Épreuves orales
des Écoles Normales Supérieures

2019

Algèbre

1 $\boxed{\text{AG} : \gamma}$ *(PLSR, proprement infaisable)*

Existe-t-il une fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $f \circ f = \exp$?

2 $\boxed{\text{AG} : \alpha}$ *(L)*

Soit $E = \left\{ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \; ; \; (a,b,c) \in \mathbb{N}^{*3} \right\} \cap \left]0,1\right[$. Déterminer $\sup E$.

3 $\boxed{\text{AG,Sn} : \alpha}$ *(P)*

L'ensemble des permutations de $\mathbb{N}$ est-il dénombrable ?

4 $\boxed{\text{AG} : \alpha}$ *(PLSR)*

Quels sont les éléments n de $\mathbb{N}^*$ tels que $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$?

5 $\boxed{\text{AG} : \beta}$ *(PLSR)*

Si $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\sigma(n)$ la somme des diviseurs de n dans $\mathbb{N}^*$.
On dit qu'un élément $P \in \mathbb{N}^*$ est parfait si $\sigma(P) = 2P$.

(a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $2^p - 1$ est premier. Montrer que p est premier.

(b) Montrer que, si p est un élément de $\mathbb{N}^*$ tel que $2^p - 1$ est premier, alors $2^{p-1}\left(2^p - 1\right)$ est parfait.

On admet dans la suite que tout nombre parfait pair est de la forme précédente. On considère un nombre parfait pair, que l'on écrit donc sous la forme $P = 2^{p-1}\left(2^p - 1\right)$ où $p \in \mathbb{N}^*$ est tel que $2^p - 1$ est premier. Dans les question **(c)**,**(d)** et **(e)**, on suppose $p \neq 2$.

(c) Déterminer la classe de P modulo 12.

(d) Montrer que $P - 1$ et $P + 1$ ne sont pas des carrés.

(e) En considérant la classe de $P - 1$ modulo 4 et celle de $P + 1$ modulo 3, montrer que $P - 1$ et $P + 1$ ne sont pas parfaits.

(f) Montrer qu'il n'existe pas de couple de nombres parfaits consécutifs.

(g) Prouver le résultat admis.

6 $\boxed{\text{AG} : \gamma}$ *(L)*

(a) Soit α un nombre réel irrationnel.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe (p,q) de $\mathbb{Z} \times [\![1,n]\!]$ tel que $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{qn}$.

(b) Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On suppose que d n'est pas un carré parfait.

Montrer que l'équation $a^2 - db^2 = 1$ possède une solution $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ telle que $b \neq 0$.

7 $\boxed{\text{AG} : \beta}$ *(L)*

Montrer que, si m et n sont dans $\mathbb{N}^*$, n divise $\sum\limits_{k=1}^{n} m^{k \wedge n}$.

8 $\boxed{\text{AG} : \alpha}$ *(P)*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $g(n)$ désigne le nombre de diviseurs premiers de n comptés avec multiplicité ; par exemple, $g(5^2) = 2$. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{d|n} (-1)^{g(d)}$.

9 AG : β (PLSR)

(a) Soit A une partie de $\mathbb{N}^*$ non vide et stable par addition. On note p le pgcd des éléments de A. Montrer qu'il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_1,\ pn \in A$.

(b) Soient G un ensemble non vide et $\mathcal{A} \subset G \times G$. Étant donné $(x, y) \in G^2$, on appelle chemin de x à y toute suite $(\ell_0, \ldots, \ell_n)$ d'éléments de $\mathcal{A}$ dans laquelle x est la première composante de ℓ_0, y la deuxième de ℓ_n, et pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, la deuxième composante de ℓ_k est la première composante de ℓ_{k+1}. On dit alors que $n+1$ est la longueur d'un tel chemin. On suppose que pour tout $(x, y) \in G^2$ il existe un chemin de x à y. Étant donné $x \in G$, on note T_x le pgcd des longueurs des chemins de x à x. Montrer que $x \mapsto T_x$ est constante.

(c) On conserve les hypothèses de la question précédente. Montrer que la valeur de $x \mapsto T_x$ est le plus grand entier naturel p pour lequel il existe une famille $(G_k)_{k \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}$ partitionnant G et dans laquelle, pour tout $(x, y) \in \mathcal{A}$, il existe $i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ tel que $x \in G_i$ et $y \in G_{i+1}$.

10 AG : $\alpha\,\Delta$ (SR)

On note $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib\,;(a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$. Pour $z \in \mathbb{Z}[i]$, soit $N(z) = |z|^2$.

(a) Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$. Déterminer ses éléments inversibles.

(b) Si x et y sont deux éléments de $\mathbb{Z}[i]$ et $x \neq 0$, montrer qu'il existe $(q, r) \in \mathbb{Z}[i]^2$ tel que $y = qx + r$ et $N(r) < N(x)$. En déduire que les idéaux de $\mathbb{Z}[i]$ sont principaux.

(c) Pour n et k dans $\mathbb{N}^*$, soit $s_{n,k} = \frac{1}{4} \sum\limits_{\substack{x \in \mathbb{Z}[i] \\ N(x) = n}} x^k$. Montrer que $s_{n,k} \in \mathbb{Z}[i]$.

11 AG : γ (L)

Soit $d \in \mathbb{N}^*$ sans facteur carré. On note $\mathbb{Z}[d] = \{a + b\sqrt{d} \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$ et on pose $N(a + b\sqrt{d}) = a^2 - db^2$ pour tout $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$.

(a) Montrer qu'il existe $\omega \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ tel que $\{x \in \mathbb{Z}[d] : N(x) = 1\} = \{\varepsilon\omega^k \mid \varepsilon \in \{-1, 1\}, k \in \mathbb{Z}\}$.

(b) Montrer que $\omega \neq \pm 1$.

On commencera par montrer qu'il existe un réel $C > 0$ tel que $\{x \in \mathbb{Z}[d] : \ |N(x)| \leqslant C\}$ soit infini.

12 AG : γ (P)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $g(n)$ le maximum des ordres des éléments de $\mathcal{S}_n$.

Pour quels n l'entier $g(n)$ est-il impair ?

13 AG,Sn : α (P)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $g(n)$ le maximum des ordres des éléments de $\mathcal{S}_n$.

Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{g(n)}{n^k} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

14 AG : γ (PLSR)

Soient $(G, .)$ un groupe, $\mathrm{Aut}(G)$ l'ensemble de ses automorphismes.

(a) Montrer que $(\mathrm{Aut}(G), \circ)$ est un groupe.

(b) Quels sont les groupes finis tels que $\mathrm{Aut}(G)$ soit réduit à un élément ?

15 AG : α (P)

Les sous-groupes stricts de $(\mathbb{Q}, +)$ sont-ils monogènes ?

16 AG,Sn : α (P)

Soit G un groupe.

(a) On suppose que G possède un nombre fini de sous-groupes. Montrer que G est fini.

(b) Le résultat de la question précédente subsiste-t-il en remplaçant « fini » par « dénombrable » ?

17 AG : β (P)

Soient G un groupe, $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, E_δ l'ensemble des applications f de G dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x, y) \in G^2,\ |f(xy) - f(x)f(y)| \leqslant \delta.$$

(a) Montrer que, si $f \in E_\delta$ n'est pas bornée, alors $\forall (x, y) \in G^2,\ f(xy) = f(x)f(y)$.

(b) Trouver $C > 0$ tel que, pour toute $f \in E_\delta$, on ait :

$$\text{soit} \quad \forall x \in G,\ |f(x)| \leqslant C \qquad \text{soit} \quad \forall (x, y) \in G^2,\ f(xy) = f(x)f(y).$$

18 $\boxed{\text{AG,Sn} : \beta}$ *(P)*

Soit $(G,.)$ un groupe. Si f est une fonction de G dans $\mathbb{R}$, on dit que f est un quasi-morphisme s'il existe $C > 0$ tel que $\forall (x,y) \in G^2,\ |f(xy) - f(x) - f(y)| \leqslant C$ et que f est un quasi-caractère si $\forall (n,x) \in \mathbb{Z} \times G,\ f(x^n) = nf(x)$. Montrer que, pour tout quasi-morphisme M de G dans $\mathbb{R}$, il existe un unique quasi-morphisme qui est aussi un quasi-caractère Q de G dans $\mathbb{R}$ tel que $M - Q$ soit bornée.

19 $\boxed{\text{AG} : \beta}$ *(PLSR)*

Soit p un nombre premier impair. Soit $a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{0\}$.
On pose $m_a : x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \mapsto ax$. Montrer que m_a est une permutation de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, et qu'elle est de signature 1 si et seulement si a est un carré dans l'anneau $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

20 $\boxed{\text{AG} : \alpha}$ *(SR)*

Soient G un groupe fini, H et H' deux sous-groupes de G. On dit que H et H' sont conjugués dans G lorsqu'il existe $g \in G$ tel que $H = gH'g^{-1}$.

(a) Montrer que si H et H' sont conjugués dans G alors ils sont isomorphes.
(b) Donner un contre-exemple à l'implication réciproque.
(c) On suppose H isomorphe à H'.
(i) Vérifier que $\varphi : g \in G \mapsto [h \mapsto gh] \in \mathcal{S}(G)$ est un morphisme injectif.
(ii) Montrer que s'il existe $\gamma \in \mathcal{S}(G)$ tel que $\varphi(H) = \gamma^{-1}\varphi(H')\gamma$ et $\gamma(1_G) = 1_G$, alors γ se restreint à un isomorphisme de H sur H'.
(iii) Montrer qu'il existe un entier $r \geqslant 1$ et des éléments $x_1, \ldots, x_r, x'_1, \ldots, x'_r$ de G tels que $(Hx_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ et $(H'x'_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ partitionnent G.
(iv) En déduire que $\varphi(H)$ et $\varphi(H')$ sont conjugués dans $\mathcal{S}(G)$.

21 $\boxed{\text{AG} : \alpha}$ *(PLSR)*

Soit $(G,.)$ un groupe fini. Pour $x \in G$, on note $w(x)$ l'ordre de x.

