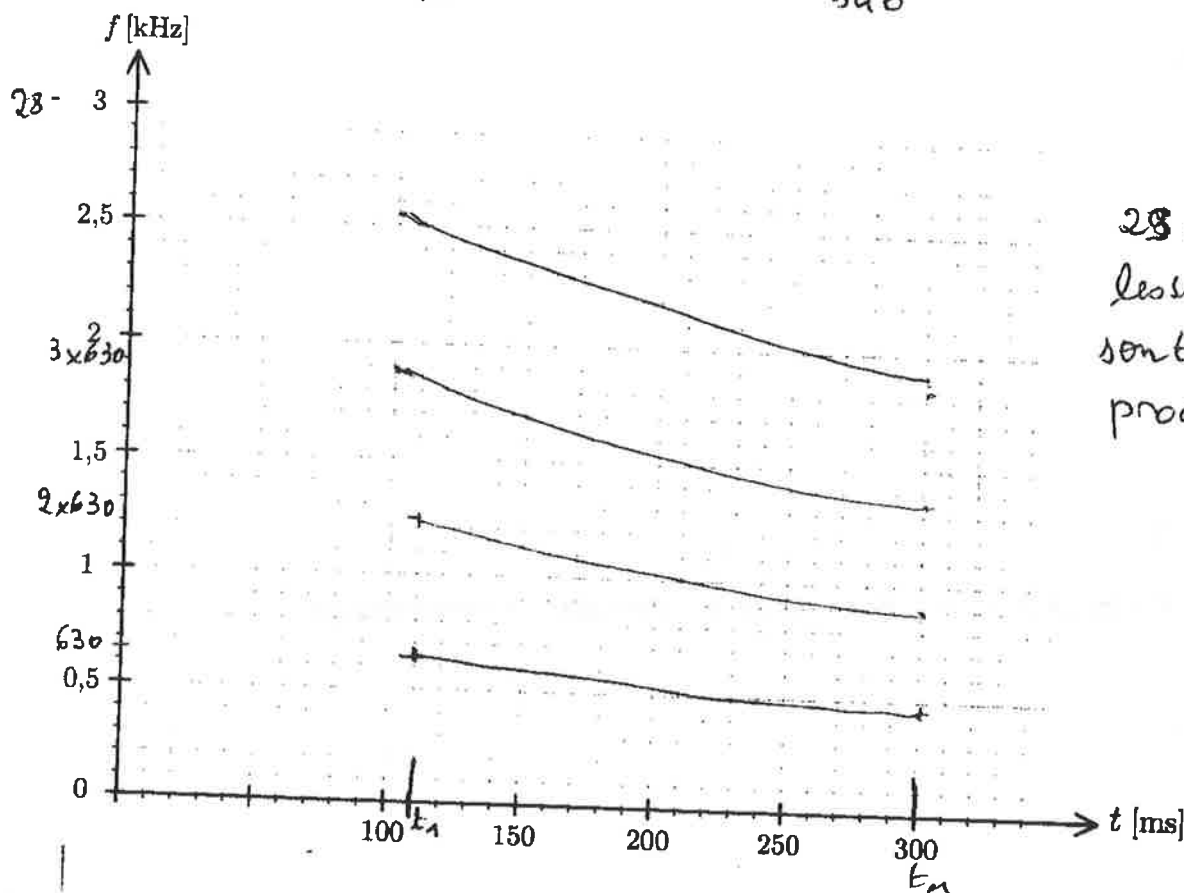
d'où $\nu_p = \frac{p c\Delta d_m}{2(ab + b^2(1+2m))} = \frac{p c\Delta d_m}{2ab} \times g(m)$ avec $g(m) = \frac{1}{1 + \frac{b}{a}(1+2m)}$

27. pour $d_0 = a \approx 20m$, au début $\Rightarrow d_{01} = 50m$

$\nu_1(t_1) = \frac{c\Delta \times 19,5}{2ab} = 630 \text{ Hz}$ (proche des 600...)

$\nu_2(t_N) = \frac{14,7 \times c\Delta}{2ab} \approx 480 \text{ Hz}$

26 $t_1 = \frac{2d_1}{c\Delta} \approx \frac{40}{340} \approx 0,12s$ $t_2 = \frac{2 \times 50}{340} \approx 0,3s$



28 : les spectres sont proches ...

I. Masses du deuton et du deutérium.

1) 1 atome ${}^2\text{H}$: $m_e + m_p + m_n \approx 2m_p$

1 atome ${}^1\text{H}$: $m_e + m_p \approx m_p$

$$\frac{\text{masse } {}^2\text{H}_{\text{tot}}}{\text{masse } {}^2\text{H}_{\text{tot}} + \text{masse } {}^1\text{H}_{\text{tot}}} = \frac{2m_p}{2m_p + 6420 \cdot m_p} \approx \frac{2}{6422} \approx 3,1 \cdot 10^{-4}$$

2) $\frac{\text{masse du noyau}}{\text{masse de l'atome}} = \frac{m_p + m_n}{m_p + m_n + m_e} \approx \frac{2m_p}{2m_p + m_e} \approx 1 - \frac{m_e}{2m_p}$

$$\frac{m_e}{m_p} = \frac{9,1 \cdot 10^{-31}}{1,67 \cdot 10^{-27}} \approx 5,5 \cdot 10^{-4} \quad \% \text{ du deuton/deutérium} = 1 - 5,5 \cdot 10^{-4}$$

3) on tire un atome H - soit $p = \frac{1}{6240}$ la probabilité que ce soit du D.

proba d'avoir $\text{D}_2\text{O} = p^2$

proba d'avoir $\text{DHO} = p(1-p) \approx p$.

proportion en moles = $\frac{p^2}{p(1-p)} \approx p \approx \frac{1}{6241} \approx 1,6 \cdot 10^{-4}$

4) l'eau lourde peut servir de modérateur (absorbe et ralentit les neutrons) dans certains réacteurs nucléaires

II - Etude classique

A - Spectroscopie et découverte du Deutérium

5) initial : $E_m \rightarrow$ final E_2 $\Delta E_m = E_m - E_2 = \frac{E_0}{2} \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right]$

$$\lambda_m = \frac{c}{\nu_m} = \frac{2hc}{E_0 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right)}$$

AN: $\lambda_3 = \frac{2 \cdot h \cdot c}{E_0 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9} \right)} = \frac{6,6 \cdot 10^{-34} \times 3 \cdot 10^8}{13,6 \times 1,6 \cdot 10^{-19} \times \frac{5}{36}} \times 4 \times 9 = 6,6 \cdot 10^{-7} \text{ m}$
(rouge)

$\lambda_4 = \frac{2hc}{E_0 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16} \right)} = \frac{6,6 \cdot 10^{-34} \times 3 \cdot 10^8}{13,6 \times 1,6 \cdot 10^{-19} \times \frac{3}{16}} \times \frac{16}{3} = 4,9 \cdot 10^{-7} \text{ m}$
(bleu)

ces longueurs d'onde sont dans le visible

6) $\frac{\lambda'_m}{\lambda_m} = \frac{E_0}{E_0} = \frac{m'_e(\text{Deuton})}{m'_e(\text{Hyd})} = \frac{1 + \frac{m_e}{M(\text{H})}}{1 + \frac{m_e}{M(\text{D})}} = \frac{1 + \frac{m_e}{m_p}}{1 + \frac{m_e}{2m_p}} \approx 1 + \frac{m_e}{m_p} - \frac{m_e}{2m_p} \text{ (DL)}$

$$\frac{\lambda'_m}{\lambda_m} - 1 = - \frac{m_e}{2m_p}$$

$$\delta = - \frac{m_e}{2m_p} \approx -2,7 \cdot 10^{-4}$$

l'écart est faible, mais mesurable

B. Rôle de la température de l'échantillon

2

- (4) (K') est en translation + rotation

$$\vec{v}_{M/K} = \vec{v}_{M/K'} + \vec{v}_{O'/K} + \vec{\omega}' \wedge \vec{O'M}$$

