Mines-Ponts MP 2021 Analyse.

366. Th de classe $C^k$ : On peut à k donné simplement montrer la cvu de la série des dérivées kième sur tout segment.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^\alpha x} \end{array}$

a) Mq $f \in C^\infty(\mathbb{R}_+^*)$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{-n^\alpha x} \end{array}.$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \in C^\infty(\mathbb{R}_+^*)$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$f_n^{(k)}(x) = (-n^\alpha)^k e^{-n^\alpha x}.$$

Soit $\tilde{K}$ un segment de $\mathbb{R}_+^*$ : $\exists a \in \mathbb{R}_+^*$, $\tilde{K} \subset [a, +\infty[$. Fixons a.

On a

$$\forall x \in \tilde{K}, \ |f_n^{(k)}(x)| \leq \underbrace{(n^\alpha)^k e^{-n^\alpha a}}_{o\left(\frac{1}{n^2}\right)}.$$

donc $(f_n)^{(k)}$ CVU sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.

Le théorème de dérivation $C^\infty$ fournit $f \in C^\infty(\mathbb{R}_+^*)$.

b) Equivalent de $f$ en $+\infty$ ?
limite

On a

* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.
* $+\infty \in [1, +\infty[$
* $\sum f_n$ CVU sur $[1, +\infty[$.

366 (suite)

Le théorème de la double limite (séries numériques) fournit

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0 .$$

On pose

$$g : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto e^{-x} \end{array}$$

On a $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1 + \underbrace{\sum_{n=2}^{+\infty} e^{(1-n^\alpha)x}}_{:= h(x)}$

De plus,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \; u_k : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto e^{(1-n^\alpha)x} \end{array} \quad \text{vérifie}$$

* $\forall k \in \mathbb{N}^*, \; u_k(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

* Mq $\sum u_n$ CVU sur $[1, +\infty[$.

$\forall x \in [1, +\infty[, \; |u_n| = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ ok.

* $+\infty \in \overline{[1, +\infty[}$

Donc de nouveau, le TDL fournit $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0$.

Ainsi, $f(x) = g(x) + o(g(x))$ puis $f \underset{x \to +\infty}{\sim} g$.

c) Limite et équivalent de $f$ en $0^+$ ?

$f$ est $\left|\begin{array}{l}\text{majorée} \\ \downarrow\end{array}\right.$. Selon le théorème de la limite monotone, $f$ admet une limite en $0^+$, notée $\ell$.

* Sq $\ell \in \mathbb{R}_+$. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) \leq \ell$

puis

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall N \in \mathbb{N}^*, \sum_{n=1}^{N} e^{-n^\alpha x} \leq \ell$$

Par passage à la limite : $\forall N \in \mathbb{N}^*, \; N \leq \ell$ puis $\ell = +\infty$.

Équivalent ? en $0^+$ Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On pose :

$$g_x : \begin{array}{l} [1, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto e^{-t^\alpha x} \end{array}$$

$g_x$ est continue $\searrow$ et positive. Selon le théorème de comparaison série-intégrale, $(g_x \in \mathcal{L}^1([1, +\infty[))$ :

Soit $k \in \mathbb{N}^2$.

$$\int_{k-1}^{k} e^{-t^\alpha x} dt \geqslant e^{-k^\alpha x} \geqslant \int_{k}^{k+1} e^{-t^\alpha x} dt$$

d'où $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha x} dt \geqslant f(x) \geqslant \int_1^{+\infty} e^{-t^\alpha x} dt$

puis $\displaystyle 1 \geqslant \frac{f(x)}{\int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha x} dt} \geqslant 1 - \frac{\int_0^1 e^{-t^\alpha x} dt}{\int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha x} dt}$

On effectue le changement de variable

$$u = t^\alpha x$$

(bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$)

On a $\begin{cases} du = \alpha t^{\alpha-1} x \, dt \\ t = \left(\frac{u}{x}\right)^{1/\alpha} \text{ et } dt = \frac{1}{\alpha x} du \left(\frac{u}{x}\right)^{\frac{1}{\alpha}-1} \end{cases}$

donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha x} dt = \int_0^{+\infty} e^{-u} \times \frac{1}{\alpha x} \left(\frac{u}{x}\right)^{\frac{1}{\alpha}-1} du$

$\displaystyle \quad\quad '' \quad = \frac{1}{\alpha (x)^{1/\alpha}} \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1} du$

$\displaystyle \quad\quad '' \quad = \frac{1}{\alpha x^{1/\alpha}} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$

Or, $\displaystyle\int_0^1 e^{-t^\alpha x} dt \leqslant 1$ donc $\displaystyle\int_0^1 e^{-t^\alpha x} dt \underset{0^+}{=} o\left(\frac{1}{x^{1/\alpha}}\right)$

enfin $\displaystyle f(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha x^{1/\alpha}}$.