Épreuves orales
des concours d'entrée
aux grandes écoles

2021

Légende

C	cours	α, β, γ	3 niveaux de difficulté
Δ	classique		avec `Python`
AG	structures élémentaires, arithmétique	Pol	polynômes, fractions rationnelles, complexes
AL	algèbre linéaire de première année	Red	réduction
AQ	algèbre quadratique		
Top	topologie	F	fonctions
IntS	intégration sur un segment	IntG	intégrale généralisée
Sn	suites et séries numériques	Sf	suites et séries de fonctions
SE	séries entières	Pr	probabilités, dénombrement
ED	équations différentielles	CD	fonctions de plusieurs variables, calcul différentiel
GA	géométrie affine et euclidienne	GD	géométrie différentielle
HP	Hors programme		

Mines-Ponts – MP - 2021

Algèbre

201 $\boxed{\text{AG} : \alpha}$

Soit E un ensemble. Une application p de E dans E est dite idempotente si $p \circ p = p$.

(a) Soit p idempotente sur E.

(i) Montrer que, si p est injective, alors $p = \mathrm{Id}$.

(ii) Montrer que, si p est surjective, alors $p = \mathrm{Id}$.

(iii) Donner une application idempotente sur un ensemble à deux éléments qui n'est pas l'identité.

(iv) Donner trois applications idempotentes sur un ensemble à deux éléments, et dix sur un ensemble à trois éléments.

(b) Montrer qu'une application p est idempotente si et seulement si, pour tout $x \in p(E)$, $p(x) = x$.

(c) $\boxed{\beta}$ On suppose ici que E est un ensemble à n éléments. Dénombrer les applications idempotentes sur E.

202 $\boxed{\text{AG,Pr} : \alpha}$

On pose $d_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note d_n le nombre de dérangements de $\{1, 2, \ldots, n\}$.

(a) Quel est le nombre moyen de points fixes de $\sigma \in \mathcal{S}_n$?

(b) **(i)** Montrer que $n! = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k$.

(ii) En déduire que $d_n = n! \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!}$.

(iii) Montrer que le nombre de permutations de $\{1, \ldots, n\}$ admettant exactement p points fixes est

$$\frac{n!}{p!} \sum_{k=0}^{n-p} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

En déduire que : $\sum\limits_{p=1}^{n} \dfrac{1}{(p-1)!} \sum\limits_{k=0}^{n-p} \dfrac{(-1)^k}{k!} = 1$.

203 $\boxed{\text{AG} : \alpha}$

Quel est le chiffre des unités de $2022^{2022^{2022}}$?

204 $\boxed{\text{AG} : \alpha}$

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ la congruence $9x \equiv 6\ [24]$.

205 $\boxed{\text{AG} : \alpha}$

Montrer que 2021 a un multiple dont tous les chiffres en base 10 valent 1.

206 $\boxed{\text{AG} : \alpha}$

Les groupes $(\mathbb{Z}, +)$ et $(\mathbb{Q}, +)$ sont-ils isomorphes ?

207 $\boxed{\text{AG} : \beta}$

Soit $(G, \cdot)$ un groupe fini dont tous les éléments sont d'ordre $\leqslant 2$. Que peut-on dire de $|G|$?

208 $\boxed{\text{AG} : \beta}$

Soit G un groupe cyclique de cardinal n. Quel est le nombre de sous-groupes de G ?

209 $\boxed{\text{AG,AL} : \gamma}$

Soit G un sous-groupe fini de $\mathcal{GL}_2(\mathbb{C})$ tel que $G \cap \mathcal{SL}_2(\mathbb{C}) = \{I_2\}$. Montrer que G est cyclique.

210 $\boxed{\text{AG} : \beta}$

Soit A une partie non vide et finie de $\mathbb{C}$.

On suppose que, pour tout $z \in A$, il existe $w \in A$ tel que $w^2 = z$. Montrer que $\prod\limits_{z \in A} (1 + z) \in \{1, 2\}$.

211 $\boxed{\text{Pol} : \alpha}$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ pair, $P = 1 + X + \cdots + X^n$, α une racine de P. Montrer que, pour tout $k \geqslant 1$, α^{2^k} est racine de P. Qu'en est-il pour n impair ?