- (8) Dans le cas d'un référentiel purement en translation

$$\vec{v}_{M/K} = \vec{v}_{M/K'} + \vec{v}_0$$

ent : $\dot{x} = \dot{x}' + v_{0x} - \dots$

ent : $x = x' + v_{0x}t + x_0$ d'où $x' = x - v_{0x}t + x_0$

- (9) Dans le vide, l'onde EM vérifie $k = \frac{\omega}{c}$

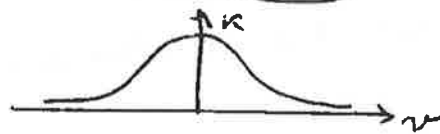
$$\begin{aligned} \underline{S} &= S_0 \exp(i(kx - k v_{0x}t + kx'_0 - \omega t)) \\ &= S_0 \exp(i(kx - (\omega + k v_{0x})t + kx'_0)) \end{aligned}$$

d'où $\omega_{app} = \omega + k v_{0x} = \omega \left(1 + \frac{v_{0x}}{c}\right)$

- (11) le facteur de Boltzmann fait intervenir $\exp\left(-\frac{E}{k_B T}\right)$
avec ici $E = \frac{1}{2}mv^2$ donc

$$\alpha = \frac{m}{2k_B T}$$

(12) $\frac{dN}{dv} = K \exp(-\alpha v^2)$



- (13) on dérive $f(v) = \exp(-\alpha v^2)$

$$f'(v) = -2\alpha v \exp(-\alpha v^2)$$

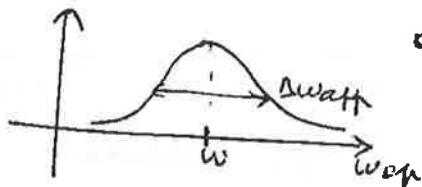
$$f''(v) = [-2\alpha + 4\alpha^2 v^2] e^{-\alpha v^2} = 0 \text{ pour } v^2 = \frac{1}{2\alpha}$$

d'où $v_+ = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}$ $v_- = -\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}$

$$\Delta v = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\alpha}} = 2 \frac{\sqrt{k_B T}}{\sqrt{m}}$$

plus T est grand, plus Δv est grand

(14) $\frac{dN'}{d\omega_{app}} = \frac{dN}{dv} = K \exp\left(-\alpha \left(\omega_{app} - \omega\right)^2 \left(\frac{c}{\omega}\right)^2\right)$



on aura la même allure, avec

$$\Delta \omega_{app} = \sqrt{\frac{2}{\alpha} \omega^2} = 2 \sqrt{\frac{k_B T}{m}} \frac{\omega}{c}$$

$$\left(\frac{\Delta \omega_{app}}{\omega_{app}} = \frac{\Delta v}{c} \right)$$

(15) on veut $\frac{\Delta w_{app}}{w} \leq 5 \cdot 10^{-6} \Rightarrow \frac{4 k_B T}{m c^2} \leq 25 \cdot 10^{-12}$ (3)

$$T \leq \frac{25 \cdot 10^{-12} \cdot m_p c^2}{4 k_B} = \frac{25 \cdot 10^{-12} \times 1,67 \cdot 10^{-27} \times 9 \cdot 10^{16}}{4 \times 1,4 \cdot 10^{-23}}$$

$$= 67 K$$

il faut donc travailler à très basse température

III - le Deuteron

A. Potentiels radiaux en physique quantique

16 $\Psi(r, t)$ en $e^{-iEt/\hbar}$ correspond aux solutions stationnaires
 $i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} \rightarrow \hbar \omega \Psi$ donc $E = \hbar \omega$ (1412 indep de t)

17) l'équation de Schrödinger donne: (avec $R'(r) = \frac{R(r)}{r}$)

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR'}{dr} \right) \right) \times Y(\theta, \varphi) + \frac{R'(r)}{r^2} \Delta Y(\theta, \varphi) + E_p(r) R'(r) Y(\theta, \varphi) = E R'(r) Y(\theta, \varphi)$$

on "sépare" les termes.

$$Y(\theta, \varphi) \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR'}{dr} \right) + (E_p(r) - E) R'(r) \right] - \frac{\hbar^2 R'(r)}{2\mu r^2} \Delta Y(\theta, \varphi) = 0$$

soit $\frac{\Delta Y}{Y} = -\frac{X(r)}{R'(r)} = -C$ constante car relation vraie $\forall r, \forall \theta, \varphi$
 donc $\Delta Y = -C Y$

et
$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR'}{dr} \right) - R'(r) \right] + (E_p(r) - E) R'(r) = \frac{\hbar^2 C}{2\mu} R'(r)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{r} \frac{d^2 R'}{dr^2} + [E_p(r) - E(r)] \frac{R(r)}{r} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{R(r)}{r^3}$$

 ce qui donne bien l'équation proposée

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2 R}{dr^2} + (E_p(r) + \frac{\hbar^2 C}{2\mu r^2}) R(r) = E R(r)$$

(18) $\frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + E_p(r) + \frac{\sigma^2}{2\mu r^2} = E$

par identification $\frac{\sigma^2}{2\mu r^2}$ correspond à $\frac{\hbar^2 C}{2\mu r^2}$

et $\frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 \rightarrow -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2 R}{dr^2}$

donc $\sigma \rightarrow \hbar \sqrt{C}$ et $V_{eff}(r) = E_p(r) + \frac{\hbar^2 C}{2\mu r^2}$

une fonction d'onde purement radiale correspond à $l=0$
 $\psi(r, \varphi) = \text{cte} \Rightarrow \Delta \psi = 0 \Rightarrow \boxed{C=0}$

20) $\psi(r, \varphi) = \Theta(\theta) \cdot \phi(\varphi)$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) \right] \phi(\varphi) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{d^2 \phi}{d\varphi^2} \cdot \Theta = -C \Theta(\theta) \phi(\varphi)$$

$$\frac{1}{\Theta(\theta)} \left[\sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + C \sin^2 \theta \Theta(\theta) \right] = - \frac{d^2 \phi}{d\varphi^2} \times \frac{1}{\phi(\varphi)} = \text{cte } C'$$

Donc $\begin{cases} \frac{d^2 \phi}{d\varphi^2} = -C' \phi(\varphi) \quad (A) \end{cases}$

$$\begin{cases} \sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + C \sin^2 \theta \Theta(\theta) = C' \Theta(\theta) \quad (B) \end{cases}$$

21) $\phi(\varphi)$ doit être 2π périodique, il faut donc que $C' > 0$
 (A) $\Rightarrow \phi(\varphi) = \exp(i\sqrt{C'}\varphi)$ ou $\exp(-i\sqrt{C'}\varphi)$ et $\sqrt{C'}$ doit être entier -
 donc $\boxed{\phi(\varphi) = e^{im\varphi}} \quad m \in \mathbb{Z}$

à un coefficient près sans importance
 (normalisation)