(a) Pour $x \in G, k \in \mathbb{Z}$, exprimer $w(x^k)$ à l'aide de $w(x)$ et k.
(b) Soit $x \in G$. On suppose que $w(x) = mn$ où m et n sont deux éléments premiers entre eux de $\mathbb{N}^*$. Montrer qu'existent y et z dans G, d'ordres respectifs m et n, tels que $x = yz = zy$.
(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que le nombre de $x \in G$ tels que $w(x) = n$ est divisible par $\varphi(n)$.
(d) Soit $d \in \mathbb{N}^*$ un diviseur de $|G|$. On écrit $d = p^\alpha s$ où p est premier, $\alpha \in \mathbb{N}$, s entier premier à p. On note $A_{dp} = \{x \in G\ ;\ w(x) | dp\}$ et $A_d = \{x \in G\ ;\ w(x) | d\}$. Montrer que $p^\alpha(p-1)$ divise $|A_{dp} \setminus A_d|$.

22 $\boxed{\text{AG,Pol} : \beta}$ *(PLSR)*

(a) Soit G un groupe fini d'ordre n. Montrer que G est cyclique si et seulement si, pour tout $d \in \mathbb{N}^*$ divisant n, G admet au plus un sous-groupe de cardinal d.
(b) Soit $\mathbb{K}$ un corps fini. Montrer que $(\mathbb{K}^*, \times)$ est cyclique.
(c) Soient p un nombre premier impair, $\mathbb{K}$ un corps fini de cardinal p^2. Montrer que $X^4 + 1$ est réductible sur $\mathbb{K}$.

23 $\boxed{\text{AG} : \alpha}$ *(PLSR)*

Si G est un groupe, on dit que G vérifie la propriété $\mathcal{P}$ si, pour tout sous-groupe H de G, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que H soit le sous-groupe de G engendré par $\{g^k\ ;\ g \in G\}$.

(a) Montrer qu'un groupe monogène vérifie $\mathcal{P}$.
(b) Montrer que, si le groupe G vérifie $\mathcal{P}$ et si φ est un morphisme de groupes de source G, alors $\varphi(G)$ vérifie $\mathcal{P}$.
(c) Montrer que, si G vérifie $\mathcal{P}$ et est infini, le seul élément d'ordre fini de G est e.

24 $\boxed{\text{AG} : \beta}$ *(PLSR)*

Soient $n \geqslant 2$ un entier, a et b deux éléments distincts de $\{1, \ldots, n\}$, $G_{a,b}$ le sous-groupe de $\mathcal{S}_n$ engendré par $(a\,b)$ et $(1\,2 \ldots n)$. À quelle condition a-t-on $G_{a,b} = \mathcal{S}_n$?

25 $\boxed{\text{AG} : \gamma}$ *(PLSR)*

(a) Montrer que tout automorphisme de $\mathcal{S}_4$ est intérieur.
(b) Déterminer un automorphisme non intérieur de $\mathcal{S}_6$.

26 $\boxed{\text{AG,F} : \beta}$ *(PLSR)*

Soient A l'anneau $C([0,1], \mathbb{R})$, $c \in [0,1]$ et $I_c = \{f \in A\ ;\ f(c) = 0\}$.

(a) Montrer que I_c est un idéal de A et que les seuls idéaux de A contenant I_c sont A et I_c.
(b) Montrer que I_c n'est pas de la forme fA pour un f de A.
(c) Montrer que I_c n'est pas de la forme $f_1A + \cdots + f_mA$ où $m \in \mathbb{N}^*$ et où les f_i sont des éléments de A.

27 $\boxed{\text{Pol} : \beta}$ *(P)*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)X^k$. Le polynôme P a-t-il des racines de module majoré par 1 ?

28 $\boxed{\text{Pol} : \gamma}$ *(L)*

Quels sont les $P \in \mathbb{Z}[X]$ tels que $\forall z \in \mathbb{U}, |P(z)| \leqslant 1$?

29 $\boxed{\text{Pol} : \beta}$ *(P)*

Déterminer les $P \in \mathbb{C}[X]$ unitaires tels que $\forall z \in \mathbb{U}, |P(z)| \leqslant 1$.

30 $\boxed{\text{Pol} : \gamma}$ *(L)*

(a) Soient A, B, C trois éléments de $\mathbb{C}[X]$ premiers entre eux dans leur ensemble tels que $A + B + C = 0$. Montrer que le nombre de racines distinctes de ABC est minoré par $\max(\deg(A), \deg(B), \deg(C)) + 1$.

(b) Soit $n \geqslant 3$ un entier.

Décrire l'ensemble des triplets (P, Q, R) d'éléments de $\mathbb{C}[X]$ tels que $P^n + Q^n + R^n = 0$.

31 $\boxed{\text{Pol,F} : \gamma}$ *(L)*

Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{Z}[X]$ ayant huit racines de module 1, deux racines dans $\mathbb{R}_+^*$, tel que $P(0) = 1$ et irréductible sur $\mathbb{Q}$.

32 $\boxed{\text{Pol} : \gamma}$ *(P)*

On note $(p_n)_{n \geqslant 1}$ la suite des nombres premiers rangée dans l'ordre croissant.

Montrer que $P = X^n + p_1 X^{n-1} + p_2 X^{n-2} + \cdots + p_n$ ne peut s'écrire comme produit de deux polynômes non constants de $\mathbb{Z}[X]$.

33 $\boxed{\text{Pol} : \beta}$ *(P)*

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(\mathbb{R}_+^*) \subset \mathbb{R}_+^*$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $(1+X)^n P$ soit à coefficients dans $\mathbb{R}_+$.

34 $\boxed{\text{Pol,Sn} : \beta}$ *(P)*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma \in \mathcal{S}_n$, soit $\text{inv}(\sigma)$ le nombre de couples (i,j) de $\{1, \ldots, n\}^2$ tels que $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$.

(a) Montrer que $\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} X^{\text{inv}(\sigma)} = \prod_{k=1}^{n-1} \left(\sum_{i=0}^{k} X^i \right)$.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f(n)$ le nombre de $\sigma \in \mathcal{S}_n$ tels que $\text{inv}(\sigma)$ soit divisible par $n+1$. Montrer qu'il y a une infinité de nombres premiers p tels que $f(p-1) > \frac{(p-1)!}{p}$ et une infinité de nombres premiers p tels que $f(p-1) < \frac{(p-1)!}{p}$.

35 $\boxed{\text{Pol} : \beta}$ *(PLSR)*

On munit $\mathbb{R}^2$ de sa norme euclidienne standard, et on note S sa sphère unité. Soit $P \in \mathbb{R}[X, Y]$. On suppose que $P(x, y)$ tend vers $+\infty$ quand $\|(x, y)\|$ tend vers $+\infty$.

(a) Montrer que pour tout $(x, y) \in S$, la fonction $t \mapsto \frac{P(tx, ty)}{t^2}$ tend en $+\infty$ vers une limite $c_{x,y} \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$.

(b) On note $A = \{(x, y) \in S : \ c_{x,y} \in \mathbb{R}\}$. Montrer que A est fini ou égal à S.

36 $\boxed{\text{AL} : \alpha}$ *(P)*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Trouver les fonctions f de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall (X, Y) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $f(XY) \leqslant \min\{f(X), f(Y)\}$.

37 $\boxed{\text{AL} : \alpha}$ *(P)*

Soient $(m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, $A_1, \ldots, A_m$ des éléments idempotents de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire vérifiant $A_k A_k = A_k$. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} (n - \text{rg}(A_i)) \geqslant \text{rg}\left(I_n - \prod_{i=1}^{m} A_i \right)$.

38 $\boxed{\text{GA} : \gamma}$ *(SR)*

On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite bistochastique lorsque tous ses coefficients sont positifs et que la somme de ses coefficients sur une ligne ou une colonne quelconque vaut 1. On note $D_n(\mathbb{R})$ l'ensemble formé par ces matrices.

(a) Montrer que $D_n(\mathbb{R})$ est convexe.

(b) Un élément P de $D_n(\mathbb{R})$ est dit extrémal lorsque :

$$\forall (A,B) \in D_n(\mathbb{R})^2,\ \forall t \in]0,1[,\ (1-t)A + tB = P \Rightarrow A = B.$$

Montrer que toute matrice de permutation est un élément extrémal de $D_n(\mathbb{R})$.

(c) Montrer que tout élément extrémal de $D_n(\mathbb{R})$ est une matrice de permutation.

39 $\boxed{\text{AL} : \alpha}$ *(P)*

Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ avec $B^2 = B$. Montrer que $\mathrm{rg}(AB - BA) \leqslant \mathrm{rg}(AB + BA)$.

40 $\boxed{\text{Red,AL} : \alpha}$ *(P)*

Pour $P = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k X^k$ dans $\mathbb{R}[X]$, soit f_P l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ défini par

$$\forall Q \in \mathbb{R}[X],\ f_P(Q) = \sum_{k=0}^{d} a_k Q^{(k)}.$$

(a) L'endomorphisme f_P est-il un automorphisme ?

(b) Étudier les propriétés de f_P.

41 $\boxed{\text{Top,Red} : \alpha}$ *(P)*

Soient $n \geqslant 2$ un entier, A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si $j \in \{1,\dots,n\}$, soient A_j la matrice obtenue à partir de A en remplaçant la première colonne de A par la j-ième colonne de B, B_j la matrice obtenue à partir de B en remplaçant la j-ième colonne de B par la première colonne de A. Montrer que $\det(A)\det(B) = \sum\limits_{j=1}^{n} \det(A_j)\det(B_j)$.

42 $\boxed{\text{AL,Top} : \beta}$ *(P)*

Soient $n \geqslant 2$ un entier, A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $t_1,\dots,t_{n+1}$ des nombres réels deux à deux distincts. Montrer que $\forall i \in \{1,\dots,n+1\}$, $\det(A + t_i B) = 0$ si et seulement s'il existe deux sous-espaces V et W de $\mathbb{R}^n$ tels que $A(V) \subset W, B(V) \subset W$ et $\dim(W) < \dim(V)$.

43 $\boxed{\text{AL,AG,Pol} : \beta}$ *(L)*

On note $\mathbb{U}_\infty = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{U}_n$. On note F l'ensemble des fonctions définies sur un ensemble de la forme $\mathbb{U}_\infty \setminus A$, où A est fini, et à valeurs dans $\mathbb{C}$. Deux telles fonctions f et g sont dites équivalentes, et on note $f \sim g$, lorsque f et g coïncident en dehors d'une partie finie de $\mathbb{U}_\infty$.

(a) Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur F.

Munir l'ensemble quotient $\mathcal{F} = F/\sim$ d'une structure naturelle d'anneau.

