Mines-Ponts MP 2021 Analyse.

306. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continue.

Mq l'image réciproque par $f$ de tout compact est compacte

$\iff |f(x)| \to +\infty$ lorsque $\|x\| \to +\infty$.

($\Leftarrow$). Sq $|f(x)| \xrightarrow[\|x\| \to +\infty]{} +\infty$. Soit $A$ un compact de $\mathbb{R}$.

$\underset{\in \mathbb{R}^n}{\underline{B}} = f^{-}(A)$. $B$ est fermé. Mq $B$ est borné.

RPA et Sq $B$ non borné. $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \in A\}$.

$\exists (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in B^{\mathbb{N}}$, $\|b_n\| \to +\infty$. Fixons $b_n$. Alors, $|\underbrace{f(b_n)}_{\in A}| \to +\infty$.

absurde car $A$ borné...

donc $B$ est un compact de $\mathbb{R}^n$.

($\Rightarrow$). Sq $\exists (x_n) \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ $|f(x)| \not\xrightarrow[\|x\| \to +\infty]{} +\infty$. Fixons $x$.

Par définition,

$$\exists M \in \mathbb{R}_+^*, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, \; \underset{n \geq n_0}{|f(x_n)| < M}.$$

Fixons $M$. On construit une extraction $\varphi$ tq $\forall n \in \mathbb{N}, |f(x_{\varphi(n)})| < M$.

$(|f(x_{\varphi(n)})|)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Th. de B.W : il existe $\psi$ une extrac° et $\ell \in \mathbb{R}_+$ tq

$$|f(x_{\psi(\varphi(n))})| \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell.$$

$A = \{|f(x_{\psi(\varphi(n))})|, n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$ est borné, fermé donc $A$ est compact.

$(x_{\psi(\varphi(n))})_{n \in \mathbb{N}} \in f^{-}(A)^{\mathbb{N}}$

$\|x_{\psi(\varphi(n))}\| \to +\infty$ donc $f^{-}(A)$ non compact.

Autre méthode : $\exists M \in \mathbb{R}_+^*, \forall K \in \mathbb{R}_+, \exists x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \geq K$ et $|f(x)| \leq M$.

On fixe $M$. Quid de $f^{-}([-M, +M])$ ?

↳ pas borné donc pas compact.