22) (B) s'écrit $\sin \theta \cdot \cos \theta \frac{d\Theta}{d\theta} + \sin^2 \theta \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + C \sin^2 \theta \Theta(\theta) = C' \Theta(\theta)$
 on pose $\Theta(\theta) = f(x)$ avec $x = \cos \theta$

$$\frac{d\Theta}{d\theta} = f'(x) \times \frac{dx}{d\theta} = -\sin \theta f'(x)$$

$$\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} = -\sin^2 \theta f'(x) = (x^2 - 1)f'(x)$$

$$\frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = \frac{d}{dx} \left((x^2 - 1)f'(x) \right) \times (-\sin \theta)$$

$$\Rightarrow (x^2 - 1) \frac{d}{dx} \left((x^2 - 1)f'(x) \right) + C(1 - x^2)f(x) = m^2 f(x)$$

$$\Rightarrow (x^2 - 1)^2 f''(x) + 2x(x^2 - 1)f'(x) + C(1 - x^2)f(x) = m^2 f(x)$$

termes plus haut
 soit
 on a $l+2$

$$\begin{aligned} & \downarrow \quad \downarrow \\ & x^4 \quad l(l-1)x^{l-2} + 2x^3 \cdot l x^{l-1} + C(-x^2) \cdot x^l = m^2 x^l \\ & l(l-1)x^{l+2} + 2lx^{l+2} - Cx^{l-2} = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow C = l(l-1) + 2l = l(l+1)$$

d'où $\boxed{C = l(l+1)}$

B. Energie de liaison du Deuteron

15

(23) Avec les formes données, pour $r < a$ $-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2 R}{dr^2} - V_0 R(r) = E R(r)$
donc $\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} (V_0 + E) R(r) = 0$

$\Rightarrow$ solutions en $\sin(kr)$ ou $\cos(kr)$ avec $k^2 = \frac{2\mu}{\hbar^2} (V_0 + E)$

il faut que ψ soit définie en $r=0$ (centre du noyau)
avec $\psi(r) = \frac{R(r)}{r}$; on ne peut donc prendre que les
solutions en $\sin(kr)$ car $\frac{\sin(kr)}{r} \sim k$ $r \rightarrow 0$

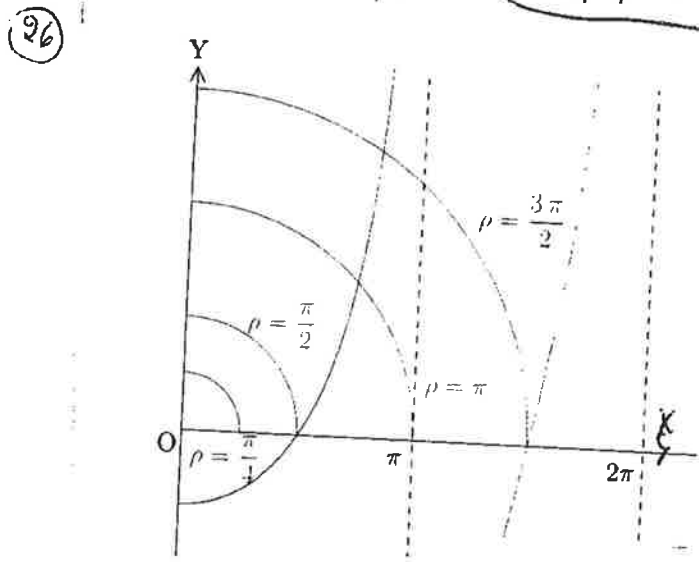
D'autre part, pour $r > a$ $-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2 R}{dr^2} = E R(r)$ avec $E < 0$
 $\Rightarrow R(r)$ en e^{kr} ou e^{-kr} avec $k^2 = -\frac{2\mu E}{\hbar^2}$
on élimine e^{kr} qui diverge en $r \rightarrow \infty$

(24) ψ et ψ' doivent être continues en $r=a$; donc R et R' aussi

(25) $\begin{cases} A \sin(ka) = B e^{-ka} \\ k A \cos(ka) = -k B e^{-ka} \end{cases}$

soit $\frac{1}{X} \tan X = -\frac{1}{Ka} \Rightarrow Y = -X \cotan X$

et d'autre part $X^2 + Y^2 = \frac{2\mu a^2 V_0}{\hbar^2} \Rightarrow$ cercle de rayon $\rho = \sqrt{\frac{2\mu V_0 a^2}{\hbar^2}}$



(27) il n'y a des solutions ($V > 0$) que si $\rho \geq \frac{\pi}{2}$

donc $\frac{2\mu V_0 a^2}{\hbar^2} \geq \frac{\pi^2}{4}$

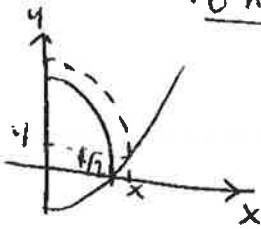
$V_0 \geq \frac{\pi^2 \hbar^2}{8\mu a^2} = V_{min}$

(28) A partir de $\rho = \frac{3\pi}{2}$, il y a plus d'une solution $\Rightarrow V_{max} = 9V_{min}$

(29) 1 seul état lié $\Rightarrow V_{min} < V_0 < V_{max}$
AN $V_{min} = \frac{\pi^2 \cdot 10^{-34} \times 2}{8 \times \frac{1,67}{2} \cdot 10^{-27}} \times [1,6 \cdot 10^{-13}]^{-1} \approx 23 \text{ MeV}$
 $V_{max} = 9 V_{min} = 210 \text{ MeV}$

- 30) si $V_0 = V_{\min}$: $p = \frac{\pi}{2}$ la solution est $\boxed{Y=0 \quad X = \frac{\pi}{2}}$
 or $Y = \sqrt{\frac{2\mu E}{\hbar^2}} a \Rightarrow$ donc $\boxed{E \neq 0}$
- 31) $E_d = -2,23 \text{ MeV} \approx -\frac{V_{\min}}{10}$ donc $Y \ll p$ donc p n'est pas beaucoup plus grand que $\frac{\pi}{2}$ ($Y \nearrow$ ni $p \nearrow$ graphiquement)
 donc V_0 n'est pas loin de $V_{\min}$.

32)



on a X proche de $\frac{\pi}{2}$: $X = \frac{\pi}{2} + \epsilon$

$$Y = -X \cotan X$$

$$\approx -\left(\frac{\pi}{2} + \epsilon\right) \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2} + \epsilon\right)}$$

$$\approx +\left(\frac{\pi}{2} + \epsilon\right) \times \tan \epsilon$$

$$Y \approx +\frac{\pi}{2} \epsilon \quad \downarrow \text{ordre 1}$$

et $\Rightarrow$ avec $Y = Ka = \sqrt{\frac{-2\mu E_d}{\hbar^2}} a$ et $X = \frac{\pi}{2} + \epsilon$

$$p^2 = \frac{2\mu V_0 a^2}{\hbar^2} = \underbrace{\left(\frac{\pi}{2} + \epsilon\right)^2}_{\text{ordre 2}} + \underbrace{\left(\frac{\pi}{2} \epsilon\right)^2}_{\text{ordre 2}} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \pi \epsilon \quad \text{à l'ordre 1}$$

$$\Rightarrow V_0 = \frac{\hbar^2}{2\mu a^2} \times \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \underbrace{\pi \epsilon}_{2\gamma} \right) = \boxed{\frac{\hbar^2}{2\mu a^2} \left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{2a}{\hbar} \sqrt{-2\mu E_d} \right]}$$

cette expression n'est pas celle de l'énoncé, qui devrait éliminer les termes d'ordre 2 en ϵ (DL à l'ordre 1 fait plus haut)

33

on obtient $\boxed{V_0 = 32 \text{ MeV}}$ (et $\epsilon = 0,38$ pas vraiment petit!).

