

Mines - Ponts MP 2021 Analyse.

297. Par l'absurde, on suppose qu'il existe  $N$  une norme qui vérifie

$$\forall (A, B) \in M_n(\mathbb{R})^2, N(AB) = N(A)N(B).$$

Pour  $n \geq 2$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} A = E_{11} \\ B = E_{22} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} A \times B = 0 \Rightarrow N(A)N(B) \neq 0 \\ A \neq 0 \Rightarrow N(A) \neq 0 \\ B \neq 0 \Rightarrow N(B) \neq 0 \end{array} \quad \text{absurde.}$$

$$\text{Pour } n=1: \exists k > 0: \forall \lambda \in \mathbb{R}, N(\lambda) = k|\lambda| \quad k=1.$$