(b) Montrer qu'en associant à toute fraction $R \in \mathbb{C}(X)$, dont l'ensemble des pôles est noté $\mathcal{P}$, la classe d'équivalence de $z \in \mathbb{U}_\infty \setminus \mathcal{P} \mapsto R(z)$, on définit un morphisme injectif i de l'anneau $\mathbb{C}(X)$ dans l'anneau $\mathcal{F}$. Vérifier que la loi externe $(R,f) \mapsto i(R)f$ enrichit le groupe $(\mathcal{F},+)$ en un $\mathbb{C}(X)$-espace vectoriel.

(c) Pour $u \in \mathbb{U}_\infty$, on note $o(u)$ l'ordre de u dans le groupe $\mathbb{U}$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note f_k la classe d'équivalence de la fonction $u \in \mathbb{U}_\infty \mapsto o(u)^k$. Montrer que $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est libre dans le $\mathbb{C}(X)$-espace vectoriel $\mathcal{F}$.

44 $\boxed{\text{Red} : \alpha}$ *(P)*

Soient E un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel, $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur.

L'endomorphisme φ de $\mathcal{L}(E)$ défini par $\forall u \in \mathcal{L}(E)$, $\varphi(u) = u \circ p + p \circ u$ est-il diagonalisable ?

45 $\boxed{\text{Red} : \beta}$ *(PLSR)*

Pour $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$, on pose $[A,B] = AB - BA$.

(a) Montrer que $[[A,B]^2, C] = 0$ pour tout $(A,B,C) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})^3$.

(b) Montrer que, pour tout $(A,B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})^2$,

$$AB + BA - \mathrm{Tr}(A)\,B - \mathrm{Tr}(B)\,A + \big(\mathrm{Tr}(A)\,\mathrm{Tr}(B) - \mathrm{Tr}(AB)\big)\,I_2 = 0.$$

46 $\boxed{\text{Red} : \beta}$ *(L)*

(a) Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ unitaire de degré 2 de discriminant non nul. Montrer que les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ ayant P pour polynôme caractéristique sont toutes semblables.

(b) Soient p un nombre premier impair, et $P \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$ unitaire de degré 2 sans racine multiple. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ de polynôme caractéristique P. Déterminer la probabilité pour qu'une matrice B tirée uniformément dans $\mathcal{GL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ commute avec A.

47 $\boxed{\text{Red,Pol} : \beta}$ *(PLSR)*

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est cyclique s'il existe $x \in E$ tel que $E = \{P(f)(x)\ ;\ P \in \mathbb{C}[X]\}$.

(a) On suppose que f est cyclique. Montrer que tout endomorphisme induit par f est cyclique et que l'ensemble des sous-espaces de E stables par f est fini.

(b) On suppose que l'ensemble des sous-espaces de E stables par f est fini. Montrer que f est cyclique.

48 $\boxed{\text{Red} : \beta\,\Delta}$ *(SR)*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall (i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2,\ A_{i,j} \in \mathbb{R}_+^* \qquad \text{et} \qquad \forall i \in \{1,\ldots,n\},\ \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} = 1.$$

(a) Montrer qu'il existe $V \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tel que $VA = V$.

(b) On note $|V|$ l'élément de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ dont les coordonnées sont les valeurs absolues de celles de V. Montrer que $|V|A = |V|$.

(c) Montrer qu'il existe un unique $W \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ à coordonnées dans $\mathbb{R}_+$ et de somme 1 tel que $WA = W$.

49 $\boxed{\text{AL} : \alpha\,\Delta}$ *(SR)*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall (i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2,\ A_{i,j} \in \mathbb{R}^+$ et que $\forall i \in \{1,\ldots,n\},\ \sum\limits_{j=1}^{n} A_{i,j} = 1$.

(a) On suppose que les $A_{i,j}$, $1 \leqslant i,j \leqslant n$ sont tous non nuls. Montrer que $\mathrm{Ker}(A - I_n)$ est de dimension 1. On pourra remarquer que, pour un vecteur arbitraire X de $\mathrm{Ker}(A - I_n)$, tous les coefficients de X ont même signe.

(b) On suppose maintenant qu'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que A^r ait tous ses coefficients strictement positifs. Montrer que $\mathrm{Ker}(A - I_n)$ est de dimension 1.

50 $\boxed{\text{Red,Top} : \beta\,\Delta}$ *(SR)*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On suppose que $\forall (i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2,\ A_{i,j} \in \mathbb{R}_+^*$ et que $\forall i \in \{1,\ldots,n\},\ \sum\limits_{j=1}^{n} A_{i,j} = 1$. Étudier la convergence de la suite $(A^k)_{k\geqslant 0}$.

51 $\boxed{\text{Pol,Red} : \beta}$ *(SR)*

(a) Si $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que le groupe $\mathcal{GL}_n(\mathbb{Z})$ des inversibles de l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ de déterminant ± 1.

(b) Soit $M \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{Z})$ n'admettant ni 1 ni -1 comme valeur propre.
Montrer que M est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

52 $\boxed{\text{Pol} : \beta}$ *(L)*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que soit A a une valeur propre de module strictement supérieur à 1, soit il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k - I_n$ est nilpotente.

53 $\boxed{\text{AG,Red} : \beta}$ *(L)*

Déterminer les éléments d'ordre fini de $\mathcal{GL}_2(\mathbb{Z})$.

54 $\boxed{\text{Red} : \alpha}$ *(P)*

Soit $r \in \mathbb{Q}$. Montrer qu'existe M dans $\mathcal{GL}_2(\mathbb{Q})$ telle que $M^2 = I_2$ et dont la somme des coefficients est r.

55 $\boxed{\text{Red} : \alpha}$ *(P)*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ tel que $AB = BA$ et $A^n = B^n = I_n$. Montrer que si $\mathrm{Tr}(AB) = n$ alors $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B)$.

56 $\boxed{\text{Red} : \beta}$ *(P)*

Soient $n \geqslant 2$ un entier, A et B dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$, X et Y dans $\mathbb{C}^n$.

(a) On suppose que $\forall k \in \mathbb{N}^*, A^k X = B^k Y$. Montrer que $X = Y$.

(b) Déterminer le plus petit N de $\mathbb{N}^*$ tel que, pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ et tous vecteurs X, Y de $\mathbb{C}^n$, la condition $\forall k \in \{1, \ldots, N\}, A^k X = B^k Y$ implique $X = Y$.

57 $\boxed{\text{Pol,Red} : \alpha}$ *(P)*

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que P n'a pas de racine réelle si et seulement si pour toute $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\det(P(A)) = 0$ implique $P(A) = 0$.

58 $\boxed{\text{Pol,AL,SE} : \beta}$ *(P)*

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $P = \det(XI_n - A)$.

On pose $P = X^n + c_1 X^{n-1} + \cdots + c_n = (X - z_1) \cdots (X - z_n)$.

(a) Calculer de deux façons $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{P(x)}{x - z_k}$ pour $x \in \mathbb{C}$ avec $|x| > \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |z_i|$.

(b) Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Montrer : $c_k = \frac{(-1)^k}{k!} \begin{vmatrix} \mathrm{Tr}(A) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathrm{Tr}(A^2) & \mathrm{Tr}(A) & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \mathrm{Tr}(A^{k-1}) & & \ddots & \ddots & k-1 \\ \mathrm{Tr}(A^k) & \mathrm{Tr}(A^{k-1}) & \cdots & \mathrm{Tr}(A^2) & \mathrm{Tr}(A) \end{vmatrix}$.

59 $\boxed{\text{Red} : \beta}$ *(P)*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admettant n valeurs propres distinctes. Résoudre $AX - XA = X^p$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

60 $\boxed{\text{Red} : \beta}$ *(P)*

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $\det(A) > 1$, $\det(B) > 1$ et $AB = BA$. On s'intéresse aux suites $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ telles que $v_0 \neq 0$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $v_{k+1} = Av_k$ ou $v_{k+1} = Bv_k$. Montrer qu'il existe v_0 tel que toute suite ainsi définie de premier terme v_0 soit non bornée. Le résultat subsiste-t-il si on omet l'hypothèse $AB = BA$?

61 $\boxed{\text{Red,Top} : \beta}$ *(P)*

Soit $n \geqslant 2$ un entier.

(a) Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, L la matrice de $\mathcal{M}_{n(n-1)^2, n}(\mathbb{C})$ dont les lignes sont les $A^i B^j - B^j A^i$, pour $1 \leqslant i, j \leqslant n - 1$. Montrer que A et B ont un vecteur propre commun si et seulement si $\mathrm{rg}(L) < n$.

(b) Montrer que l'ensemble des A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tels que A et ${}^t A$ n'admettent aucun vecteur propre commun est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

62 $\boxed{\text{Red} : \gamma}$ *(PLSR)*

(a) Déterminer une famille libre d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, commutant deux à deux et de cardinal $1 + \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$.

(b) Montrer qu'une famille commutative d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est cotrigonalisable.

(c) Montrer que le cardinal d'une famille libre d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ commutant deux à deux est majoré par $1 + \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$.

63 $\boxed{\text{AQ} : \gamma}$ *(P)*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension n, $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthogonale de E. Si $1 \leqslant i \leqslant n$, soit $d_i = \|e_i\|$. Soit $m \in \{1, \ldots, n\}$. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) il existe un sous-espace V de E de dimension m telle que les projections orthogonales de $e_1, \ldots, e_n$ sur V ont même norme.

(ii) pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a $d_i^{\,2} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{d_j^{\,2}} \right) \geqslant m$.

64 AQ,Sf : $\alpha\,\Delta$ *(SR)*

Soient $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ avec $a<b$ et $\omega : [a,b] \to \mathbb{R}_+^*$ continue. On pose $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.

Pour $(f,g) \in E^2$, on pose $\langle f,g\rangle = \displaystyle\int_a^b f(t)\,g(t)\,\omega(t)\,\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur E.

(b) Montrer qu'il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$ dont la famille de fonctions polynomiales associées soit orthonormée pour $\langle\ ,\ \rangle$ et P_n soit de degré n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) Soit $f \in E$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $a_n = \displaystyle\int_a^b f(t)\,P_n(t)\,\omega(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que $\sum_{n\geqslant 0} a_n^2$ converge et exprimer simplement sa somme à l'aide de f et de ω.

65 AQ,Sf,Sn : β *(L)*

Soit E l'espace des fonctions polynomiales de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$. On munit E du produit scalaire donné par $\forall (f,g) \in E^2,\ \langle f,g\rangle = \displaystyle\int_0^\pi f(\cos\theta)\,g(\cos\theta)\mathrm{d}\theta$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soient E_n le sous-espace de E constitué des fonctions polynomiales de degré au plus n, Π_n le projecteur orthogonal de E sur E_n. On fixe $g \in E$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $M_{n,g}$ l'endomorphisme de E_n défini par $\forall f \in E_n,\ M_{n,g}(f) = \Pi_n(fg)$. Étudier asymptotiquement la suite $(\mathrm{Tr}(M_{n,g}))_{n\in\mathbb{N}}$.