Mines MP 2018. chimie : le bioéthanol

- 1) CH_3OH $\begin{array}{c} \text{H} \quad \text{H} \\ | \quad | \\ \text{H}-\text{C}-\text{C}-\text{O}-\text{H} \\ | \quad | \\ \text{H} \quad \text{H} \end{array}$
 l'éthanol et l'eau vont former des liaisons hydrogène (doublet non liant sur O et $\text{H}^{\delta+}$ des liaisons O-H polarisées).
 L'essence et l'éthanol sont peu miscibles (apolaire) (polaire)



3) théorème de Hess $\Delta_r H^\circ = \sum_i \Delta_f H^\circ_i$
 $= 2 \times (-334) + 2(-277) - \Delta_f H^\circ_{\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6}$

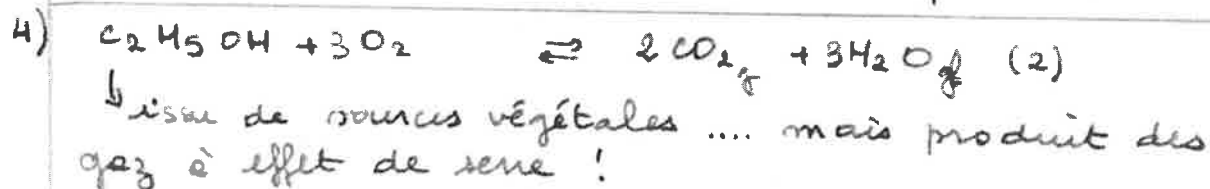
on calcule $\Delta_f H^\circ_{\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6}$ avec l'information sur la combustion:

$$\Delta H^\circ_{\text{comb}} = 6(-334) + 6(-242) - \Delta_f H^\circ_{\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6} = -2816$$

$$\Rightarrow \Delta_f H^\circ_{\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6} = -1000 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

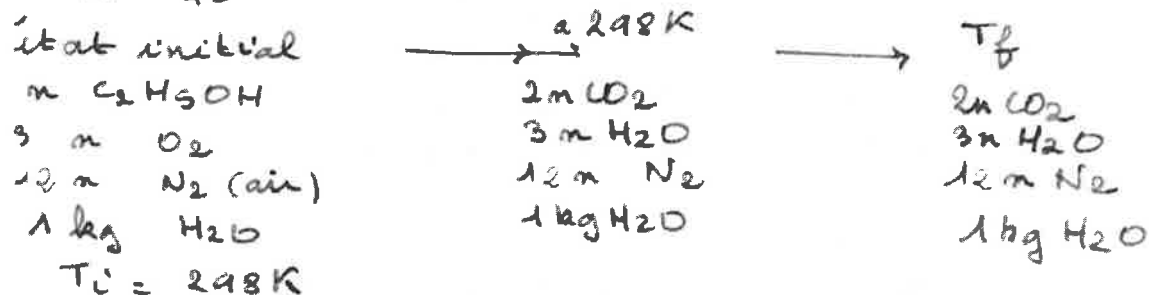
puis $\Delta_r H^\circ = -342 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$

$\Delta_r H^\circ < 0$ la réaction est exothermique



5) $M(\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}) = 2 \times 12 + 16 + 6 \times 1 = 46 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$

$$n = \frac{m}{M} = \frac{3}{46}$$



adiabatique, suppose isolaire: $\Delta H = Q = 0$

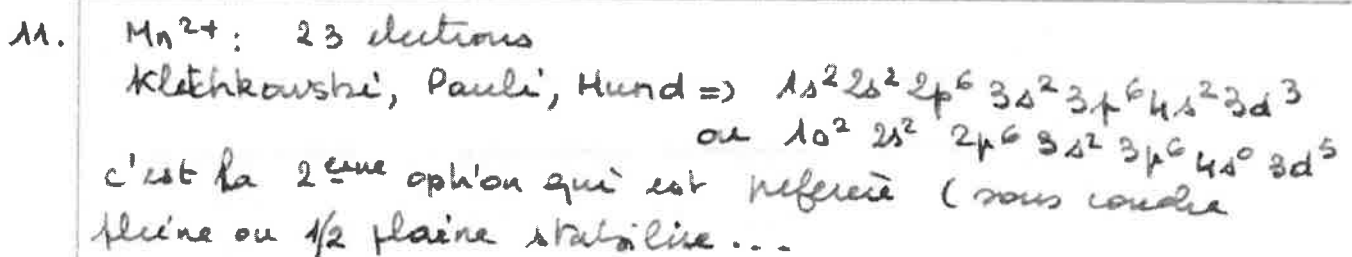
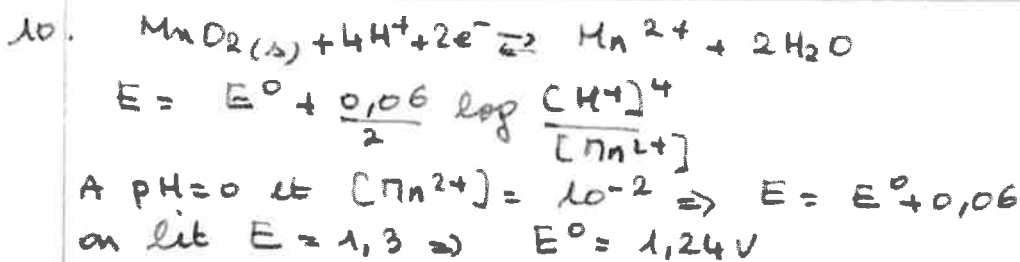
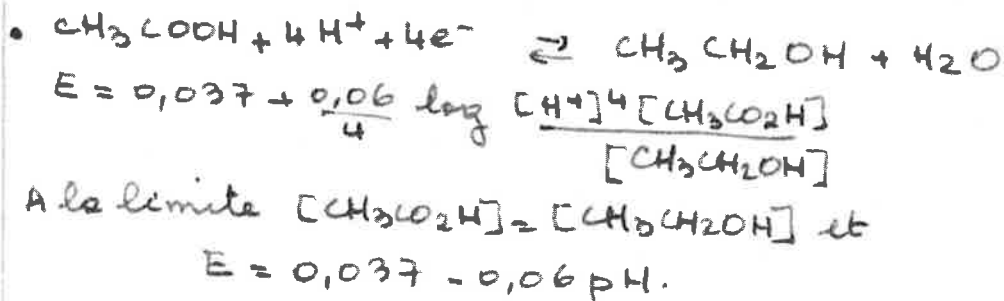
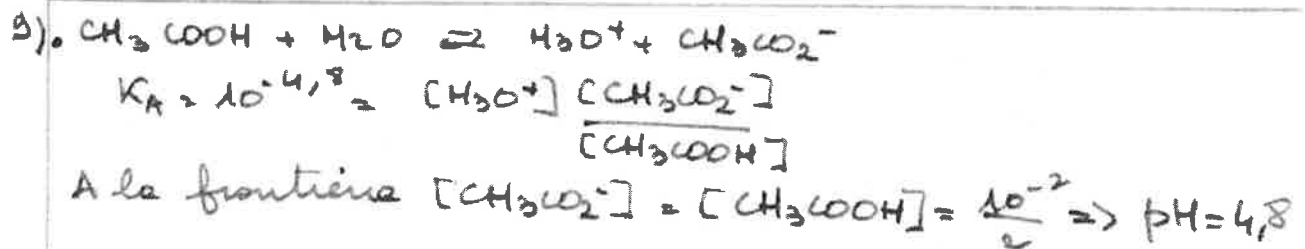
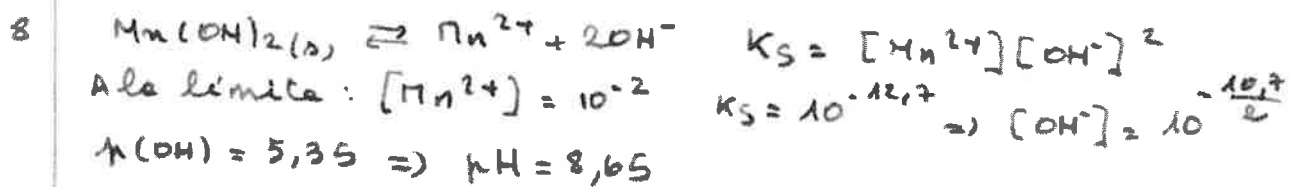
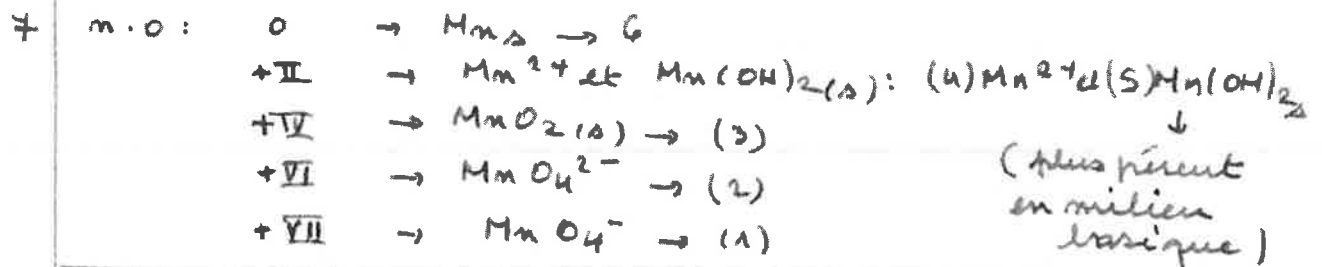
$$n \Delta_f H^\circ + (12n C_{p\text{N}_2} + 3n C_{p\text{H}_2\text{O}} + 2n C_{p\text{CO}_2} + \frac{1000}{18} C_{p\text{H}_2\text{O}})(T_f - T_i) = 0$$

