310.

DA de $\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(k)}{k}$ à deux termes :

On pose
$$\forall n \geqslant 2, \quad U_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(k)}{k}$$

$(U_n)_{n\geqslant 2}$ diverge.

On pose
$$f : \begin{array}{l} [2,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{\ln(x)}{x} \end{array}.$$
On a
$$\forall x \in [2,+\infty[, \quad f'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}.$$

x	2		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		↗		↘	

f est continue positive et décroissante sur $[3,+\infty[$. D'après le théorème de comparaison série-intégrale : fonctionne bien pour des puissances de log, mais bien pour des exp où il faut alors travailler sur des segments $[k, k+1[$...

$$\forall n \geqslant 4, \quad \int_3^{n+1} f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=3}^{n} f(k) \leqslant \frac{\ln(3)}{3} + \int_3^{n} f(t)\,dt$$

Soit $n \geqslant 4$. On a
$$\int_3^n \frac{\ln(t)}{t}\,dt = \left[\tfrac{1}{2}\ln(t)^2\right]_3^n = \tfrac{1}{2}\left(\ln(n)^2 - \ln(3)^2\right)$$

On a
$$\sum_{k=3}^{n} \frac{\ln(k)}{k} \sim \int_3^n \frac{\ln(t)}{t}\,dt \quad \text{d'où} \quad \sum_{k=3}^{n} \frac{\ln(k)}{k} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)^2}{2}.$$

$$\text{puis} \quad U_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)^2}{2}.$$

On pose
$$\forall n \geqslant 2, \quad T_n = U_n - \frac{\ln(n)^2}{2}.$$

Soit $n \geqslant 3$. On a :
$$T_n - T_{n-1} = \frac{\ln(n)}{n} - \frac{\ln(n)^2}{2} + \frac{\ln(n-1)^2}{2}.$$
$$\text{''} = \frac{1}{2n}\left(2\ln(n) - n\ln(n)^2 + n\ln\left(n\left(1-\tfrac{1}{n}\right)\right)^2\right)$$
$$\text{''} = \frac{1}{2n}\left(2\ln(n) - n\cancel{\ln(n)^2} + n\left(\cancel{\ln(n)^2} + 2\ln(n)\ln\left(1-\tfrac{1}{n}\right) + \ln\left(1-\tfrac{1}{n}\right)^2\right)\right)$$
$$\text{''} = \frac{1}{2n}\left(2\ln(n) + 2n\ln(n)\ln\left(1-\tfrac{1}{n}\right) + n\ln\left(1-\tfrac{1}{n}\right)^2\right).$$

Donc,

$$T_n - T_{n-1} = \frac{1}{2n}\left(2\ln(n) + 2n\ln(n)\left(-\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + n\left(-\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2\right)$$

$$'' = \frac{1}{2n}\left(2\cancel{\ln(n)} - 2\cancel{\ln(n)} - \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) + n\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right)$$

$$'' = \frac{1}{2n}\left(-\frac{\ln(n)}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

Donc :

$$T_n - T_{n-1} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{\ln(n)}{2n^2}$$) tg d'une ~~suite~~ série convergente de signe constant.

On a

$(T_n)_{n\geq 2}$ CV. On note $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} T_n$.

On a

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}(T_k - T_{k-1}) \underset{+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} -\frac{\ln(k)}{2k^2}$$

Puis $$\ell - T_n \underset{+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{-\ln(k)}{2k^2}.$$

On pose $$g : [2,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto -\frac{\ln(x)}{2x^2}.$$

g est de classe $\mathcal{C}^1$. On a :

~~$\forall x$~~ $-2g$ est continue, positive et décroissante sur $[3,+\infty[$.

Par théorème de comparaison série-intégrale,

$$\forall n\geq 3, \int_{n+1}^{+\infty} g(t)\,dt \geq \sum_{k=n+1}^{+\infty} g(k) \geq g(n+1) + \int_{n+1}^{+\infty} g(t)\,dt$$

Soit $n \geq 3$.

$$\int_{n+1}^{+\infty} -\frac{\ln(t)}{2t^2}\,dt = \left[+\frac{\ln(t)}{2t}\right]_{n+1}^{+\infty} - \int_{n+1}^{+\infty}\frac{1}{2t^2}\,dt$$) IPP licite car 2 des 3 qtités existent et fonctions de classe C^1...

$$'' = -\frac{\ln(n+1)}{2(n+1)} + \left[\frac{1}{2t}\right]_{n+1}^{+\infty}$$

$$'' = -\frac{\ln(n+1)}{2(n+1)} - \frac{1}{2(n+1)}$$

On obtient :

$$\ell - T_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{\ln(n)}{2n}$$

$$\ell - T_n = -\frac{\ln(n)}{2n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

donc $$U_n = \frac{\ln(n)^2}{2} + \ell + \frac{\ln(n)}{2n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).$$