66 AQ : β *(PLSR)*

Soient A et B dans $S_n(\mathbb{R})$. Comparer $\mathrm{Tr}(ABAB)$ et $\mathrm{Tr}(A^2B^2)$.

67 AQ : α *(PLSR)*

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ symétrique. La matrice M est-elle diagonalisable ?

68 AQ,Top : β *(PLSR)*

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M + {}^tM = I_n$. Montrer que $\det(M) > 0$.

69 AQ : $\beta\,\Delta$ *(PLSR)*

(a) Soit $M = (M_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer : $|\det(M)| \leqslant \displaystyle\prod_{j=1}^n \sqrt{\sum_{i=1}^n M_{i,j}{}^2}$.

(b) On suppose M inversible. À quelle condition y-a-t-il égalité dans la question précédente ?

70 AQ : $\beta\,\Delta$ *(PLSR)*

(a) Soit $M = (M_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in S_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que $|\det(M)| \leqslant \displaystyle\prod_{j=1}^n M_{j,j}$.

(b) On suppose $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Étudier le cas d'égalité dans la question précédente.

71 Red,AQ : α *(L)*

Soient $A = (A_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in S_n(\mathbb{R})$, $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ ses valeurs propres comptées avec multiplicité.

Montrer que $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} A_{i,i}A_{j,j} \geqslant \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \lambda_i\lambda_j$.

72 AQ : γ *(L)*

Soient $M \in S_n(\mathbb{R})$, $\lambda_1 \leqslant \dots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de M comptées avec multiplicités, $M' \in S_{n-1}(\mathbb{R})$ la matrice déduite de M en ôtant de M la première ligne et la première colonne, $\lambda'_1 \leqslant \dots \leqslant \lambda'_{n-1}$ les valeurs propres de M' comptées avec multiplicité. Montrer que $\lambda_1 \leqslant \lambda'_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda'_2 \leqslant \dots \leqslant \lambda_{n-1} \leqslant \lambda'_{n-1} \leqslant \lambda_n$.

73 Top,AQ,CD : γ *(PLSR)*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $r \in \{0,\dots,n\}$. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme euclidienne canonique, on note R_r^n l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang majoré par r. On fixe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que la distance de A à R_r^n est atteinte.

(b) Calculer cette distance lorsque $A \in S_n^+(\mathbb{R})$, puis dans le cas général.

Analyse

74 $\boxed{\text{Top} : \gamma}$ *(SR)*

On appelle parfait de $\mathbb{R}$ toute partie non vide de $\mathbb{R}$ fermée sans point isolé.

(a) Donner un exemple de parfait d'intérieur vide de $\mathbb{R}$.

(b) Donner un exemple de parfait de $\mathbb{R}$ ne coupant pas $\mathbb{Q}$.

75 $\boxed{\text{Top} : \beta}$ *(SR)*

On appelle parfait de $\mathbb{R}$ toute partie non vide de $\mathbb{R}$ fermée sans point isolé. Montrer qu'un parfait de $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

76 $\boxed{\text{Top,AG} : \beta}$ *(PLSR)*

Soit X une partie majorée de $\mathbb{R}_+$ contenant deux éléments distincts et telle que, pour tout $(a,b) \in X^2$, $\sqrt{ab} \in X$. Soient i et s les bornes inférieure et supérieure de X.

(a) Montrer que X est dense dans $[i,s]$.

(b) Montrer que $X \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ est dense dans $[i,s]$.

77 $\boxed{\text{F} : \alpha}$ *(PLSR)*

(a) Soit f une fonction continue de $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. La fonction f est-elle bornée ?

(b) Que dire si f est uniformément continue ?

78 $\boxed{\text{Top,AL} : \beta}$ *(SR)*

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $v_1, \dots, v_p$ des vecteurs de E, $C = \mathbb{R}_+ v_1 + \cdots + \mathbb{R}_+ v_p$. Montrer que C est fermé dans E.

79 $\boxed{\text{Top,AL} : \gamma}$ *(SR)*

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, p une application continue de $[0,1]$ dans $\mathcal{L}(E)$ telle que $\forall t \in [0,1], p(t)^2 = p(t)$.

(a) $\boxed{\alpha}$ Montrer que la fonction $\mathrm{rg}(p)$ est constante sur $[0,1]$; on note r sa valeur.

(b) Montrer qu'il existe r fonctions continues $v_1, \dots, v_r$ de $[0,1]$ dans E telles que, pour tout $t \in [0,1]$, $(v_1(t), \dots, v_r(t))$ soit une base de $\mathrm{Im}(p(t))$.

80 $\boxed{\text{Top} : \beta}$ *(P)*

(a) Montrer que l'on ne peut partitionner $\mathbb{R}^2$ en cercles de rayons strictement positifs.

(b) Peut-on partitionner $\mathbb{R}^2$ en disques ouverts de rayons strictement positifs ?

(c) $\boxed{\gamma}$ (Infaisable : utilise implicitement le théorème de Jordan.) On appelle triade toute partie de $\mathbb{R}^2$ homéomorphe à la réunion des trois segments reliant le point $(0,0)$ aux points $(0,1)$, $(1,0)$ et $(1,1)$. Montrer que l'on ne peut partitionner $\mathbb{R}^2$ en triades.

81 $\boxed{\text{Top,AQ} : \gamma}$ *(L)*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, R_n l'ensemble des polynômes unitaires de degré n de $\mathbb{R}[X]$ scindés sur $\mathbb{R}$ et :

$$\Lambda_n = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \ ; \ \lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n\}.$$

(a) Pour $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \Lambda_n$, soit $\varphi(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$. Montrer que φ est un homéomorphisme de Λ_n sur R_n.

(b) Pour $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, soit $\nu(S)$ le nombre de valeurs propres strictement positives de S. Si $S \in \mathcal{S}_n(R)$ et $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\nu\left({}^tPSP\right) = \nu(S)$.

(c) Déterminer les composantes connexes par arcs de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.

82 $\boxed{\text{Top,AL,AQ} : \beta}$ *(PLSR)*

On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite bistochastique lorsque tous ses coefficients sont positifs ou nuls et que la somme de ses coefficients sur une ligne ou une colonne quelconque vaut 1. On note $D_n(\mathbb{R})$ l'ensemble formé par ces matrices.

(a) Montrer que $D_n(\mathbb{R})$ est compact et connexe par arcs.

(b) On pose $F : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto (m_{i,j}^2)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Comparer $F(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$ à $D_n(\mathbb{R})$.

(c) Est-ce que $F(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$ est dense dans $D_n(\mathbb{R})$?

(d) Est-ce que $F(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$ est connexe par arcs ?

83 $\boxed{\text{Top,GA} : \beta}$ *(SR)*

Soient $(E, \| \ \|)$ un espace normé réel, C un compact convexe non vide de E. On appelle point extrémal de C tout $x \in C$ tel que, pour $(a,b) \in C^2$, on ait l'équivalence $x \in [a,b] \Leftrightarrow a = b = x$.

(a) On suppose qu'existe une suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de formes linéaires continues sur E telles que l'on ait $(x = y) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ L_n(x) = L_n(y)$. Montrer que C possède un point extrémal.

(b) L'hypothèse d'existence de la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle satisfaite en dimension finie ? Donner d'autres exemples.

84 $\boxed{\text{Top,GA,AQ} : \beta}$ *(PSLR)*

On se donne un espace euclidien E dont la norme est notée N, et G un sous groupe compact de $\mathcal{GL}(E)$. Pour $x \in E$, on pose $\|x\| = \sup\limits_{g\in G} N(g(x))$.

(a) Montrer que $\| \ \|$ est une norme sur E.

(b) Montrer que $\|g(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in E$ et tout $g \in G$.

(c) Montrer que $\| \ \|$ est strictement convexe, i.e. que l'inégalité triangulaire n'est une égalité que pour un couple de vecteurs positivement colinéaires.

(d) Soient K un compact convexe non vide de E, $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f(K) \subset K$. Montrer que f a un point fixe dans K. *Ind.* Fixer $a \in K$ et considérer, si $k \in \mathbb{N}$, $x_k = \frac{1}{k+1} \sum\limits_{i=0}^{k} f^i(a)$.

(e) $\boxed{\gamma}$ On suppose à présent que K est stable par tous les éléments de G. Montrer que les éléments de G ont un point fixe commun dans K. On admettra la propriété de Borel-Lebesgue : si $(F_i)_{i\in I}$ est une famille de fermés de K dont toute intersection finie est non vide, alors $\bigcap_{i\in I} F_i$ est non vide.

85 $\boxed{\text{Top,F} : \alpha}$ *(PLSR)*

On munit l'espace $E = C([0,1],\mathbb{R})$ de la norme $\| \ \|_\infty$. Soit g une application croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Étudier la continuité des applications H_1, H_2, H_3 définies sur E de la manière suivante : $\forall f \in E,\ H_1(f) = \sum\limits_{\substack{(p,q)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^* \\ p<q,\, p\wedge q=1}} \frac{f(\frac{p}{q})}{q^3},\ H_2(f) = g(\sup(f)),\ H_3(f) = \inf\{t \in [0,1], f(t) = \sup(f)\}$.

86 $\boxed{\text{Top,Red} : \alpha\,\Delta}$ *(SR)*

Soit $N : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_+$ une norme.

On note $N_{\text{op}} : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ A & \longmapsto & \sup\limits_{X\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}} \frac{N(AX)}{N(X)} \end{array}$ appelée norme d'opérateur associée à N.

(a) Montrer que N_{op} est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2,\ N_{\text{op}}(AB) \leqslant N_{\text{op}}(A)N_{\text{op}}(B)$.

(b) Donner un exemple de norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui ne soit pas une norme d'opérateur.

(c) Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure. On prend ici $N : X \mapsto \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^2}$. Pour $\mu > 0$ réel, on pose $Q_\mu = \text{Diag}(1, \mu, \ldots, \mu^{n-1})$. Calculer la limite de $N_{\text{op}}(Q_\mu T Q_\mu^{-1})$ quand μ tend vers $+\infty$.

(d) On note $\rho = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |t_{k,k}|$.

Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe une norme N sur $\mathbb{C}^n$ telle que $N_{\text{op}}(T) \leqslant \rho + \varepsilon$.

87 $\boxed{\text{F,IntG} : \beta}$ *(PLSR)*

Soit φ une fonction convexe de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ telle que $\varphi(0) = 0$.

(a) Montrer que φ est continue.

(b) On note E_φ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues par morceaux telles que $\varphi \circ |f|$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que E_φ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ si et seulement s'il existe $C > 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \varphi(2x) \leqslant C\varphi(x).$$

88 $\boxed{\text{Top,GA} : \gamma}$ *(P)*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, f une application continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $t \in [0,1] \mapsto f((1-t)x + ty)$ est monotone. Montrer qu'il existe une forme linéaire φ sur $\mathbb{R}^n$ et une application continue monotone g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f = g \circ \varphi$.

89 $\boxed{\text{Top : }\alpha}$ *(SR)*

Soient E un espace vectoriel normé, $a \in E$ et $f : E \to \mathbb{R}$. On suppose que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $r > 0$ tel que $\forall x \in B(a,r),\ f(x) \geqslant f(a) - \varepsilon$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ convergeant vers a.

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\inf\limits_{k\geqslant n} f(x_k)\right)$ existe dans $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\inf\limits_{k\geqslant n} f(x_k)\right) \geqslant f(a)$.

90 $\boxed{\text{Top,AQ : }\gamma\,\Delta}$ *(P)*

Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$. Soit $f : E \to F$ telle que $f(0) = 0$ et que pour tout $(x,y) \in E^2$, $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$.

(a) On suppose que $E = F = \mathbb{R}$. Montrer que f est linéaire.

(b) On suppose que $E = F$ et que la norme est euclidienne. Montrer que f est linéaire.

(c) On suppose que f est surjective. Montrer que f est linéaire.

(d) Donner un exemple dans lequel f n'est pas linéaire.

91 $\boxed{\text{Sn : }\alpha}$ *(P)*

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \max\{x \in \mathbb{R}_+^* \ ;\ x = n\ln(x)\}$. Donner un équivalent de u_n.

92 $\boxed{\text{Sn,Pol : }\beta}$ *(P)*

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Trouver les $(a_1,\dots,a_m) \in \mathbb{U}^m$ tels que la suite de terme général $u_n = \sum\limits_{k=1}^{m} a_k^n$ converge.

93 $\boxed{\text{Sn,IntS,Pol : }\beta}$ *(L)*

Soit f une fonction de classe C^1 à support compact de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on choisit une racine n-ième primitive de 1 notée ζ_n et on pose $u_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} \zeta_n^k f\left(\frac{k}{n}\right)$.

Déterminer les valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

94 $\boxed{\text{Sn : }\beta}$ *(P)*

Soient $s \in \mathbb{R}_+^*$ et $(u_n)_{n\geqslant1}$ la suite définie par $u_1 = 1$, $u_2 = s$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+2} = \frac{u_n\, u_{n+1}}{n}$.

Étudier la convergence de $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

95 $\boxed{\text{Sn : }\beta}$ *(PLSR)*

Pour α, β et r dans $\mathbb{R}_+^*$, s dans $]0,1[$, soit $E_{\alpha,\beta,r,s}$ l'ensemble des suites $(x_n)_{n\geqslant 0}$ d'éléments de $\mathbb{R}_+$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \leqslant \frac{r}{n^\beta} + \left(1 - \frac{s}{n^\alpha}\right) x_{n-1}$. À quelle condition est-il vrai que tout élément de $E_{\alpha,\beta,r,s}$ tend vers 0 ?

96 $\boxed{\text{Sn : }\beta}$ *(PLSR)*

Pour $d \in \mathbb{N}^*$, soit $N(d)$ le nombre de couples (m,n) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tels que $n \leqslant m$ et $\binom{m}{n} = d$.

(a) Montrer que $(i,j) \mapsto \binom{i+j}{j}$ est strictement croissante en i et en j.

(b) En considérant $B = \min\left\{b \in \mathbb{N}^* \ ;\ \binom{2b}{b} > d\right\}$, montrer que $N(d) = \mathrm{O}(\ln(d))$.

(c) Montrer que $\frac{1}{x} \sum\limits_{d=1}^{x} N(d) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 2$.

97 $\boxed{\text{Sn : }\beta}$ *(P)*

Soient $(a_n)_{n\geqslant 0}, (b_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites d'éléments de $\mathbb{R}_+$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} \leqslant a_n + b_n$ et que $\sum b_n$ converge. Montrer que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ converge.

98 $\boxed{\text{Sn : }\beta\,\Delta}$ *(L)*

Nature des séries $\sum \frac{\cos(\ln(n))}{n}$, $\sum \frac{\cos(\ln(\ln(n)))}{n}$ et $\sum \frac{\cos(\sqrt{n})}{n}$.

99 $\boxed{\text{Sn : }\alpha}$ *(P)*

Soit $(a_k)_{k\geqslant 1}$ une suite strictement croissante d'éléments de $\mathbb{N}^*$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, soit $A(x)$ le cardinal de $\{k \in \mathbb{N}^* \ ;\ a_k \leqslant x\}$.

Étudier les liens entre les propriétés : $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a_k} < +\infty$ et $A(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}(x)$.

100 $\boxed{\text{Sn,Pr : }\beta}$ *(P)*

Pour $\lambda \in]0,1[$, soit A_λ l'ensemble des k de $\mathbb{N}^*$ tels que le nombre de 9 dans l'écriture décimale de k soit majoré par λn_k, où n_k est le nombre de chiffres de k. Étudier la sommabilité de $\left(\frac{1}{k}\right)_{k\in A_\lambda}$.

101 $\boxed{\text{Pol,Pr} : \gamma}$ *(PSLR)*

Si f est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, soient $P(f)$ et $D(f)$ les fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(f)(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(x+1)) \quad \text{et} \quad D(f)(x) = f(x+1) - f(x).$$

Montrer que, si $n \in \mathbb{N}^*$ et si $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on a $P^n(f^2) - (P^n(f))^2 \leqslant \frac{n}{4} P^{n-1}((D(f))^2)$.

102 $\boxed{\text{F,Sn} : \beta}$ *(P)*

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admettant une limite à droite et une limite à gauche en tout point. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est dénombrable.

103 $\boxed{\text{F} : \alpha}$ *(P)*

Soit $f :]1/4, 1[\to \mathbb{R}_+^*$ continue telle que $\forall x \in]1/4, 1[,\ x^{f(x)} = f(x)$.

Montrer que f est uniformément continue.

104 $\boxed{\text{F,IntS} : \beta\,\Delta}$ *(PLSR)*

Si f est une fonction de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, on note $V(f)$ la borne supérieure de

$$\left\{ \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \ ;\ n \in \mathbb{N}^*,\ 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1 \right\}.$$

Soit E l'ensemble des fonctions f de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $V(f) < +\infty$.

(a) Montrer que, si f est de classe C^1 sur $[0, 1]$, $f \in E$ et $V(f) = \displaystyle\int_0^1 |f'|$.

(b) Donner une fonction f dérivable de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $V(f) = +\infty$.

(c) Montrer qu'une fonction f de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ est dans E si et seulement si elle s'écrit comme différence de deux fonctions croissantes de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

105 $\boxed{\text{F,GA} : \beta}$ *(SR)*

Soient f et g deux fonctions convexes continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in [0, 1],\ \max(f(x), g(x)) \geqslant 0.$$

Montrer qu'il existe $\lambda \in [0, 1]$ tel que $\forall x \in [0, 1],\ (1 - \lambda) f(x) + \lambda\, g(x) \geqslant 0$.

106 $\boxed{\text{F} : \beta}$ *(P)*

Déterminer les fonctions dérivables f de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$f(1) = 1 \quad \text{et} \quad \forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ f(x)\, f(y) \leqslant f(xy).$$

107 $\boxed{\text{F} : \beta}$ *(P)*

Soient f une fonction dérivable de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $x_1, \ldots, x_n$ dans $]0, 1[$ et distincts tels que $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{f'(x_i)} = n$.

108 $\boxed{\text{F,IntG} : \alpha\,\Delta}$ *(P)*

Soient y une fonction dérivable de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ admettant une limite finie en $+\infty$, a une fonction uniformément continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, b une fonction continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{C}$ tendant vers 0 en $+\infty$ telles que $y' = ay + b$. Montrer que y' tend vers 0 en $+\infty$.

109 $\boxed{\text{F} : \beta}$ *(P)*

(a) Montrer qu'il n'existe aucune fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ (f \circ f')(x) = x$.

(b) Existe-t-il une fonction dérivable f de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ (f \circ f')(x) = x$?

110 $\boxed{\text{Sn} : \alpha}$ *(P)*

On considère $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telles que $g = f_1 + \cdots + f_n$ tende vers 0 en $+\infty$. Montrer que $g = 0$.

111 $\boxed{\text{F,Top : }\beta}$ *(SR)*

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

Pour $t \in \mathbb{R}$, soit f_t la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ f_t(x) = f(x-t)$. Si $\varepsilon > 0$ et $T \in \mathbb{R}$, on dit que T est une ε-presque période de f si $\|f - f_T\|_\infty \leqslant \varepsilon$. On dit que f est presque périodique si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $R > 0$ tel que tout segment de longueur R de $\mathbb{R}$ contienne une ε-presque période de f.

(a) Donner des exemples de fonctions presque périodiques.

(b) Montrer qu'une fonction presque périodique est bornée.

(c) Montrer qu'une fonction presque périodique est uniformément continue.

(d) On suppose que f est presque périodique.

Montrer que, si $(t_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite réelle, il existe une extraction φ telle que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, p, q \geqslant N \Rightarrow \|f_{t_{\varphi(p)}} - f_{t_{\varphi(q)}}\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Qu'en déduit-on ?

(e) La réciproque de la question précédente est-elle exacte ?

112 $\boxed{\text{F,ED : }\beta}$ *(P)*

Déterminer l'ensemble des nombres réels c tels qu'il existe une fonction deux fois dérivable f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f' > f + c$ et $f'' > f' + c$.

113 $\boxed{\text{F,SE : }\beta\,\Delta}$ *(P)*

Soit f une fonction de classe C^∞ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)} \geqslant 0$. Que dire de l'ensemble des zéros de f ?