$$\Delta_f H^\circ = (T_i - T_f) \left(12 C_{p\text{N}_2} + 2 C_{p\text{CO}_2} + \left(3 + \frac{1000}{18n} \right) C_{p\text{H}_2\text{O}} \right)$$

$$= -20 / (12 \times 29 + 2 \times 37 + (3 + 1000/18) \times 46) \text{ K}$$

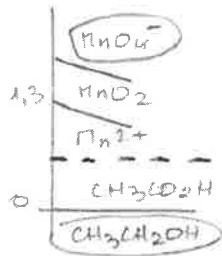
6. $\Delta H_f^\circ = 3 \times (-286) + 2 \times (-394) - 3 \times 0 - (-277)$
 $= -1,37 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$

L'ordre de grandeur est bien le même.

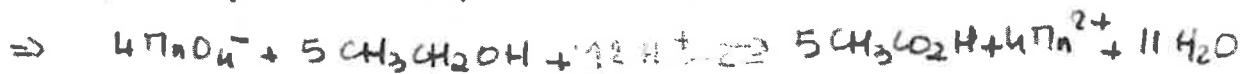


12. On prélève 5 mL de S_1 à la pipette, que l'on met dans une fiole jaugée. On complète à 50 mL avec de l'eau distillée, on ^(50 mL) bouché, on agite.

13



on peut s'imaginer de former Mn^{2+} ou MnO_2 ... mais, si on lit le protocole, on voit que le Fe^{2+} dosera le MnO_4^- excédentaire. Or Fe^{2+} ne coexiste pas avec MnO_2 . Si on formait MnO_2 , on le doserait aussi avec le Fe^{2+} et le dosage ne servirait à rien. Il faut donc considérer que l'on forme Mn^{2+} (conforme aux TP faits au lycée et en prépa...)



14. De même $MnO_4^- + 5Fe^{2+} + 8H^+ \rightleftharpoons Mn^{2+} + 5Fe^{3+} + 4H_2O$

15. La réaction est lente (on chauffe et on attend) ; si on dose tout de suite, l'éthanol n'a pas encore réagi.

16. B. l'équivalence $n_{MnO_4^-} = \frac{1}{5} \cdot C_4 V_E$ (constant)

Initialement $n_{MnO_4^-ini} = C_3 V_3$

Pour l'éthanol $n_2 = \frac{5}{4} n_{MnO_4^-} \text{ consommé}$

donc $C_3 V_3 - \frac{5}{4} \underbrace{C_2 V_2}_{n_2} = 5 \cdot C_4 V_E$

$$n_2 = \frac{5}{4} (C_3 V_3 - \frac{1}{5} C_4 V_E) = \frac{5}{4} (10^{-2} \times 0,1 - \frac{1}{5} \cdot 0,2 \times 0,01) = 7,5 \cdot 10^{-4} \text{ moles}$$

d'où $C_2 = \frac{n_2}{V_2} = 0,38 \text{ moles/L}$ et $C_1 = 3,8 \cdot \text{mol} \cdot L^{-1}$

17. Il ne faut pas former $Mn(OH)_2$, ni $Fe(OH)_3$!

18 on a un $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH} + 3\text{O}_2 \rightleftharpoons 2\text{CO}_2 + 3\text{H}_2\text{O}$
que l'on peut décomposer en

20 - à la cathode : réduction de O_2 :

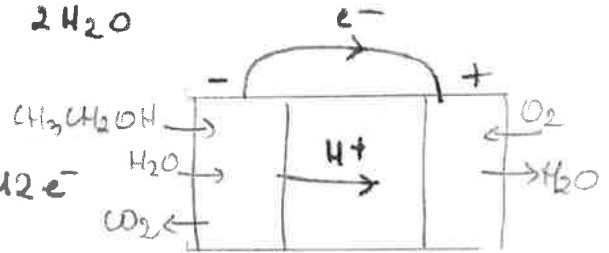


- à l'anode



les H^+ produits à l'anode

migrent dans l'électrolyte, et les e^- dans le circuit



19 : on peut alimenter la pile en continu ; elle ne produit que de l'eau et du CO_2 - l'éthanol est liquide et facilement produit -

Inconvénient : nature de l'électrolyte ? catalyseurs ?

