Mines-Ponts MP 2021 Analyse.

303. $E = \{ f \in C^1([0,1], \mathbb{R}),\ f(0) = 0 \}$.

Pour $f \in E$, $n(f) := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ et $N(f) := \|f + f'\|_\infty$.

a) Mq n et N sont des normes sur E.

Soit $f \in E$. $N(f) = 0 = \|f + f'\|_\infty \Rightarrow f + f' = 0$

On pose $C_{0,0}$: $\begin{cases} y + y' = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ $f = \tilde{0}$

$n(f) = 0 = \underbrace{\|f\|_\infty}_{\geq 0} + \underbrace{\|f'\|_\infty}_{\geq 0} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \|f\|_\infty = 0 \\ f = \tilde{0} \end{cases}$

b) Mq $n \sim N$.

i.e. $\exists (\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \forall f \in E, \alpha N(f) \leq n(f) \leq \beta N(f)$.

On a $\forall f \in E$, $\|f + f'\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$

$\alpha = 1$ convient

On pose $g = f + f'$.

$C : \begin{cases} y' + y = g \\ y(0) = 0 \end{cases}$ $(E_H) : y' + y = 0$.

$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in [0,1], y(x) = \lambda e^{-x}$

Méthode de variation de la cste :

$\forall t \in [0,1]$, $y(t) = \lambda(t) e^{-t}$ $(*)$

$\forall t \in [0,1]$, $y'(t) + y(t) = \lambda'(t) e^{-t} - \lambda(t) e^{-t} + \lambda(t) e^{-t} = g(t)$

Puis

$\forall t \in [0,1]$, $\lambda'(t) = g(t) e^t$.

Soit $x \in [0,1]$. $\int_0^x \lambda'(t)\,dt = \int_0^x g(t) e^t\,dt$

D'après $(*)$ $y(0) = \underbrace{\lambda(0) = 0}_{CI}$. $\lambda(x) = \int_0^x g(t) e^t\,dt$

donc $\forall x \in [0,1]$, $f(x) = \int_0^x \underbrace{g(t)}_{\leq \|g\|_\infty} \underbrace{e^{t-x}}_{\leq 1} \overbrace{dt}^{\leq 0}$.

Donc $\forall x \in [0,1]$, $|f(x)| \leqslant \int_0^x \|g\|_\infty \, dt \leqslant \underbrace{x}_{\leqslant 1} \|g\|_\infty$

$\|f\|_\infty \leqslant \|g\|_\infty \leqslant \|f+f'\|_\infty$. Puis $\|f'\|_\infty = \|f'+f-f\|_\infty$

d'où $\|f'\|_\infty \leqslant \|f+f'\|_\infty + \|f\|_\infty$

Enfin $\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \leqslant 3\|f'+f\|_\infty$. $\beta = 3$ convient.