Mines-Ponts MP 2021 Analyse.

298.

On pose pour tout $z \in \mathbb{C}$, $E_z = \{\exp(itz),\ t \in \mathbb{R}\}$.

$E = \{ z \in \mathbb{C} \mid E_z$ est un sous-groupe fermé de $(\mathbb{C}^*, \times) \}$.

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & (\mathbb{C}^*, \times) \\ t & \longmapsto & e^{itz} \end{array}$$ est un morphisme de groupes

donc pour tout $z \in \mathbb{C}$, E_z est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

[illegible]

Soit z qui convient. $z \in E$.

- $z = 0$ ok
- $z \in \mathbb{R}^*$. $E_z = |\,|^{-1}(\{1\})$
- $z \in i\mathbb{R}^*$. $E_z = \mathbb{R}_+^*$.
- $z = x + iy$, $x \neq 0$, $y \neq 0$

$$\forall t \in \mathbb{R},\ e^{itz} = e^{-ty} e^{itx}$$

Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ t_n = n \text{ si } y > 0$$
$$\forall n \in \mathbb{N},\ t_n = -n \text{ si } y < 0.$$

$e^{it_n z} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ or $0 \in E_z$ donc E_z n'est pas fermé.

CCL : $E = \mathbb{R}$.