21 - on a $\Delta_r G^\circ = -n F E^\circ$ avec $n = 12$

on peut calculer $\Delta_r G^\circ = \Delta_r H^\circ - T \Delta_r S^\circ$

$$\text{avec } \Delta_r H^\circ = 2(-394) + 3(-286) - (-277) = -1365 \text{ kJ mol}^{-1}$$

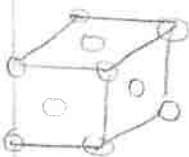
$$\Delta_r S^\circ = 2(214) + 3(70) - 3 \times 205 - 161 = -138 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$$

$$\Rightarrow \Delta_r G^\circ = -1365 \cdot 10^3 + 138 \times 298 = -1,33 \cdot 10^6 \text{ J mol}^{-1}$$

$$E^\circ = 1,15 \text{ V}$$

22 Rhodium : $Z = 45$ $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^{10} 4p^6 5s^2 4d^7$
5^e ligne, 9^e colonne - métaux de transition

23



sur une diagonale : $4r = a\sqrt{2}$

il y a 4 atomes par maille :

$$\rho = \frac{4M}{N_A a^3} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\frac{4M}{N_A \rho} \right)^{1/3}$$

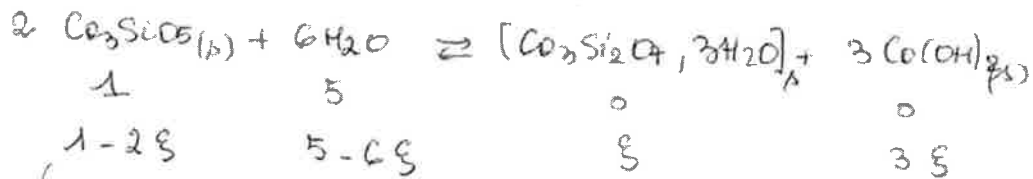
$$\text{A.N : } r = \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\frac{4 \times 103 \cdot 10^{-3}}{6 \cdot 10^{23} \times 12,4 \cdot 10^3} \right)^{1/3} = 1,4 \cdot 10^{-10}$$

$\approx 4 \cdot 10^{-10}$

A le calculer : $1,35 \cdot 10^{10} \text{ m}$.

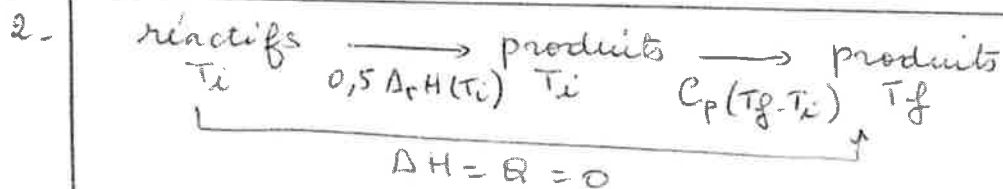
A. Prise d'un liéton

1. $M(\text{Ca}_3\text{Si}_2\text{O}_8) = 3 \times 40 + 28 + 5 \times 16 = 228 \text{ g/mol} \Rightarrow \underline{1 \text{ mole}}$
 $M(\text{H}_2\text{O}) = 18 \text{ g/mol} \quad n = \frac{90}{18} = \underline{5 \text{ moles}}$



donc $\xi_{\text{max}} = 0,5 \text{ mol}$. le réactif est le réactif limitant.

$\begin{matrix} 0 & 2 & 0,5 & 1,5 \end{matrix}$



avec $C_p = 1,5 C_p(\text{Co(OH)}_2) + 0,5 C_p(\text{Ca}_3\text{Si}_2\text{O}_7 \dots) + 2 C_{p\text{H}_2\text{O}}$
 $= 1,5 \times 80 + 0,5 \times 340 + 2 \times 75$
 $= 440 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$

on en tire: $\Delta_r H(T_i) = -\frac{1}{\xi_{\text{max}}} C_p \cdot \Delta \theta$

$\Delta_r H(T_i) = -2 \times 440 \times 15 = \underline{-13,2 \cdot 10^3 \text{ J.mol}^{-1}}$

B. Basicité d'un liéton



4. l'équivalence est pour $V_{\text{eq}} = 1 \text{ mL}$

$0,5 \times V_{\text{eq}}(\text{mL}) = C_{\text{OH}^-} \times 100 \Rightarrow C_{\text{OH}^-} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ mol/L}^{-1}$
 $\Rightarrow \text{pH} = 14 - \text{pOH} = 14 + \log(5 \cdot 10^{-3}) = 14 + \log \frac{10^{-2}}{2} = 14 - 2,0,3$

$\text{pH} = 11,7$

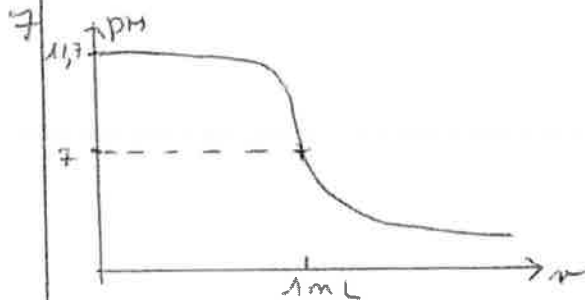
5. pour $V < V_{\text{eq}} \quad \sigma = \sum_i \alpha_i \lambda_i \searrow$ car on consomme des OH^- , qu'on remplace par des Cl^-
 pour $V > V_{\text{eq}}$ on ajoute en permanence des H_3O^+ et Cl^-
 donc $\sigma \nearrow$

6. $V < V_{\text{eq}} \quad \sigma$ a une pente en $\lambda_{\text{Cl}^-} - \lambda_{\text{OH}^-} = 76 - 19,8 = -56,2$
 $V > V_{\text{eq}} \quad \sigma$ a une pente en $\lambda_{\text{Cl}^-} + \lambda_{\text{H}_3\text{O}^+} = -12,2$
 $\Rightarrow \sigma$ a une pente de $-12,2$

le rapport des pentes est $\frac{42,6}{12,2} \approx 3,5$

graphiquement : rapport = $\left(\frac{0,17}{0,48}\right)^{-1} \times \left(\frac{0,06}{0,151}\right)^{-1} = \frac{1,7}{0,48} \approx 3,5$

les résultats sont bien cohérents



C Carbonatation d'un béton

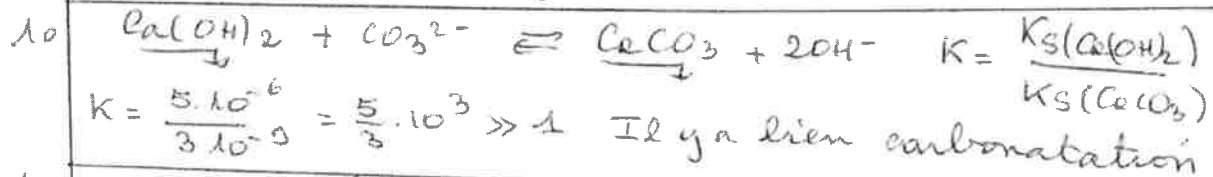
8 Kletchkovski, Pauli, Hund...



le calcium perd facilement les 2 électrons $4s \rightarrow \text{Ca}^{2+}$

9 $\text{pH} = \text{pK}_a + \log \frac{[\text{base}]}{[\text{acide}]} \Rightarrow \begin{array}{ccc} \text{H}_2\text{CO}_3 & \text{HCO}_3^- & \text{CO}_3^{2-} \\ & 6,4 & 10,4 \end{array}$

on avait $\text{pH} = 11,7 \rightarrow$ zone du CO_3^{2-}



Vant'Hoff $\frac{d}{dT} \ln K_s = \frac{\Delta_r H^\circ}{RT^2}$

avec $\Delta_r H^\circ = -543 - 677 - (-1207) = -13 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} < 0$

donc K_s est fonction décroissante de T .

le calcaire est plus soluble à froid.