212 $\boxed{\text{Pol : } \beta}$

Déterminer les $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $\mathbb{U}$ soit stable par P.

213 $\boxed{\text{Pol : } \alpha}$

(a) Quels sont les $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$?

(b) $\boxed{\beta}$ Quels sont les $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$?

214 $\boxed{\text{Pol : } \alpha}$

Soit $P = a_0 + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non constant, scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.

(a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P''(x)\, P(x) - P'(x)^2 < 0$.

(b) $\boxed{\beta}$ Soit $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, montrer que $a_{k-1} a_{k+1} \leqslant a_k^2$.

215 $\boxed{\text{Pol,CD : } \beta}$

Soit $= a_0 + \cdots + a_{n-1} X^{n-1} + X^n \in \mathbb{R}[X]$ simplement scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que si $(b_0, \ldots, b_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ est suffisamment proche de $(a_0, \ldots, a_{n-1})$ le polynôme $Q = b_0 + \cdots + b_{n-1} X^{n-1} + X^n$ est simplement scindé sur $\mathbb{R}$.

216 $\boxed{\text{Pol : } \beta}$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $z_1, \ldots, z_n$ les racines de $X^n + 1$.

On pose, pour $k \in \{0, \ldots, n\}$, $F_k = \frac{X^k}{X^n+1}$.

(a) $\boxed{\alpha}$ Décomposer F_k en éléments simples.

(b) Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Montrer : $X\, P'(X) = \frac{n}{2}\, P(X) + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k\, P(z_k X)}{(z_k - 1)^2}$.

(c) $\boxed{\gamma}$ Si $Q \in \mathbb{C}_n[X]$, on pose $\|Q\|_\infty = \max_{|z| \leqslant 1} |Q(z)|$. Montrer que, pour $P \in \mathbb{C}_n[X]$, $\|P'\|_\infty \leqslant n\, \|P\|_\infty$.

217 $\boxed{\text{AL : } \alpha}$

Soient E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, F un sous-espace strict de E. L'ensemble $(E \setminus F) \cup \{0\}$ peut-il être un sous-espace vectoriel de E ?

218 $\boxed{\text{AL : } \alpha}$

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f^2 = 0$.

Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ et $v \in \mathbb{R}^3$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R}^3$, $f(x) = g(x)\, v$.

219 $\boxed{\text{AL,F,Pol : } \alpha}$

Soient $a_1, \ldots, a_n$ des réels distincts.

(a) Montrer que la famille formée des fonctions $f_k : x \mapsto |x - a_k|$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

(b) Montrer que la famille des polynômes $P_k = \prod_{j \neq k} (X - a_j)$, $1 \leqslant k \leqslant n$, est libre dans $\mathbb{R}[X]$.

220 $\boxed{\text{Red,AG : } \alpha}$

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $a_{n,1} = a_{i,i+1} = 1$ $(1 \leqslant i < n)$ et dont les autres coefficients sont nuls. On pose, pour $p \in \mathbb{N}^*$, $B_p = I_n + A + \cdots + A^{p-1}$.

Montrer que B_p est inversible si et seulement si n et p sont premiers entre eux

221 $\boxed{\text{AL,Pol : } \beta}$

Soit $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & y & 1 & 0 \\ x^2 & 2x & y^2 & 2y & 2 \\ x^3 & 3x^2 & y^3 & 3y^2 & 6y \\ x^4 & 4x^3 & y^4 & 4y^3 & 12y^2 \end{vmatrix}$. Montrer que D est nul si et seulement si $x = y$.

222 $\boxed{\text{AL,AG} : \alpha}$

Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose $Q_p(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & x \\ 1 & 2 & \dots & 0 & x^2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & \binom{p}{1} & \dots & \binom{p}{p-1} & x^p \\ 1 & \binom{p+1}{1} & \dots & \binom{p+1}{p-1} & x^{p+1} \end{vmatrix}$.

(a) Calculer $Q_p(x+1) - Q_p(x)$ en utilisant la colonne $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ (p+1)x^p \end{pmatrix}$.

(b) Montrer que $Q_p(n+1) = (p+1)! \sum_{k=1}^{n} k^p$.

