Mines-Ponts MP 2021 Analyse.

372.

$$f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$$

a) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 + \frac{x}{n} > 0$

donc $D_f \subset]-1, +\infty[$.

Soit $x \in]-1, +\infty[$.

$$\frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \sim \frac{x}{n^2} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Ainsi, $D_f =]-1, +\infty[$.

Dérivabilité : On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, \; f_n : \begin{array}{l} D_f \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \end{array}$.

① $\forall n \in \mathbb{N}^*, \; f_n \in C^1(D_f)$

② $\sum_{n \geq 1} f_n$ CVS.

③ Mq $\sum_{n \geq 1} f_n'$ CVU sur tout segment de D_f.

Soit K un segment de D_f. On note $K = [a,b]$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in D_f, \; f_n'(x) = \frac{1}{n^2} \frac{1}{1 + \frac{x}{n}}$$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in K, \; |f_n'(x)| \leq \frac{1}{n^2} \frac{1}{1 + \frac{a}{n}} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

ainsi, $\sum_{n \geq 1} f_n'$ CVU sur tout segment de D_f.

Par théorème de classe C^1, $f \in C^1(D_f)$.

b) Limite et équivalent de f ?

On pose $g_x : \left\{ \begin{array}{l} [1, +\infty[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{1}{t^2 + tx} \end{array} \right.$. g_x est continue positive et $\searrow$.

On a de plus $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2+tx}\,dt \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{t^2+tx} \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2+tx} + \frac{1}{1+x}$.

De plus, On peut décomposer $\dfrac{1}{t^2+tx}$:

$$\frac{1}{t^2+tx} = \frac{1}{xt} - \frac{1}{x(t+x)}$$

donc

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t(t+x)}\,dt = \frac{1}{x} \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) dt$$

$$\text{"} \quad = \frac{1}{x} \left[\ln\left(\frac{t}{t+x}\right) \right]_1^{+\infty}$$

$$\text{"} \quad = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

$f'(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{\ln(x)}{x}$ puis en intégrant :

$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln^2(x)}{2}.$$

<u>Autre méthode :</u>

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$h_x : \begin{cases} [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \frac{1}{t} \ln\left(1 + \frac{x}{t}\right) \end{cases}.$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} \ln\left(1 + \frac{x}{t}\right) dt \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t} \ln\left(1 + \frac{x}{t}\right) dt + \ln(1+x)$$

On a $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{x}{t}\right)}{t}\,dt = - \int_{x}^{0} \frac{\ln(1+u)}{\frac{x}{u}} \frac{x}{u^2}\,du$ $\quad \left(dt = -\frac{x}{u^2}\right)$.

$$= \int_0^x \frac{\ln(1+u)}{u}\,du$$

$$\underset{+\infty}{\sim} \int_1^x \frac{\ln(1+u)}{u}\,du \quad \text{(intégra° de relat° de comparaisons)}$$

$$\underset{+\infty}{\sim} \int_1^x \frac{\ln(u)}{u}\,du$$

$$\underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln^2(x)}{2}.$$