12 $\Delta_r S^\circ = \sum_i \nu_i S_i^\circ = -53 - 57 - 93 = -203 \text{ JK}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$

$$\ln K = -\frac{\Delta_r G^\circ}{RT} = -\frac{\Delta_r S^\circ}{R} - \frac{\Delta_r H^\circ}{RT} = \frac{298 \times (-203) + 13000}{298 \times 8,314} = \frac{-47494}{2478,58} = -19,16$$

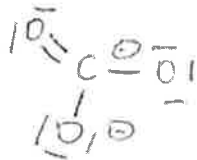
$$\ln K \approx -20$$

$$\log K = \frac{\ln K}{\ln 10} = \frac{-20}{2,3} \approx -8,7 \quad \text{ou} \quad \log K_s = -9 + \log 3 \approx -8,7$$

c'est bien cohérent

13 test à l'eau de chaux (Ca(OH)_2 dissout) qui se trouble en présence de CO_2

14



les 3 O sont en fait équivalents, l'édifice possède un centre de symétrie

15

$$\rho = \frac{M}{N_A V} \Rightarrow V = \frac{M}{N_A \rho} = \frac{(40 + 12 + 3 \times 16) \cdot 10^{-3}}{6 \cdot 10^{23} \times 2,7 \cdot 10^3} = \frac{0,1}{16,2 \cdot 10^{26}}$$

Donc $V = 6,1 \cdot 10^{-29} \text{ m}^3$

16

il y a un atome de Ca par maille

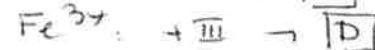
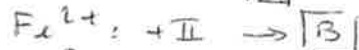
donc $V = (0,36)^2 \times \sin(120^\circ) \times 0,49 \cdot 10^{-27} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 0,13 \times 0,49 \cdot 10^{-27}$

$$V \approx 5,6 \cdot 10^{-29} \text{ m}^3$$

le volume de la calcite est plus grand (par unité) $\Rightarrow$ le béton "gonfle".

D. Corrosion d'un béton armé

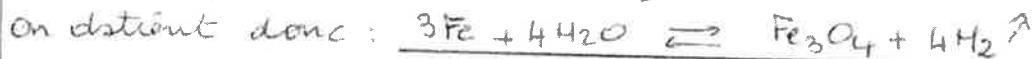
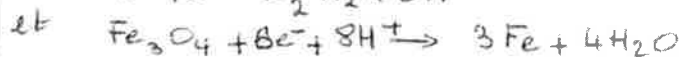
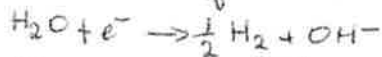
17 et 18



[C] et [E] peuvent capter des H^+ $\rightarrow$ bases $\rightarrow$ forts pH.

19

En milieu fortement basique, pour l'eau



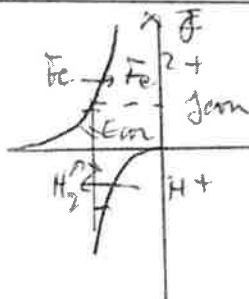
En milieu basique, pour l'oxygène, on formerait FeOOH

20

$\text{Fe}_3\text{O}_4(s)$ recouvre le fer et le protège: passivation

21

22



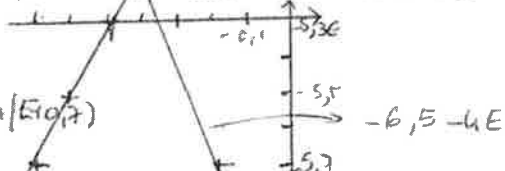
$$E_{\text{con}} \approx -0,3\text{V}$$

on cherche le point d'intersection des droites $\Rightarrow (E_{\text{con}}, j_{\text{con}})$

pour $E < E_{\text{con}}$ c'est $\text{H}^+ \rightarrow \text{H}_2$ qui l'emporte

pour $E > E_{\text{con}}$ c'est $\text{Fe} \rightarrow \text{Fe}^{2+}$

$$\log |j| = -5,7 + (E_{\text{con}}/7)$$



$$\text{intersection } E = -0,3\text{V}$$

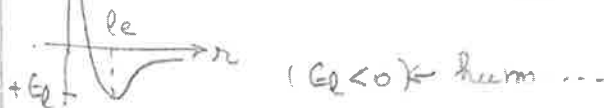
$$\log |j| = -5,3$$

$$|j| = 5 \cdot 10^{-6} \text{ A.m}^{-2}$$

Mines 2017 - Physique II : Capacité thermique des gaz

I - De la molécule à l'oscillateur harmonique

1) ϵ_p ($F = - \frac{du}{dr} > 0$ si répulsif ...)



2) $r_e \approx 0,1 \text{ nm}$ et $|E_l| \sim 100 \text{ kJ.mol}^{-1}$ typiquement

3) Au voisinage de r_e , on peut remplacer la courbe par une parabole:

$$\begin{aligned} \epsilon_p(r) &= \epsilon_p(r_e) + \frac{1}{2} E_p''(r_e) (r - r_e)^2 \\ F(r) &= - \underbrace{E_p''(r_e)}_k (r - r_e) \end{aligned}$$

4) $E_c = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2$

5) $v_{qm} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \left(3 \times 25 \times \frac{300}{30 \cdot 10^{-3}} \right)^{1/2} = 500 \text{ m/s}$

6) $E_m = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 + \frac{1}{2} k (r - r_e)^2 + E_l$

7) Le système est isolé $\Rightarrow (m_A + m_B) \frac{d\vec{V}_G}{dt} = \sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$
(pesanteur négligée) $\Rightarrow \vec{V}_G = \text{cte}$

$\Rightarrow$ le référentiel barycentrique est galiléen.

8) $m_A \vec{G}_A + m_B \vec{G}_B = \vec{0} \Rightarrow m_B (\vec{G}_A + \vec{AB}) + m_A \vec{G}_A = \vec{0} \Rightarrow \vec{G}_A = - \frac{m_B}{m_A + m_B} \vec{AB}$
et de même $\vec{G}_B = + \frac{m_A}{m_A + m_B} \vec{AB}$

On dérive: $\vec{v}_A - \vec{v}_G = - \frac{m_B}{m_A + m_B} \vec{v}$, idem $\vec{v}_B \dots$

$$E_c = \frac{1}{2} m_A \left(\vec{v}_G - \frac{m_B}{m_A + m_B} \vec{v} \right)^2 + \frac{1}{2} m_B \left(\vec{v}_G + \frac{m_A}{m_A + m_B} \vec{v} \right)^2$$

$$E_c = \frac{1}{2} \underbrace{(m_A + m_B)}_M \vec{v}_G^2 + 0 + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{m_A m_B}{m_A + m_B}}_\mu \vec{v}^2$$

Au final $E_m - E_l = \frac{1}{2} M V_G^2 + \frac{1}{2} \mu v^2 + \frac{1}{2} k r^2$

$\vec{AB} = r(t) \hat{e}_r \Rightarrow \vec{v} = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta + r \sin \theta \dot{\varphi} \hat{e}_\varphi$

$$E_m - E_l = \underbrace{\frac{1}{2} M V_G^2}_{E_{trans}} + \underbrace{\frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \mu r^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta)}_{E_{rot}} + \frac{1}{2} k r^2$$

et $E_{vib} = E_l + \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2} k r^2$

II Capacité thermique d'un gaz parfait diatomique

2

10) $U = N \langle E_m \rangle$

11) - A chaque degré de liberté (terme quadratique en énergie), correspond $\frac{1}{2} k_B T$ dans $\langle E_m \rangle$

12) $\left. \begin{array}{l} 3 \text{ degrés en translation } (v_x) \\ 2 \text{ degrés en rotation } (\text{on a } \theta \text{ et } \phi) \\ 2 \text{ degrés en vibration } (n \text{ et } l) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{on aurait } U = \frac{7}{2} N k_B T$

$\Rightarrow C_{v,m} = \frac{d}{dT} \left(\frac{7}{2} N k_B T \right) = \frac{7}{2} R$

13) les prédictions ne sont valides qu'à très haute température: il faut la MQ....