(c) Retrouver la valeur de $\sum_{k=1}^{n} k^2$.

223 $\boxed{\text{AL} : \alpha}$

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$.

(a) Montrer que $\text{rg}(A+B) \leqslant \text{rg}A + \text{rg}B$.

(b) Montrer que $|\text{rg}A - \text{rg}B| \leqslant \text{rg}(A+B)$.

224 $\boxed{\text{AL} : \alpha}$

Soit $n \geqslant 2$. Calculer le déterminant de $\Phi : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto A^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

225 $\boxed{\text{AL} : \alpha}$

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $p, q, r \in \mathcal{L}(E)$ des projecteurs.
On suppose que $p + \sqrt{2}\,q + \sqrt{3}\,r$ est un projecteur. Montrer que $q = r = 0$.

226 $\boxed{\text{AL,AG} : \beta}$

Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on considère l'endomorphisme u_σ de $\mathbb{R}^n$ défini par $u_\sigma(x_1, \dots, x_n) = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$. Montrer que les sous-espaces stables par tous les u_σ sont exactement : $\{0\}, \mathbb{R}(1, \dots, 1)$, l'hyperplan d'équation $x_1 + \dots + x_n = 0$ et $\mathbb{R}^n$.

227 $\boxed{\text{Pol,Red} : \beta}$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe un unique $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$, et l'expliciter, tel que

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], P(X+n) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k P(X+k).$$

228 $\boxed{\text{AL} : \alpha\,\Delta}$

Soit $n \geqslant 2$ un entier.

(a) Soit V un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contenant toutes les matrices nilpotentes. Montrer que V contient une matrice inversible.

(b) Montrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contient une matrice inversible.

229 $\boxed{\text{AL} : \alpha}$

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $n \in \mathbb{N}^*$. Un hyperplan de E est défini comme supplémentaire d'une droite vectorielle.

(a) $\boxed{\text{C}}$ Montrer qu'un sous-espace vectoriel H de E est un hyperplan si et seulement s'il existe $\ell \in E^*$ non nulle telle que $H = \text{Ker}\,\ell$.

(b) $\boxed{\Delta}$ Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on note Φ_A la forme linéaire $M \mapsto \text{Tr}(AM)$. Montrer que l'application $\Phi : A \mapsto \Phi_A$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sur son dual.

(c) Montrer que $C = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible. Calculer $\text{Tr}(J_r C)$.

(d) En déduire que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contient une matrice inversible.

230 $\boxed{\text{Red,AL : } \beta}$

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel dimension finie $n > 0$. Soit u un endomorphisme de E tel que $u^2 = u^3$. On note A l'ensemble des matrices de u dans toutes les bases de E. Déterminer $\max\{z(M),\ M \in A\}$, où $z(M)$ désigne le nombre de coefficients nuls dans la matrice M.

231 $\boxed{\text{AL,Top : } \alpha}$

(a) Caractériser les formes linéaires sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à l'aide de la trace.
En déduire les $f \in E^*$ telles que $f(XY) = f(YX)$ pour tout $(X, Y) \in E^2$.

(b) Quels sont les hyperplans rencontrant $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$?

(c) Existe-t-il une base de E constituée de matrices inversibles ?

232 $\boxed{\text{AL : } \alpha}$

Soient E un espace vectoriel de dimension quelconque et H_1, H_2 deux hyperplans de E.
Montrer que H_1 et H_2 sont isomorphes.

233 $\boxed{\text{Red : } \beta}$

Soit $n \geqslant 2$. Déterminer les $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont la classe de similitude est bornée.

234 $\boxed{\text{AL : } \beta}$

(a) Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et A un sous-espace de $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.
On suppose que $\bigcap\limits_{\ell \in A} \operatorname{Ker} \ell = \{0\}$. Montrer que $A = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.

(b) Soient $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre dans l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ si et seulement s'il existe $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que la matrice $((f_i(x_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ soit inversible.

235 $\boxed{\text{AL : } \alpha}$

Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie, u un endomorphisme nilpotent de E, S un sous-espace de E stable par u et tel que $S + \operatorname{Im}(u) = E$. Montrer que $S = E$.

