Mines-Ponts MP 2021 Analyse

364.

a) On intègre des fonctions polynomiales donc les f_n sont polynomiales.

b) Mq $(f_n)_{n\geq 0}$ CVS sur $[0,1]$ vers une fonction f et $\forall x \in [0,1],\ f(x) \leq e^x$.

On pose pour tout entier naturel n non nul :

$$H_n : \text{" } \forall x \in [0,1],\ |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \text{ "}$$

Initialisation :

$n=0$: $\forall x \in [0,1],\ f_1(x) = 1+x$.

$\forall t \in [0,1],\ |f_1(t) - f_0(t)| = t$

donc $\forall t \in [0,1],\ |f_1(t) - f_0(t)| \leq \frac{t}{1!}$ ok.

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que H_n. Mq H_{n+1}.

Soit $x \in [0,1]$. On a :

$$|f_{n+2}(x) - f_{n+1}(x)| \leq \int_0^x |f_{n+1}(t-t^2) - f_n(t-t^2)|\,dt$$

$$\text{"} \leq \int_0^x \frac{(t-t^2)^{n+1}}{(n+1)!}\,dt \quad (HR)$$

$$\text{"} \leq \int_0^x \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\,dt$$

$$\text{"} \leq \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} \quad \text{d'où } H_{n+1}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ \|f_{n+1} - f_n\|_\infty \leq \frac{1}{(n+1)!}$

donc

$$\sum_{n\geq 0} (f_{n+1} - f_n) \text{ CVN sur } [0,1] \quad (*)$$

Mines - Ponts MP 2021 Analyse.

364 (Suite) :

Ainsi $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f par propriété de cours (lien suite - série).

On a :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall x\in[0,1], \quad f_n(x) = f_0(x) + \sum_{k=0}^{n-1} (f_{k+1} - f_k)(x)$$

Puis $\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall x\in[0,1], \quad |f_n(x)| \leq 1 + \sum_{k=0}^{+\infty} |(f_{k+1} - f_k)(x)|$

Enfin, $\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall x\in[0,1], \quad |f_n(x)| \leq 1 + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \leq e^x$

et $\forall x\in[0,1], \ f(x) \leq e^x$ par passage à la limite.

c) $(*)$ fournit $\sum (f_{n+1} - f_n)$ $\overset{\text{CVN et}}{\text{CVU}}$ sur $[0, 1/2]$ en particulier

donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} (f_{k+1} - f_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} (f_{k+1} - f_k)}_{= S} \quad \text{sur } [0, 1/2]$$

enfin $f_n \xrightarrow{\text{CU}} f_0 + S$ sur $[0, 1/2]$

d) Soit $n\in\mathbb{N}$. Soit $x\in[0,1]$.

$$f_0(x) + f_0(1-x) = 2.$$

Pour $n>0$:

$$f_n(1-x) = 1 + \int_0^{1-x} f_{n-1}(t-t^2)\,dt$$

$$\text{〃} = 1 + \int_1^{x} - f_{n-1}(u-u^2)\,du \qquad \begin{cases} u = 1-t \\ dt = -du \end{cases}$$

$$\text{〃} = 1 - \int_1^{x} f_{n-1}(u-u^2)\,du$$

$$\text{〃} = 1 + \int_x^{1} f_{n-1}(u-u^2)\,du$$

Puis $f_n(1-x) + f_n(x) = 1 + \int_0^x f_{n-1}(u-u^2)\,du + \int_x^1 f_{n-1}(u-u^2)\,du + 1$

$f_n(1-x) + f_n(x) = f_n(1) + 1$ puis $f(1-x) + f(x) = f_n(1) + 1$

$\begin{cases} f_n \text{ CU sur } [0, \frac{1}{2}] \\ \forall n\in\mathbb{N}, \ f_n\in C^0([0,1/2]) \end{cases}$ donc f est continue sur $[0, 1/2]$ puis sur $[0,1]$

e) Mq $f \in C^\infty([0,1], \mathbb{R})$.

Soit $x \in [0,1]$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; f_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x f_n(t-t^2)\,dt$$

On a $\begin{cases} f_{n+1}(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x) \\ 1 + \int_0^x f_n(t-t^2)\,dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 + \int_0^x f(t-t^2)\,dt. \end{cases}$

Par unicité de la limite,

$$\forall x \in [0,1], \; f(x) = 1 + \int_0^1 f(t-t^2)\,dt.$$

Selon le théorème fondamental de l'analyse,

$$\forall x \in [0,1], \; f'(x) = f(x-x^2),$$

f continue sur $[0,1]$...

Donc par itérations, $f \in C^\infty([0,1], \mathbb{R})$.