114 $\boxed{\text{F,IntS : }\beta\,\Delta}$ *(P)*

Soient f une fonction continue par morceaux et périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, g une fonction continue par morceaux de $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, soit $I_\lambda = \displaystyle\int_a^b g(t)\,f(\lambda t)\mathrm{d}t$. Quelle est la limite de I_λ lorsque λ tend vers $+\infty$?

115 $\boxed{\text{F,IntS,Sf : }\beta}$ *(L)*

Soient $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et, pour $n \in \mathbb{N}$ et $f \in E$, $M_n(f) = \displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t$.

(a) Soient f et g dans E telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ M_n(f) = M_n(g)$. Montrer que $f = g$.

(b) Existe-t-il $f \in E$ positive telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ M_n(f) = \exp\left(-\frac{n^2}{10}\right)$?

(c) Existe-t-il $f \in E$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ M_n(f) = \frac{1}{1+10n^2}$?

116 $\boxed{\text{F,IntS : }\beta}$ *(SR)*

Soient $\varphi \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et convexe, E l'espace des fonctions continues par morceaux de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ et $u \in E$ tels que $\forall v \in E,\ \displaystyle\int_0^1 u_n v \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 uv$.

On définit, pour $f \in E$, $L(f) = \displaystyle\int_0^1 \varphi \circ f$ Montrer que la suite $\left(\inf_{k\geqslant n} L(u_k)\right)$ converge et que sa limite est supérieure ou égale à $L(u)$.

117 $\boxed{\text{F,IntS : }\beta}$ *(L)*

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, u une fonction de classe C^2 de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, telle que $u(a) = u(b) = 0$ et que $\forall x \in\ ]a,b[,\ u(x) > 0$. Montrer que $\displaystyle\int_a^b \frac{|u''|}{u} \geqslant \frac{4}{b-a}$. Le facteur 4 est-il optimal ?

118 $\boxed{\text{IntS : }\beta}$ *(P)*

Soit f une fonction continue de $\left[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$ dans $\mathbb{R}$.

Montrer que $\displaystyle\int_{-1/2}^{3/2} xf(3x^2-2x^3)\mathrm{d}x - 2\int_0^1 xf(3x^2-2x^3)\mathrm{d}x$.

119 $\boxed{\text{IntS,Sn,AG} : \beta}$ *(PLSR)*

Le but de l'exercice est de montrer que $\ln(2)$ est irrationnel. On raisonne par l'absurde en considérant a et b dans $\mathbb{N}^*$ tels que $\ln(2) = \frac{a}{b}$.

(a) Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe $c_n \in \mathbb{Z}$ tel que $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x = (-1)^n \ln(2) + \frac{c_n}{\mathrm{ppcm}(1,2,\ldots,n)}$.

(b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P_n = \frac{1}{n!}\left(X^n(1-X)^n\right)^{(n)}$.
Montrer qu'il existe $A_n \in \mathbb{Z}^*$ tel que $\displaystyle\int_0^1 \frac{P_n(x)}{1+x}\mathrm{d}x = \frac{A_n}{b \times \mathrm{ppcm}(1,2,\ldots,n)}$.

(c) Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, π_n le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à n. On admet que $\pi_n \sim \frac{n}{\ln(n)}$.
Montrer que, pour n assez grand, $\mathrm{ppcm}(1,2,\ldots,n) \leqslant 3^n$.

(d) Conclure.

120 $\boxed{\text{IntS} : \alpha}$ *(SR)*

Soient f et g deux fonctions croissantes de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, continues par morceaux, telles que $f(0) = g(0) = 0$, $f(1) = g(1) = 1$. On pose $h = f - g$.

On note $d(f,g) = \min\left\{\sqrt{\displaystyle\int_0^1 (h-\lambda)^2} \; ; \; \lambda \in \mathbb{R}\right\}$, $w(f,g) = \min\left\{\displaystyle\int_0^1 |h-\lambda| \; ; \; \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

(a) Justifier les définitions de $d(f,g)$ et $w(f,g)$.

(b) Calculer $d(f,g)$.

(c) Montrer que $w(f,g) \leqslant d(f,g) \leqslant \sqrt{2w(f,g)}$.

(d) (HP) Calculer $w(f,g)$.

On introduira $\lambda_0 = \inf\left\{\lambda \in \mathbb{R} \; ; \; \displaystyle\int_0^1 1_{(h(t)>\lambda}\mathrm{d}t < \frac{1}{2}\right\}$ et $\lambda_1 = \sup\left\{\lambda \in \mathbb{R} \; ; \; \displaystyle\int_0^1 1_{(h(t)<\lambda}\mathrm{d}t > \frac{1}{2}\right\}$, et l'on montrera que $\lambda_0 = \lambda_1$.

121 $\boxed{\text{IntG,F} : \alpha}$ *(L)*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 et 2π-périodique telle que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $(f(x), f'(x)) \neq (0,0)$.

(a) Montrer que l'ensemble Z des zéros de f sur $[0, 2\pi[$ est fini.

(b) Soit g une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tendant vers 1 en $+\infty$, vers -1 en $-\infty$.
Montrer que $|Z| = -\frac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi} g'\left(\frac{f'}{f}(x)\right)\left(\frac{f'}{f}\right)'(x)\mathrm{d}x$.

(c) Montrer que $|Z| = -\frac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{f''f - f'^2}{f^2 + f'^2}$.

122 $\boxed{\text{IntS} : \beta}$ *(SR)*

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ intégrable sur tout intervalle borné. Si I est un segment de $\mathbb{R}$, on note ℓ_I la longueur de I. Si $\ell_I > 0$, on note $f_I = \frac{1}{\ell_I}\displaystyle\int_I f$. On dit que f est d'oscillation moyenne bornée et on note $f \in OMB$ si $\displaystyle\sup_I \inf_{c\in\mathbb{R}} \frac{1}{\ell_I}\int_I |f - c| < +\infty$, la borne supérieure étant prise sur l'ensemble des segments de $\mathbb{R}$ de longueur strictement positive.

(a) Montrer que $f \in OMB$ si et seulement si $\displaystyle\sup_I \frac{1}{\ell_I}\int_I |f - f_I| < +\infty$.

(b) On pose $f(t) = \ln(|t|)$ si $t \neq 0$, $f(0) = 0$. Montrer que $f \in OMB$.

(c) La fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto 1_{t>0}f(t)$ est-elle dans OMB ?

123 $\boxed{\text{IntS,Sf,ED} : \beta}$ *(P)*

Soit $(p_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $p_0 = p_1 = 1$ et, pour $n \geqslant 2$, $p_n = \displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^{1-x_1} \cdots \int_0^{1-x_{n-1}} \mathrm{d}x_n \mathrm{d}x_{n-1} \cdots\right)\mathrm{d}x_1$.

Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_n(\pi/6)^n$.

124 $\boxed{\text{IntG} : \alpha}$ *(P)*

Soit f une fonction continue et de carré intégrable de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.

Déterminer la limite en $+\infty$ de $x \mapsto e^{-x}\displaystyle\int_0^x f(t)\, e^t \mathrm{d}t$.

125 $\boxed{\text{IntG : }\beta\,\Delta}$ *(L)*

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $d \in \mathbb{N}$: $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k = a_d \prod_{j=1}^{d} (X - z_j)$. On pose $M(P) = |a_d| \prod_{j=1}^{d} \max(1, |z_j|)$.

Montrer que $M(P) = \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln\left|P(e^{it})\right| \mathrm{d}t\right)$.

126 $\boxed{\text{Sf,Top : }\alpha}$ *(SR)*

Soient X une partie non vide d'un espace normé, $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de fonctions continues de X dans $\mathbb{R}$.

(a) On suppose que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur X vers une fonction f. Montrer que f est continue.

(b) On suppose que X est compacte et que, pour toute suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ d'éléments de X et tout x de X tels que $x_n \to x$, on a $f_n(x_n) \to f(x)$. Montrer que f est continue et que la convergence est uniforme.

127 $\boxed{\text{F,Sf : }\gamma}$ *(P)*

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe une suite $(P_n)_{n\geqslant 0}$ de polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}_+$ convergeant simplement vers f sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

128 $\boxed{\text{Sf,F : }\gamma}$ *(P)*

Quelles sont les fonctions de $[-1, 0]$ dans $\mathbb{R}$ qui sont limite uniforme sur $[-1, 0]$ d'une suite de polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}_+$?

129 $\boxed{\text{F,Sf : }\beta\,\Delta}$ *(PLSR)*

(a) Construire une fonction f de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $[0, 1]$ telle que

$$f^{-1}\{1\} = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \qquad \text{et} \qquad f^{-1}\{0\} = \left]-\infty, -1\right] \cup \left[1, +\infty\right[.$$

(b) $\boxed{\gamma}$ Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Construire une fonction f de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall k \in \mathbb{N},\ f^{(k)}(0) = a_k$.

130 $\boxed{\text{Sf,IntS,IntG : }\alpha\,\Delta}$ *(SR)*

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

(a) Pour $j \in \mathbb{Z}$ et $N \in \mathbb{N}^*$, calculer $\sum_{k=1}^{N} e^{2i\pi jk\alpha}$.

(b) On appelle polynôme trigonométrique toute combinaison linéaire à coefficients complexes de fonctions de la forme $t \mapsto e^{2i\pi kt}$ où $k \in \mathbb{Z}$. On admet que les polynômes trigonométriques forment une partie dense de l'espace vectoriel des fonctions continues et 1-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, muni de la norme de la convergence uniforme.

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue et 1-périodique. Montrer que $\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \varphi(k\alpha) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \varphi$.

(c) Soit $\varphi :]0, 1[\to \mathbb{R}_+$ continue d'intégrale divergente sur $]0, 1[$. Déterminer la limite de $\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \varphi(k\alpha - \lfloor k\alpha \rfloor)$ quand N tend vers $+\infty$.

131 $\boxed{\text{Sn,Sf : }\beta}$ *(PLSR)*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et, pour $p \in \mathbb{N}^*$, f_p l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même définie par :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ f_p(A) = \left(I_n + \frac{A}{p}\right)^p.$$

(a) Montrer que $(f_p)_{p\geqslant 1}$ converge uniformément sur tout compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers une fonction à préciser.

(b) Montrer que $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\ \left(\exp\left(\frac{A}{p}\right) \exp\left(\frac{B}{p}\right)\right)^p \to \exp(A + B)$.