236 $\boxed{\text{AL : } \alpha}$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer l'équivalence entre $A^2 = 0$ et A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $2r \leqslant n$.

237 $\boxed{\text{AL : } \beta}$

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ tel que $\operatorname{Tr}(f(I_2)) = 0$ et $f(N) = 0$ pour toute matrice nilpotente N.
Montrer que $f^2 = 0$.

238 $\boxed{\text{AL : } \alpha}$

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$. On suppose que les seuls sous-espaces vectoriels de E stables par tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont $\{0\}$ et E. Soient x et y dans E avec $x \neq 0$. Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{A}$ tel que $u(x) = y$.

239 $\boxed{\text{AL : } \alpha}$

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(E, G)$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $h \in \mathcal{L}(F, G)$ tel que $g = h \circ f$.

240 $\boxed{\text{AL,Pol : } \alpha}$

Soit $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $M^{-1} = P(M)$.

241 $\boxed{\text{AL : } \alpha}$

On pose $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et on note D l'opérateur de dérivation. Montrer qu'il n'existe pas d'endomorphisme Φ de E dont le carré vaut D.

242 $\boxed{\text{AG,AL,HP : } \beta}$

Soient p un nombre premier, $q = (p^2 - p)(p^2 - 1)$ et $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.

(a) Quel est le cardinal de $\mathcal{GL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$?

(b) $\boxed{\gamma}$ Montrer que $A^{q+2} = A^2$.

(c) Quel est le cardinal de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$?

(d) Quel est le cardinal de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$?

243 $\boxed{\text{Red,Pol : } \alpha}$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$, $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $\Phi_a : P \in E \mapsto (X^2-1)P' - 2(nX-a)P$. Montrer que Φ_a est un endomorphisme de E. Déterminer ses valeurs propres et ses vecteurs propres.

244 $\boxed{\text{AL,Red : } \alpha}$

Soit $n \geqslant 2$. On considère la matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $a_{i,j} = j + n(i-1)$

(a) Quel est le rang de la matrice A ?

(b) Montrer que A est diagonalisable

245 $\boxed{\text{AQ,AL : } \alpha}$

Soient $n \geqslant 2$, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des réels et $b_0, b_1, \ldots, b_{n-2}$ des réels non nuls.

Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 & \ldots & 0 \\ b_0 & a_1 & b_1 & \ddots & \vdots \\ 0 & b_1 & a_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix}$ possède n valeurs propres distinctes.

246 $\boxed{\text{AL,Red : } \alpha}$

Soient $n \geqslant 2$ et $a_1, \ldots, a_n, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$. On pose $M = \begin{pmatrix} a_1 + x_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & a_2 + x_2 & & a_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_n & \cdots & a_n & a_n + x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

(a) Calculer le déterminant de M.

(b) $\boxed{\beta}$ Montrer que $\text{sp}(M)$ est inclus dans la réunion des boules fermées de centre x_i et de rayon $n|a_i|$.

247 $\boxed{\text{Red,Pol,Top : } \alpha}$

On considère $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Déterminer les éléments propres de A.

(b) Calculer A^n.

(c) $\boxed{\beta}$ Calculer la limite de $\sum\limits_{k=1}^{n} kA^k$. Exprimer cette limite à l'aide de A.

248 $\boxed{\text{Red,AL : } \beta}$

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$. Montrer que le degré de son polynôme minimal est majoré par $1 + \text{rg}(u)$.

249 $\boxed{\text{Red : } \alpha}$

Soient $n \geqslant 3$ un entier, $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, $M = (M_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont la première ligne, la dernière ligne, la première colonne, la dernière colonne ne contiennent que des termes égaux à a et dont les autres coefficients sont égaux à b. Cette matrice est-elle diagonalisable ?

250 $\boxed{\text{Red : } \alpha}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Diagonaliser la matrice $M = (M_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ où, pour $1 \leqslant i,j \leqslant n$, $M_{i,j} = 1$ si i ou j est égal à n et où $M_{i,j}$ est nul si $i < n$ et $j < n$.

251 $\boxed{\text{Red,Top : } \beta}$

Soit, pour $z \in \mathbb{C}$, $M_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) À quelle condition la matrice M_z est-elle diagonalisable ?

