Mines-Ponts MP 2021.

322.

Soit (u_n) une suite réelle bornée telle que $u_n + \frac{1}{2} u_{n+1} \to 1$

Mq (u_n) converge et donner sa limite.

On pose

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - \frac{2}{3} \qquad \left(v_n + \frac{1}{2} v_{n+1} = u_n + \frac{1}{2} u_{n+1} - 1 \right).$$

On suppose $v_n + \frac{1}{2} v_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Selon le théorème de Bolzano-Weierstraß, il existe φ une extraction et ℓ tel que

$$u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

On montre $\ell = 0$. RPA et supposons que $\ell \neq 0$:

$$u_{\varphi(n)} + \frac{1}{2} u_{\varphi(n)+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

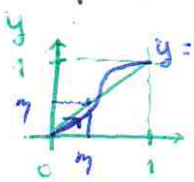
donc -2ℓ est val. d'adhérence de u

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(-2)^n \ell$ "

Or, $|(-2)^n \ell| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ absurde car u est bornée.

320. $\lambda \in]0,1[$. $\begin{cases} f \in C^2([0,1]) \\ f(0) = 0,\ f'(0) = \lambda \end{cases}$ $\begin{cases} u_0 \in [0,1] \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

Mq si u_0 est non nul et assez près de 0, $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers 0 et qu'il existe $C > 0$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} C\lambda^n$.



$f'(0) = \lambda$

$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lambda$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta \in]0,1],\ \forall x \in]0,\eta],\ \left| \frac{f(x)}{x} - \lambda \right| \leq \varepsilon.$$

$$\lambda - \varepsilon \leq \frac{f(x)}{x} \leq \varepsilon + \lambda$$

Pour $\varepsilon = \frac{1-\lambda}{2}$ on a en fixant η :

$$\forall x \in]0,\eta],\ 0 < \frac{f(x)}{x} < 1.$$

Soit $u_0 \in]0,\eta]$. Ainsi, u est décroissante et minorée.

Donc, u converge vers un point fixe.

donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}, \ v_n = \ln\left(\frac{u_n}{\lambda^n}\right)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. $v_{n+1} - v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n \times \lambda}\right) = \ln\left(\frac{f(u_n)}{u_n} \times \frac{1}{\lambda}\right)$.

Or, $\frac{f(u_n)}{u_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \lambda$.

$\frac{f(u_n)}{\lambda u_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$.

$v_{n+1} - v_n \sim \frac{f(u_n)}{\lambda u_n} - 1 \sim \frac{f(u_n) - \lambda u_n}{\lambda u_n}$

$|f(u_n) - f(0)| = |u_{n+1}|$

" $\leq \|f'\|_{\infty, [0,\eta]} |u_n|$

$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq \|f'\|_{\infty, [0,\eta]} |u_0|$.

$f \in C^2([0,1])$ et $f''(0) \neq 0$.

Donc $f(x) \underset{0}{=} \cancel{f(0)} + f'(0) \times x + \frac{f''(0)}{2} x^2 + o(x^2)$.

$f(u_n) \underset{+\infty}{=} \lambda u_n + f''(0) \times \frac{u_n^2}{2} + o(u_n^2)$

puis $v_{n+1} - v_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{f''(0) u_n^2}{2 \lambda u_n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{f''(0)}{2\lambda} u_n$.

Donc (v_n) converge. $\exists A \in \mathbb{R}, v_n \xrightarrow[+\infty]{} A$. Fixons A.

$\ln\left(\frac{u_n}{\lambda^n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} A$

$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^A \lambda^n$. On pose $c = e^A$ et on a bien $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} c\lambda^n$.