311.

Convergence de $u_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(\frac{k}{n})\sin(\frac{k}{n^2})$.

On a

$$\forall x \geq 0, \ \sin(x) - x \leq \frac{x^3}{6} \text{ par convexité.}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $R_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(\frac{k}{n}) \frac{k}{n^2} = \frac{1-0}{n} \sum_{k=0}^{n} \sin(\frac{k}{n}) \frac{k}{n}$

On pose $f : \begin{array}{l} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x\sin(x) \end{array}$. f est continue.

Donc par théorème sur les sommes de Riemann, $R_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 t\sin(t)\,dt$

avec $\int_0^1 t\sin(t)\,dt = [-t\cos(t)]_0^1 + \int_0^1 \cos(t)\,dt = \sin(1) - \cos(1)$

$\forall k \in [0,n]$, $\left|\sin(\frac{k}{n})\sin(\frac{k}{n^2}) - \sin(\frac{k}{n})\frac{k}{n^2}\right| \leq \frac{1}{6}\left(\frac{k}{n^2}\right)^3 \leq \frac{1}{6}\frac{n^3}{n^6} \leq \frac{1}{6} \times \frac{1}{n^3}$.

Puis d'après l'inégalité,

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \sin(\frac{k}{n})\sin(\frac{k}{n^2}) - R_n\right| \leq \frac{1}{6} \times \frac{1}{n^2}$$

donc $\sum_{k=0}^{n} \sin(\frac{k}{n})\sin(\frac{k}{n^2}) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \sin(1) - \cos(1)$.

319.

$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}. \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = u_n + e^{-u_n} \end{cases}$. DA à deux termes de u_n.

On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} - u_n = e^{-u_n} > 0$$

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ car sinon $\ell = \ell + e^{-\ell} \Rightarrow e^{-\ell} = 0$ absurde.

$(u' = e^{-u} \to e^u u' = 1 \to e^{u(x)} = x + \text{cste})$ pour $\begin{pmatrix} u_{n+1} - u_n \\ u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \end{pmatrix}$

On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = e^{u_n}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= e^{u_{n+1}} - e^{u_n} \\ &= e^{u_n + e^{-u_n}} - e^{u_n} \\ &= e^{u_n}(e^{e^{-u_n}} - 1) \\ &= v_n(e^{\frac{1}{v_n}} - 1) \end{aligned}$$

donc $v_{n+1} - v_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n \times \frac{1}{v_n} \underset{+\infty}{\sim} 1$.

$$\sum_{k=0}^{n-1} v_{k+1} - v_k = v_n - v_0 \quad \text{puis} \quad v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n .$$

~~Soit $n \in \mathbb{N}$~~.

$$v_{n+1} - v_n \underset{+\infty}{=} v_n \left(\frac{1}{v_n} + \frac{1}{2v_n^2} + \frac{1}{6v_n^3} + o\left(\frac{1}{v_n^3}\right)\right)$$

$$v_{n+1} - v_n \underset{+\infty}{=} 1 + \frac{1}{2v_n} + \frac{1}{6v_n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) .$$

Puis

$$v_{n+1} - v_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n} .$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k - 1) \sim \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$$

$$v_n - v_1 - (n-1) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{2}$$

$$v_n = n + \frac{\ln(n)}{2} + o(\ln(n))$$

$$v_{n+1} - v_n - 1 - \frac{1}{2n} = v_n \left(e^{\frac{1}{v_n}} - 1\right) - 1 - \frac{1}{2n}$$

$$'' = v_n \left(\frac{1}{v_n} + \frac{1}{2v_n^2} + \frac{1}{6v_n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - 1 - \frac{1}{2n}$$

$$'' = 1 + \frac{1}{2v_n} + \frac{1}{6v_n^2} - 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) .$$

$$'' = \cancel{1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{n + \frac{\ln(n)}{2} + o(\ln(n))} + \frac{1}{6}\,\frac{1}{\left[n + \frac{\ln(n)}{2} + o(\ln(n))\right]^2} - \cancel{1} - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$'' = \frac{1}{2n}\left(1 - \frac{\ln(n)}{2n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right) + \frac{1}{6n^2} - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$'' = -\frac{\ln(n)}{4n^2} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right) .$$

Ainsi,

$$v_{n+1} - v_n - 1 - \frac{1}{2n} \sim \frac{-\ln(n)}{4n^2} \Big) \text{ tg série CV} .$$

$$v_n - n - \frac{\ln(n)}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L \quad \text{donc} \quad v_n = n + \frac{\ln(n)}{2} + L + o(1)$$

$$u_n = \ln(v_n) = \ln\left(n + \frac{\ln(n)}{2} + L + o(1)\right)$$

$$'' = \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{\ln(n)}{2n} + \frac{L}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

enfin

$$u_n \underset{+\infty}{=} \ln(n) + \frac{\ln(n)}{2n} + \frac{L}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) .$$