(b) $\boxed{\gamma}$ À quelle condition la suite $(M_z^k)_{k \geqslant 1}$ est-elle convergente ?

252 AL,Red,SE : β

Soit u l'application définie sur $\mathbb{C}[X]$ par : $\forall P \in \mathbb{C}[X]$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $u(P)(z) = e^{-z} \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{P(n)}{n!} z^n$.

(a) Montrer que u est un automorphisme de $\mathbb{C}[X]$.

(b) Quelles sont les valeurs propres de u ?

(c) Soit Δ l'endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$ défini par : $\forall P \in \mathbb{C}[X]$, $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.
Montrer que : $\forall P \in \mathbb{C}[X]$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $u(P)(z) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{\Delta^n(P)(0)}{n!} z^n$.

253 Red : $\beta\,\Delta$

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n.
Soient $(f,g) \in \mathcal{L}(E)^2$ et $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tels que $f\circ g - g\circ f = af + bg$.
Montrer que f et g admettent un vecteur propre commun.

254 Red,AL : α

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que le polynôme minimal de u est de degré deux et sans racine réelle.

(a) Soit $x \in E$ non nul. Montrer que $P_x = \mathrm{Vect}(x, u(x))$ est un plan stable par u.

(b) Soient F un sous-espace vectoriel stable par u et $x \notin F$. Montrer que $F \cap P_x = \{0\}$.

255 Red,AL : α

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = -\mathrm{Id}$.

(a) Trouver un exemple d'un tel endomorphisme en dimension 2.

(b) Montrer que f n'a pas de valeur propre réelle et que la dimension de E est paire.

(c) On note $\dim E = 2n$. Montrer qu'il existe une base de E de la forme $(e_1, f(e_1), \dots, e_n, f(e_n))$.

(d) Écrire la matrice de f dans cette base. Énoncer une version matricielle du résultat démontré dans cet exercice.

256 Red,AL : β

Soient $r \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ des nombres complexes deux à deux distincts, $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ des éléments de $\mathbb{N}^*$, $n = \sum\limits_{i=1}^r \alpha_i$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable telle que $\chi_A = \prod\limits_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$.
On pose $C(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\ ;\ AM = MA\}$.

(a) Montrer que $C(A)$ est un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de dimension $\sum\limits_{i=1}^r {\alpha_i}^2$.

(b) Soit $C'(A) = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\ ;\ \forall M \in C(A),\ XM = MX\}$.
Montrer que $C'(A) = \mathbb{C}[A]$.

257 AL,Red : β

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$.
On suppose que $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E. On note $C(f)$ le commutant de f.

(a) $\boxed{\alpha}$ Montrer que $C(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

(b) Montrer que $C(f) = \mathbb{K}_{n-1}[f]$. Quelle est la dimension de $C(f)$?

258 Red : β

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice n.
On pose $C(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\ ;\ AM = MA\}$. Montrer que $C(A) = \mathbb{C}[A]$.

259 Red,AQ : γ

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $L_i = \sum\limits_{j=1}^n |a_{i,j}|$ et $C_j = \sum\limits_{i=1}^n |a_{ij}|$. Soit λ une valeur propre de A. Montrer qu'il existe k tel que $|\lambda| \leqslant \sqrt{L_k C_k}$.

260 Red : β

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $B = \begin{pmatrix} A & A^2 \\ I_n & A \end{pmatrix}$.

(a) Exprimer μ_B en fonction de μ_A.

(b) $\boxed{\alpha}$ Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que B soit diagonalisable.

261 $\boxed{\text{AG,AL,Red : }\beta}$

Soit $n \geqslant 3$ un entier, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}$ et C la matrice de permutation associée au n-cycle $(1\,2\,\ldots\,n)$.

(a) Quel est le sous-groupe G de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ engendré par B et C ?

(b) $\boxed{\gamma}$ Quels sont les éléments de G diagonalisables sur $\mathbb{R}$?

262 $\boxed{\text{Red : }\alpha}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

(a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^4 = A^2$ et $\operatorname{sp} A \subset \{-1, +1\}$. La matrice A est-elle diagonalisable ?