III Oscillateur harmonique en physique quantique

14) $\Psi(x,t) = f(x) \exp(-i \frac{E t}{\hbar})$ reporté dans l'éq. de Schrödinger donne:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} f''(x) + \frac{1}{2} k x^2 f(x) = E f(x)$$

15) $-f''(x) + \underbrace{\frac{k\mu}{\hbar^2}}_{m^{-2}} x^2 f(x) = \underbrace{\frac{2\mu E}{\hbar^2}}_{m^{-2}} f(x)$

$\frac{k\mu}{\hbar^2}$ est en m^{-4} $\alpha = x \left(\frac{k\mu}{\hbar^2} \right)^{1/4}$ est sans dimension

$\frac{2\mu E}{\hbar^2} = \frac{4\mu^2 E^2}{\hbar^4} \times \frac{\hbar^2}{k k} \Rightarrow \gamma$ est sans dimension

16) $\frac{df}{dx} = \frac{df}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dx} = \frac{df}{d\alpha} \times \left(\frac{k\mu}{\hbar^2} \right)^{1/4}$ puis $\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d^2f}{d\alpha^2} \left(\frac{k\mu}{\hbar^2} \right)^{1/2}$

L'éq devient $\left(\frac{k\mu}{\hbar^2} \right)^{1/2} \left[-\frac{d^2f}{d\alpha^2} + \alpha^2 f(\alpha) \right] = \frac{2\mu E}{\hbar^2} f(\alpha)$

$\Rightarrow -f''(\alpha) + \alpha^2 f(\alpha) = \gamma f(\alpha)$

17) $f(\alpha) = e^{\pm \frac{1}{2} \alpha^2} \Rightarrow f'(\alpha) = \pm \alpha e^{\pm \frac{1}{2} \alpha^2} \Rightarrow f''(\alpha) = \pm e^{\pm \frac{1}{2} \alpha^2} + \alpha^2 e^{\pm \frac{1}{2} \alpha^2}$

$-f''(\alpha) = (\alpha^2 \pm 1 + \gamma) f(\alpha)$

si $\alpha \rightarrow +\infty$ $f''(\alpha) \approx \alpha^2 f(\alpha)$

cela semble convenir

18 - Il faut pouvoir normaliser la fonction: $e^{\frac{\alpha^2}{2}}$ est à rejeter ⁽³⁾

19) on pose $f(\alpha) = g(\alpha) \exp(-\frac{\alpha^2}{2})$

$$f'(\alpha) = g'(\alpha) e^{-\frac{\alpha^2}{2}} - \alpha g(\alpha) e^{-\frac{\alpha^2}{2}}$$

$$f''(\alpha) = g''(\alpha) e^{-\frac{\alpha^2}{2}} - 2\alpha g'(\alpha) e^{-\frac{\alpha^2}{2}} + \alpha^2 g(\alpha) e^{-\frac{\alpha^2}{2}} - g(\alpha) e^{-\frac{\alpha^2}{2}}$$

$$-f''(\alpha) + \alpha^2 f(\alpha) = [-g''(\alpha) + 2\alpha g'(\alpha) - g(\alpha)] e^{-\frac{\alpha^2}{2}}$$

D'où $g''(\alpha) - 2\alpha g'(\alpha) + (\gamma - 1)g(\alpha) = 0$

20) $g(\alpha) = \sum_{p=0}^{+\infty} b_p \alpha^p$ $g'(\alpha) = \sum_{p=1}^{+\infty} p b_p \alpha^{p-1}$ $g''(\alpha) = \sum_{p=2}^{+\infty} p(p-1) b_p \alpha^{p-2}$
 $= \sum_{p=0}^{+\infty} (p+1)b_{p+1} \alpha^p$ $= \sum_{p=0}^{+\infty} (p+2)(p+1)b_{p+2} \alpha^p$

d'où

on obtient $(p+2)(p+1)b_{p+2} - 2p b_p + (\gamma - 1)b_p = 0$

$$\Rightarrow b_{p+2} = \frac{1 - \gamma + 2p}{(p+1)(p+2)} b_p$$

21 il faut que $1 - \gamma + 2n = 0 \Rightarrow \gamma = 2n + 1$ (n entier ≥ 0)

on $\gamma = \frac{2E}{\hbar \omega} \sqrt{\frac{\mu}{k}} \Rightarrow E = \frac{\hbar \omega}{2} (2n + 1)$ avec $\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$

IV Capacité thermique et quantification

22- β en J^{-1} k_B en $J \cdot K^{-1}$ T en $K \Rightarrow \beta = \frac{1}{k_B T}$

23- $\pi(E_n) = A \exp\left(-\frac{\hbar \omega}{k_B T} (n + \frac{1}{2})\right)$

On normalise : $\sum_{n=0}^{+\infty} \pi(E_n) = 1 \Rightarrow A e^{-\frac{\hbar \omega}{2 k_B T}} \times \frac{1}{1 - e^{-\frac{\hbar \omega}{k_B T}}} = 1$

$$A = 2 \sinh\left(\frac{\hbar \omega}{2 k_B T}\right) = 2 \sinh\left(\frac{\beta \hbar \omega}{2}\right) = \frac{1}{\frac{\beta \hbar \omega}{2}}$$

24 $\langle E \rangle = N \sum_{n=0}^{+\infty} E_n \cdot \pi(E_n) = A \sum_{n=0}^{+\infty} E_n e^{-\beta E_n} = A \times -\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\beta E_n} \right)$

$$\langle E \rangle = -N \frac{\partial}{\partial \beta} \left(2 \sinh\left(\frac{\beta \hbar \omega}{2}\right) \right) \times \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{\sinh\left(\frac{\beta \hbar \omega}{2}\right)} \right) \times \frac{\hbar \omega}{2}$$

$$\langle E \rangle = +N \frac{\cosh(\frac{\beta \hbar \omega}{2})}{\sinh(\frac{\beta \hbar \omega}{2})} \times \frac{\hbar \omega}{2}$$

$$C_{V,m} = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\langle E \rangle}{N} \right) = \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\langle E \rangle}{N} \right) \times -\frac{1}{k_B T^2} = \frac{\hbar \omega}{2 k_B} \frac{\frac{\cosh(\frac{\beta \hbar \omega}{2})}{\sinh(\frac{\beta \hbar \omega}{2})}}{\frac{\cosh(\frac{\beta \hbar \omega}{2})}{\sinh(\frac{\beta \hbar \omega}{2})}} = \frac{\hbar \omega}{2 k_B} \frac{\cosh^2(\frac{\beta \hbar \omega}{2})}{\sinh^2(\frac{\beta \hbar \omega}{2})}$$

26.

$$C_{v,m} = R \frac{\left(\frac{T_v}{2T}\right)^2}{0h^2 \left(\frac{T_v}{2T}\right)}$$

$$\xi = \frac{T_v}{2T}$$

(4)

il suffit de poser $u = \frac{2T}{T_v} \Rightarrow C_{v,m} = R \chi(u)$

sur la figure 1

$$T \text{ va de } 1 \rightarrow 2 \times 10^3$$

pour H_2 $u = \frac{2T}{T_v}$ va de $\frac{2}{4390} \rightarrow \frac{4000}{4390} \rightarrow u \text{ reste } < 1$

pour Cl_2 : $u = \frac{2T}{T_v}$ va de $\frac{2}{808} \rightarrow \frac{4000}{808} \approx 5 \rightarrow u$ parcourt l'ensemble des valeurs de la figure 2.

On ne peut pas de $C_{v,m} = 0$ ($u \rightarrow 0$) car on n'a pas pris en compte les énergies cinétiques de translation et de rotation...