Mines-Ponts MP 2021 Analyse

363.

$f \in \mathcal{C}^0([1,+\infty[)$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \int_1^{1+\frac{x}{n}} n f(t^n)\,dt \end{array}$

cdv $t = 1 + \frac{u}{n}$ donne

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+,\quad f_n(x) = \int_0^x f\left(\left(1+\frac{u}{n}\right)^n\right) du .$$

On pose $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\quad g_n : \begin{array}{l} [0,x] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto f\left(\left(1+\frac{t}{n}\right)^n\right) \end{array}$

$h : \begin{array}{l} [0,x] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto f(e^t) \end{array}.$

Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

On a

① $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ g_n \in \mathcal{C}_{pm}([0,x],\mathbb{R})$.

② $g_n \xrightarrow{CS} h$

③ $f \in \mathcal{C}^0([0,e^x])$

TBA : $M_x = \sup_{[0,e^x]} |f|$. On a $\forall t \in [0,x], \forall n \in \mathbb{N}^*,$

$$0 \leq \left(1+\frac{t}{n}\right)^n \leq e^t \leq e^x .$$

Donc $t \mapsto M_x$ convient. ($\mathcal{L}^1$).

Le théorème de convergence dominée fournit

$$\int_0^x f\left(\left(1+\frac{t}{n}\right)^n\right) dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^x f(e^t)\,dt .$$

∗ Étude CVU :

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n = n$

$f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x \end{array}$

$$\int_0^n f\left(\left(1+\frac{t}{n}\right)^n\right) dt = \int_0^n \left(1+\frac{t}{n}\right)^n dt \ \ldots \sim 2^{n+1} .$$

$\int_0^n e^t\,dt \sim e^n$ donc on n'a pas CVU.