(b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^4 = A^2$ et $\{-1, +1\} \subset \operatorname{sp} A$. La matrice A est-elle diagonalisable ?

263 $\boxed{\text{Red : }\alpha}$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que $A^2 = (\operatorname{Tr} A)A + I_n$.

(a) Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) $\boxed{\beta}$ Pour quels entiers n existe-t-il de telles matrices A ?

264 $\boxed{\text{Red,Pol : }\alpha\,\Delta}$

Soit $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si M^2 l'est.

265 $\boxed{\text{Red : }\alpha}$

Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$ distincts.

Déterminer le polynôme minimal de $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_6(\mathbb{K})$.

266 $\boxed{\text{Red : }\beta}$

Soient D et N dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que D et $D+N$ sont diagonalisables, que N est nilpotente et que $DN = ND$. Que dire de N ?

267 $\boxed{\text{Red,Pol : }\beta}$

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que u est diagonalisable si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ et $(v_1, \ldots, v_n) \in \mathcal{L}(E)^n$ tels que :

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ u^k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^k v_i.$$

268 $\boxed{\text{Red,Pol : }\alpha}$

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. On suppose AB diagonalisable et inversible. Montrer que BA est diagonalisable.

269 $\boxed{\text{AL,Red : }\alpha}$

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.

(a) Soit $\mathcal{C} = \{u \in \mathcal{L}(E),\ \varphi \circ u = 0\}$. Montrer que $\mathcal{C}$ est isomorphe à $\mathcal{L}(E, \operatorname{Ker} \varphi)$.

(b) $\boxed{\beta}$ Soit $\Phi \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$ qui à $u \in \mathcal{L}(E)$ associe $\Phi(u) = \varphi \circ u$.

Montrer que Φ est diagonalisable si et seulement si φ l'est.

270 $\boxed{\text{AL,Red : }\alpha}$

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 = \operatorname{Id}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $x_0 \in E$. Résoudre dans E l'équation $\mu u(x) + x = x_0$.

271 $\boxed{\text{Red,AL : }\alpha}$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A$. Soit $\Phi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AM + MA$. Montrer que Φ est diagonalisable. Exprimer la trace de Φ en fonction du rang de A.

272 $\boxed{\text{Red : }\beta}$

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $f_A : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto AM \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que A et f_A ont même spectre.

273 Red,AG : γ

(a) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que M est nilpotente si et seulement si, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Tr}(M^k) = 0$.

(b) Soient G un sous-groupe de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$.
On suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $M \in G$, $M^N = I_n$.
Soit $(M_1, \ldots, M_p)$ une base de $\mathrm{Vect}(G)$.
Montrer que l'application $A \in G \mapsto (\mathrm{Tr}(AM_1), \ldots, \mathrm{Tr}(AM_p))$ est injective. Montrer que G est fini.

274 Red : $\beta\,\Delta$

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ n'ayant aucune valeur propre commune.

(a) Montrer que $\chi_A(B)$ est inversible.

(b) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe une unique matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M = AX - XB$.

275 AL,SE : α

Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & a & -c \\ -a & 0 & b \\ c & -b & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

(a) Déterminer un réel d pour lequel $A^3 + dA = 0$.

(b) Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, A^{2n} en fonction de n, d et A^2.

(c) Montrer que $\exp A = I_3 + \alpha A + \beta A^2$ pour des réels α et β à déterminer.

276 AQ,IntG : α

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(a,b,c) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (x^3 + ax^2 + bx + c)^2 e^{-2x}\,\mathrm{d}x$. Justifier l'existence de f et trouver son minimum.

277 AQ : α

Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien, H et K deux hyperplans de E, s_H et s_K les symétries orthogonales associées.
Montrer que s_H et s_K commutent si et seulement si $H = K$ ou si $H^\perp \subset K$.

278 AQ : α

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien.

(a) Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur orthogonal.
Montrer que, pour tout $x \in E$, $\langle p(x), x\rangle = \|p(x)\|^2$.

(b) $\boxed{\beta}$ Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $\forall x \in E$, $\langle f(x), x\rangle = \|f(x)\|^2$. L'endomorphisme f est-il un projecteur orthogonal ? Sinon, quelle condition ajouter pour que ce soit le cas ?