132 $\boxed{\text{Sf,IntG : }\gamma}$ *(P)*

Soient $(P_n)_{\in\mathbb{N}}$ et $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les deux suites de fonctions de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ définies par $P_0 = Q_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1]$, $P_{n+1}(x) = \left(1 - x + \int_0^x Q_n\right)^2$, $Q_{n+1}(x) = 1 - \left(1 - \int_0^x P_n\right)^2$.

Calculer $\lim \int_0^1 \left(1 - x + \int_0^x Q_n\right)^3$.

133 $\boxed{\text{Sf,IntS : } \beta\,\Delta}$ *(L)*

Soit $k \in \mathbb{N}$, $(a_n)_{n\geqslant k+1}$ une suite réelle telle que $\sum |a_n|$ converge et, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum\limits_{n=k+1}^{+\infty} a_n \cos(nx)$.

Minorer le nombre de zéros de f sur $[-\pi, \pi[$.

134 $\boxed{\text{Sn,Sf : } \beta}$ *(L)*

Soient $k \geqslant 4$ un entier pair, Ω l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $\mathrm{Im}(z) > 0$.

(a) Justifier l'existence et la continuité de la fonction f définie par $\forall z \in \Omega, f(z) = \sum\limits_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}} \frac{1}{(m+nz)^k}$.

(b) Montrer que $f(z) \underset{\substack{z\in\Omega,\\ \mathrm{Im}(z)\to+\infty}}{\longrightarrow} 2\zeta(k)$.

(c) $\boxed{\gamma}$ Quel est le comportement de $f(z)$ lorsque z tend vers un nombre réel ?

135 $\boxed{\text{SE,Sn : } \alpha}$ *(P)*

Soient $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de $\mathbb{R}_+^*$, r_f et r_g les rayons de convergence respectifs de $\sum f_k x^k$ et $\sum g_k x^k$. On suppose que $r_f < r_g$ et que la suite $\left(\frac{f_n}{f_{n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Montrer qu'il existe a et b dans $\mathbb{R}_+^*$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, g_n \leqslant a f_n e^{-bn}$.

136 $\boxed{\text{SE,AL : } \beta\,\Delta}$ *(L)*

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Montrer que la série entière $f : z \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ représente une fraction rationnelle dans un voisinage de l'origine si et seulement si le déterminant de la matrice $(a_{i+j-2})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est nul à partir d'un certain rang.

137 $\boxed{\text{SE,F : } \beta}$ *(P)*

Déterminer la limite en $+\infty$ de $\left(\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^k}\right)^{1/x}$.

138 $\boxed{\text{F,SE : } \beta}$ *(PLSR)*

Existe-t-il une fonction $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telle que, pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ somme d'une série entière, on ait $f(x) = o(g(x))$ quand x tend vers $+\infty$?

139 $\boxed{\text{SE,Pr : } \beta}$ *(L)*

Si $n \in \mathbb{N}$, une permutation de $\{1, \ldots, 2n+1\}$ est dite zigzagante si, pour tout $k \in \{2, \ldots, 2n\}$, $(\sigma(k+1)-\sigma(k))(\sigma(k)-\sigma(k-1)) < 0$. On note T_n le nombre de permutations zigzagantes de $\{1, \ldots, 2n+1\}$.

Déterminer la somme de la série entière $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{T_n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$.

140 $\boxed{\text{SE,Sn : } \beta}$ *(P)*

Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. On suppose que f est développable en série entière au voisinage de tout point de $\mathbb{R}$ et que $(f^{(n)})_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers g. Que dire de g ?

141 $\boxed{\text{IntG : } \beta}$ *(P)*

Déterminer la limite de $\dfrac{1}{A}\displaystyle\int_1^A A^{1/x}\mathrm{d}x$ lorsque A tend vers $+\infty$.

142 $\boxed{\text{IntG,Sn : } \alpha}$ *(SR)*

Donner une expression de $\displaystyle\int_0^1 x^x \mathrm{d}x$ comme somme d'une série rapidement convergente.

143 $\boxed{\text{ED,AL : } \beta\,\Delta}$ *(P)*

Soient $m \in \mathbb{N}^*$, $a_0, \ldots, a_{m-1}$ des nombres complexes.

Résoudre l'équation différentielle $y^{(m)} + \sum\limits_{j=0}^{m-1} a_j y^{(j)} = 0$.

144 $\boxed{\text{ED,Red : } \beta\,\Delta}$ *(PLSR)*

On pose, pour A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $[A, B] = AB - BA$. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de classe C^1. On suppose qu'existe une application continue B de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $A'(t) = [A(t), B(t)]$. Montrer que le polynôme caractéristique de $A(t)$ est indépendant de t.

145 $\boxed{\text{ED,AQ,IntS : }\beta}$ *(L)*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dérivable vérifiant $\forall t \in \mathbb{R},\ A'(t) = {}^tA(t)A(t) - A(t){}^tA(t)$. Déterminer la limite de $\dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t A(u)\,du$ quand t tend vers $+\infty$.

146 $\boxed{\text{F,AL,ED : }\gamma}$ *(L)*

Soient E l'espace des fonctions de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Pour $a \in \mathbb{R}$ et f dans E, soit f_a l'élément de E donné par $\forall x \in \mathbb{R},\ f_a(x) = f(x-a)$. Déterminer les $f \in E$ tels que $\mathrm{Vect}\{f_a\ ;\ a \in \mathbb{R}\}$ soit de dimension finie.

147 $\boxed{\text{F : }\alpha}$ *(P)*

Soient a et r deux fonctions continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. On suppose qu'il existe $M > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que, pour tout $t \geqslant M$, $t \geqslant r(t) + \varepsilon$. Soit x une fonction dérivable de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+^*$ telle que $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ x'(t) = a(t)\,x(t - r(t))$. Montrer que $t \mapsto x(t)\exp\left(-\displaystyle\int_0^t a\right)$ admet une limite finie en $+\infty$.

148 $\boxed{\text{CD,ED,Pol : }\beta}$ *(L)*

Soient $k \in \mathbb{N}^*$, f une fonction de classe C^2 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
Montrer qu'il existe une forme linéaire ℓ sur $\mathbb{R}^2$ et un nombre réel c tels que $f = c\ell^k$ si et seulement f est un polynôme homogène de degré k tel que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)^2 = 0$.

149 $\boxed{\text{Top,CD,GA : }\beta\,\Delta}$ *(SR)*

Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien, C un compact non vide de E, d_C la fonction définie par :

$$\forall x \in E,\ d_C(x) = d(x, C).$$

(a) Montrer que d_C est bien définie et lipschitzienne.

(b) On suppose que $x \in E \setminus C$ est tel que $\{c \in C\ ;\ d_C(x) = \|x - c\|\}$ est de cardinal au plus 1.
Montrer que d_C est différentiable en x.

(c) On suppose que C est convexe.
Montrer que l'hypothèse de la question précédente est satisfaite pour tout $x \in E \setminus C$.

150 $\boxed{\text{CD,IntG : }\beta\,\Delta}$ *(L)*

Soit $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, l'application $r \in \mathbb{R}_+ \mapsto \displaystyle\int_{\pi}^{\pi} f(x + r\cos(\theta), y + r\sin(\theta))\mathrm{d}\theta$ soit constante.

(b) Calculer $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos(\theta)}\cos(\sin(\theta))\mathrm{d}\theta$.

Géométrie

151 $\boxed{\text{Pr : }\alpha}$ *(SR)*

Soient $n \geqslant 2$ un entier, n points en position générale sur un cercle. On trace tous les segments reliant deux de ces points. Quel est le nombre de points d'intersection ?

152 $\boxed{\text{GA : }\beta}$ *(P)*

Soient $a > 0$ et C un cube de côté a. Déterminer la longueur minimale d'un chemin tracé sur les faces de C et rencontrant chacune des six faces.

153 $\boxed{\text{GA,Pol : }\gamma}$ *(L)*

On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne canonique.

(a) Soit $n \geqslant 3$ un entier. Montrer qu'il existe n points distincts de $\mathbb{R}^2$, non alignés, à distances mutuelles entières.

(b) Soit E une partie infinie de $\mathbb{R}^2$ dont deux points quelconques sont à distance entière. Montrer que E est contenu dans une droite.

154 $\boxed{\text{GA,CD,HP : }\gamma}$ *(SR, infaisable vu les programmes actuels)*

Soit C une partie convexe de $\mathbb{R}^2$ dont la frontière est l'image d'un arc régulier. Pour $r > 0$, soit C_r l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^2$ tels que $d(x, C) \leqslant r$. Calculer le périmètre de C_r en fonction de celui de C et de r.

155 $\boxed{\text{GA} : \beta}$ *(SR)*

Si A et B sont deux parties non vides d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, on pose : $A+B = \{a+b\,;\ (a,b) \in A \times B\}$. Soit P un polygone convexe plein de $\mathbb{R}^2$. Montrer que P admet un centre de symétrie si et seulement s'il existe des segments $S_1, \ldots, S_m$ de $\mathbb{R}^2$ tels que $P = S_1 + \cdots + S_m$.

Probabilités

156 $\boxed{\text{Pr,Sn} : \gamma}$ *(P)*

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. Soit $\lambda \in \,]0, 1[$.

(a) Montrer que, pour tout réel t, l'ensemble $A_t = \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lambda^n X_n \leqslant t\right)$ est un événement.

(b) Montrer que la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{P}(A_t)$ est continue.

157 $\boxed{\text{Pr,Sn} : \beta}$ *(PLSR)*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soient σ_n une permutation aléatoire suivant la loi uniforme sur $\mathcal{S}_n$, p_n la probabilité que σ_n admette un cycle de longueur strictement supérieure à $n/2$. Déterminer p_n et étudier la convergence de $(p_n)_{n\geqslant 1}$.

158 $\boxed{\text{Pr,Sf} : \beta}$ *(PLSR)*

Soit X une variable aléatoire réelle.

(a) $\boxed{\alpha}$ On suppose que $\mathbb{E}(X^2) < +\infty$. Quels sont les $x \in \mathbb{R}$ tels que $\mathbb{E}((X-x)^2)$ soit minimal ?

(b) On suppose que $\mathbb{E}(|X|) < +\infty$. Déterminer les $x \in \mathbb{R}$ tels que $\mathbb{E}(|X - x|)$ soit minimal.

159 $\boxed{\text{Pr,Sn} : \alpha}$ *(L)*

Soit f la fonction de $[0,1]$ dans $[0,1]$ définie par $\forall x \in [0,1],\ f(x) = 4x(1-x)$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f^n = f \circ \cdots \circ f$ (n fois).