279 AQ,AL : β

Pour toutes matrices A et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\varphi_A(M) = \mathrm{Tr}(AM)$ et $f_A(M) = AM - MA$.

(a) $\boxed{\alpha}$ Montrer que l'application $(U,V) \mapsto \mathrm{Tr}(U^TV)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) $\boxed{\alpha}$ Montrer que, pour toute forme linéaire ψ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une unique matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\psi = \varphi_A$.

(c) Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente. Montrer que $\mathrm{Ker}(f_N) \subset \mathrm{Ker}(\varphi_N)$. Montrer qu'il existe une forme linéaire ψ telle que $\varphi_N = \psi \circ f_N$.

(d) Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $N = BN - NB$.

280 AQ : α

Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien, a, b deux vecteurs unitaires et orthogonaux de E, $u, v \in \mathcal{L}(E)$ définis par : $\forall x \in E$, $u(x) = \langle a, x\rangle\, b - \langle b, x\rangle\, a$ et $v(x) = \langle a, x\rangle\, b + \langle b, x\rangle\, a$. Les endomorphismes u et v sont-ils diagonalisables ?

281 Pol,F,AQ : α

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $Q_n = \frac{1}{2^n n!}\left((X^2-1)^n\right)^{(n)}$.

(a) Montrer que Q_n possède n racines simples dans $]-1,1[$.

(b) Montrer qu'il existe $R_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q_n = X^n + (X^2-1)R_n(X)$.

(c) On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire défini par $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} PQ$.
Montrer que Q_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Calculer $\|Q_n\|$.

282 $\boxed{\text{AQ,IntS,ED : } \beta}$

Soit $E = C^2([0,1], \mathbb{R})$. Pour $f, g \in E$, on pose $\varphi(f,g) = \displaystyle\int_0^1 (fg + f'g')$.

(a) $\boxed{\alpha}$ Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

(b) Soit $F = \{f \in E,\ f(0) = f(1) = 0\}$ et $G = \{f \in E,\ f'' = f\}$. Montrer que F et G sont supplémentaires orthogonaux dans E. Donner le projecteur orthogonal sur G.

(c) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On pose $E_{a,b} = \{f \in E \ ;\ f(0) = a, f(1) = b\}$.
Donner $f_0 \in E_{a,b}$. Prouver que $E_{a,b} = \{f_0 + h,\ h \in F\}$. Quel est le projeté orthogonal de f_0 sur G ?

(d) Déterminer $\displaystyle\inf_{f \in E_{a,b}} \int_0^1 (f^2 + f'^2)$.

283 $\boxed{\text{AQ : } \alpha}$

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(A^T B)$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^n m_{i,i} \leqslant \sqrt{n}\sqrt{\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} m_{i,j}^2}$.

(b) Montrer l'existence de $\displaystyle\min_{S \in S_n(\mathbb{R})} \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (m_{i,j} - s_{i,j})^2$ et montrer que ce minimum est égal à

$$\frac{1}{4} \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (m_{i,j} - m_{j,i})^2.$$

284 $\boxed{\text{AQ,AL : } \alpha}$

(a) Soit $M \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$. Montrer que $\det\left(MM^T\right) \geqslant 0$.

(b) Soient $m \in \{1, \dots, n\}$ et $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ des parties de $\{1, \dots, m\}$.
On note, pour tout $(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2$, $a_{i,j} = \mathrm{card}\ (A_i \cap A_j)$. Montrer que $\det\Big((a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}\Big) \geqslant 0$.

285 $\boxed{\text{AQ : } \alpha}$

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Déterminer les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisables en base orthonormée.

286 $\boxed{\text{AL,AQ : } \alpha}$

(a) Soient $n, k \in \mathbb{N}^*$, $V_1, \dots, V_k \in \mathbb{R}^n$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^k V_i V_i^T = I_n$. Montrer que $k \geqslant n$.

(b) Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Déterminer k minimal pour lequel il existe $V_1, \dots, V_k \in \mathbb{R}^n$ et $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ tels que

$$S = a_1 V_1 V_1^T + \cdots + a_k V_k V_k^T.$$

287 $\boxed{\text{AQ : } \alpha}$

Soient k un entier $\geqslant 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $A^k = A^T$.