(a) $\boxed{\beta}$ Soit $x \in [0,1]$. Montrer que $(f^n(x))_{n\geqslant 1}$ converge si et seulement si elle stationne.

(b) Soient $m \in \mathbb{N}^*$, X_m une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\{0, \ldots, m\}$. On note p_m la probabilité que la suite $\left(f^n\left(\sin^2\left(\frac{X_m \pi}{m}\right)\right)\right)_{n\geqslant 1}$ converge. Calculer p_m.

(c) Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,1]$ (définition donnée par l'interrogateur). Déterminer la probabilité p que la suite $\left(f^n\left(\sin^2(X)\right)\right)_{n\geqslant 1}$ converge.

160 $\boxed{\text{Pr,Sn,SE} : \beta}$ *(P)*

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ non presque sûrement nulle. On suppose qu'il existe Y indépendante de X, suivant la même loi, et telle que $\mathbb{P}(X + Y \geqslant x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 2\,\mathbb{P}(X \geqslant x)$.

(a) Montrer que $\mathbb{P}(X \geqslant x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \mathbb{P}(X \geqslant x-1)$.

(b) Montrer que $e^{\lambda X}$ n'est d'espérance finie pour aucun réel $\lambda > 0$.

161 $\boxed{\text{Pr,AQ} : \alpha}$ *(PLSR)*

(a) Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$. Soit x dans l'enveloppe convexe de A. Montrer que x peut s'écrire comme combinaison convexe d'une famille de $n+1$ points de A.

(b) On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne standard. Soit T une partie de la boule unité fermée, et x un point de l'enveloppe convexe de T. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ il existe une liste $(x_1, \ldots, x_k) \in T^k$ telle que $\left\| x - \frac{1}{k} \sum\limits_{i=1}^{k} x_i \right\| \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Ind. Introduire des points deux à deux distincts $y_1, \ldots, y_p$ de T et des réels positifs $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ tels que $x = \sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i y_i$ et $1 = \sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i$, puis considérer une variable aléatoire X telle que $\mathbb{P}(X = y_i) = \lambda_i$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$.

162 $\boxed{\text{Pr} : \alpha}$ *(SR)*

Une famille $(x_1, \dots, x_k)$ de réels est dite à sommes distinctes lorsque l'application $I \in \mathcal{P}([\![1,k]\!]) \mapsto \sum_{i \in I} x_i$ est injective. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n le plus grand entier $k \geqslant 1$ pour lequel il existe $(x_1, \dots, x_k) \in [\![1,n]\!]^k$ à sommes distinctes.

(a) Montrer que $f_n \geqslant 1 + \lfloor \log_2(n) \rfloor$.

(b) Soient $(x_1, \dots, x_k) \in [\![1,n]\!]^k$ à sommes distinctes, $X_1, \dots, X_k$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $1/2$, $X = \sum_{i=1}^{k} x_i X_i$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

(i) Montrer que $\mathbb{P}\Big(|X - \mathbb{E}(X)| \leqslant \frac{\lambda n \sqrt{k}}{2}\Big) \geqslant 1 - \frac{1}{\lambda^2}$.

(ii) Montrer que $\mathbb{P}\Big(|X - \mathbb{E}(X)| \leqslant \frac{\lambda n \sqrt{k}}{2}\Big) \leqslant \frac{\lambda n \sqrt{k}+1}{2^k}$.

(iii) En déduire une majoration de f_n.

163 $\boxed{\text{Pr,Sn} : \alpha}$ *(PLSR)*

Pour $x \in \mathbb{R}$, soit $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Une suite réelle $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite équirépartie modulo 1 lorsque, pour tous $a < b$ dans $[0,1]$, $\frac{1}{n}\big|\{k \in [\![1,n]\!],\ \ a \leqslant \{x_k\} \leqslant b\}\big| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} b - a$. On admet que cette condition est équivalente à $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{2ip\pi x_k} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

(a) Soit α un irrationnel. Montrer que la suite $(n\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$ est équirépartie modulo 1.

(b) On fixe $(i,j) \in \mathbb{N}^* \times [\![0,9]\!]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on se donne une variable aléatoire X_n suivant la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$, et on note β_n la probabilité de l'événement « le i-ème chiffre de 2^{X_n} en base 10 (en partant de la gauche) est j ». Montrer que $(\beta_n)_n$ converge et préciser sa limite.

164 $\boxed{\text{Pr,Sn} : \alpha}$ *(PLSR)*

Dans les deux premières questions, on fixe un entier $n \geqslant 1$ et un réel $p \in]0,1[$. On se donne une famille i.i.d. $(X_{i,j})_{1 \leqslant i < j \leqslant n}$ de variables de Bernoulli de paramètre p.

Étant donné $\omega \in \Omega$, on obtient le graphe $G(\omega)$ dont l'ensemble des sommets est $[\![1,n]\!]$, et l'ensemble des arêtes est $\{\{i,j\} \mid 1 \leqslant i < j \leqslant n \text{ tel que } X_{i,j}(\omega) = 1\}$.

(a) Donner la loi de la variable aléatoire égale au nombre d'arêtes du graphe G.

(b) On note Z_n le nombre de sommets isolés du graphe G. Déterminer l'espérance et la variance de Z_n.

(c) $\boxed{\gamma}$ Soit $c > 0$. On fait maintenant varier n et on prend p égal à $p_n = c\frac{\ln n}{n}$ pour n assez grand. Étudier le comportement asymptotique de la suite de terme général $\mathbb{P}(Z_n = 0)$.

165 $\boxed{\text{Pr,AL} : \alpha}$ *(P)*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0,1]$, $(A_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une famille i.i.d. de variables aléatoires suivant chacune la loi $\mathcal{B}(p)$. On note $A = (A_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Calculer $\mathbb{E}(\det(A))$ et $\mathbb{E}(\det(A)^2)$.

166 $\boxed{\text{Pr,Sn} : \beta}$ *(P)*

Soient $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite i.i.d. de variables de Rademacher, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $p_n = \mathbb{P}(|S_n| \geqslant n\varepsilon \mid S_{2n} = 0)$.

(a) Montrer que $p_n \to 0$.

(b) $\boxed{\gamma}$ Majorer au mieux asymptotiquement p_n.

167 $\boxed{\text{Pr} : \alpha}$ *(PLSR)*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, σ une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\mathcal{S}_n$. Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, soit X_i l'indicatrice de l'événement $\bigcap_{j=1}^{i-1} (\sigma(j) < \sigma(i))$.

(a) Déterminer la loi de X_i.

(b) Montrer que X_{n-1} et X_n sont indépendantes.

(c) Montrer que $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.

168 $\boxed{\text{Pr,SE} : \beta}$ *(P)*

On considère une suite infinie de tirages à pile ou face avec une pièce équilibrée. On considère la variable aléatoire T donnant le premier instant k pour lequel il existe $i \in [\![1, k-1]\!]$ tel que $k - i$ soit pair, les lancers aux instants k et i aient donné face, et les lancers à tous les instants strictement compris entre k et i aient donné pile. Montrer que T est d'espérance finie, et calculer son espérance.

169 Pr : γ *(P)*

On lance une pièce équilibrée jusqu'à ce que le nombre de Pile soit égal au double du nombre de Face. Quelle est la probabilité de ne jamais s'arrêter ?

170 Pr : β *(PLSR)*

Soit E un ensemble non vide au plus dénombrable. Étant donné deux lois de probabilité μ et ν sur $(E, \mathcal{P}(E))$, on pose $d(\mu,\nu) = \sup\limits_{A\subset E} |\mu(A) - \nu(A)|$.

(a) Soient X et Y deux variables aléatoires suivant respectivement μ et ν. Montrer que :

$$d(\mu,\nu) = \frac{1}{2} \sup_{f:E\to[-1,1]} \left|\mathbb{E}(f(X)) - \mathbb{E}(f(Y))\right| = \frac{1}{2}\sum_{x\in E} \left|\mu(\{x\}) - \nu(\{x\})\right|.$$

(b) On suppose ici $E = \mathbb{N}$. Étant donné des lois de probabilité $P_1, \dots, P_n$ sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, on note $P_1 \star \cdots \star P_n$ la loi de la variable $X_1 + \cdots + X_n$ où $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes suivant respectivement $P_1, \dots, P_n$. Soient $\mu_1, \dots, \mu_n, \nu_1, \dots, \nu_n$ des lois de probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Montrer que $d(\mu_1 \star \cdots \star \mu_n, \nu_1 \star \cdots \star \nu_n) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} d(\mu_i, \nu_i)$.

171 Pr : γ *(L)*

Soient $p \in]0,1[$, $(B_k)_{k\geqslant 1}$ une suite i.i.d. de variables de Bernoulli de paramètre p. La suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est définie par $X_1 = 0$ et par $X_{n+1} = 0$ si $B_n = 0$, $X_{n+1} = 1 + X_n$ si $B_n = 1$. Soit f une fonction bornée de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer $m \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, on ait $\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f(X_k) - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \to 0$.

172 Pr : β *(P)*

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite i.i.d de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. On suppose que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\mathbb{P}(X_1 \geqslant x) > 0$.

Montrer l'équivalence entre les conditions suivantes :

(i) pour tout réel $\alpha > 1$, on a $\mathbb{P}(X_1 \geqslant \alpha x) \underset{x\to+\infty}{=} o\big(\mathbb{P}(X_1 \geqslant x)\big)$;

(ii) il existe une suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$ divergeant vers $+\infty$ et telle que, pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{b_n}\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} X_i - 1\right| > \varepsilon\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

173 Pr : γ *(P)*

Soit $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 0}$ une suite i.i.d. de variables de Rademacher, $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de variables aléatoires telle que $X_0 = 0$, $X_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+2} = |X_{n+1} + \varepsilon_n X_n|$. Montrer que $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} (X_n \neq 0)\right) \in]0,1[$.

174 Pr : α *(PLSR)*

Soient $(x_0, r) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $p \in]0,1[$, $(G, A_1, \dots, A_n, \dots)$ une suite de variables aléatoires indépendantes dans laquelle G suit la loi $\mathcal{G}(1-p)$ et chaque A_n suit la loi $\mathcal{B}(p)$. On construit une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence en posant X_0 constante de valeur x_0 et $X_{n+1} = 2^{2A_{n+1}-1} X_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On pose enfin $X_G : \omega \mapsto X_{G(\omega)}(\omega)$ et $\alpha_p = \mathbb{P}(X_G \geqslant r)$. Déterminer la limite de α_p quand p tend vers 1^-.