(a) Montrer que $\mathrm{Im}\, A$ et $\mathrm{Ker}\, A$ sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathbb{R}^n$.

(b) Montrer que $B = A^{k+1}$ est la matrice d'un projecteur orthogonal.

(c) Montrer que A induit une isométrie sur $\mathrm{Im}\, A$.

(d) En déduire A.

288 $\boxed{\text{AQ : } \beta}$

Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. En notant $r = \mathrm{rg}(A)/2$, montrer que A est semblable à une matrice diagonale par blocs $M = \mathrm{diag}(B_1, \dots, B_r, 0, \dots, 0)$, où les B_i sont dans $\mathcal{A}_2(\mathbb{R})$.

289 $\boxed{\text{AQ : } \beta}$

(a) Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.
Montrer l'existence de $P, Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et D diagonale à coefficients positifs telles que $A = PDQ$.

(b) Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien et $u \in \mathcal{GL}(E)$. Montrer l'existence d'une base orthonormée de E dont l'image par u est une base orthogonale de E.

290 $\boxed{\text{AQ : } \alpha}$

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

(a) Pour $i, j \in \{1, \dots, n\}$, montrer que $a_{i,i} > 0$ et que ${a_{i,j}}^2 \leqslant a_{i,i} a_{j,j}$.

(b) Montrer que $\max_{i,j} |a_{i,j}| = \max_k a_{k,k}$.

291 $\boxed{\text{AQ} : \beta}$

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\text{Tr}(A) = 0$ si et seulement si A est orthogonalement semblable à une matrice dont les éléments diagonaux sont nuls.

292 $\boxed{\text{AQ} : \alpha}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) $\boxed{\beta}$ Montrer que, si A et B sont dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, $\text{Tr}(AB) \geqslant 0$.

(b) Déterminer les matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, $\text{Tr}(MS) \geqslant 0$.

293 $\boxed{\text{AQ,Red} : \alpha}$

Soient $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que le spectre complexe de A est inclus dans $i\mathbb{R}$.

(b) Montrer qu'il existe $S' \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $S'^2 = S$.

(c) Montrer que $\det(S) \leqslant \det(S + A)$.

294 $\boxed{\text{AQ} : \alpha}$

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.

(a) $\boxed{\text{C}}$ Soit $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ un projecteur. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si p est symétrique.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|AA^T x\| = \|A^T x\|$.

(b) Montrer que : $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $\langle AA^T x, AA^T y \rangle = \langle A^T x, A^T y \rangle$.

(c) Montrer que AA^T est le projecteur orthogonal d'image $\text{Im}(A)$.

(d) Que peut-on dire de $A^T A$?

295 $\boxed{\text{AQ,Top} : \alpha}$

(a) Soit $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$. On suppose que la suite $(A^n)_{n \geqslant 0}$ converge vers une matrice B.

Que peut-on dire de B ?

(b) $\boxed{\beta}$ On suppose de plus que $A \in \mathcal{S}_d(\mathbb{R})$. Montrer que $\sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant d} |b_{i,j}| \leqslant d\sqrt{\text{rg}(B)}$.

Analyse

296 $\boxed{\text{Top,Pol} : \alpha}$

Soit $E = \mathbb{C}[X]$. Pour $Q \in E \setminus \{0\}$ et $P \in E$, soit $N_Q(P) = \|PQ\|_{\infty,[-1,1]}$.

(a) Montrer que, si $Q \in E \setminus \{0\}$, N_Q est une norme sur E.

(b) $\boxed{\beta}$ Soit $Q \in E \setminus \{0\}$. Les normes N_Q et N_1 sont-elles équivalentes ?

297 $\boxed{\text{Top,AL} : \alpha}$

Existe-t-il une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $N(AB) = N(A)\,N(B)$?

298 $\boxed{\text{Top,AG} : \alpha}$

Déterminer les $z \in \mathbb{C}$ pour lesquels $\{\exp(itz)\,;\, t \in \mathbb{R}\}$ est un sous-groupe fermé de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

299 $\boxed{\text{Top,AG} : \beta}$

Soit X une partie de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ non vide, compacte et stable par produit.

Montrer que X est un sous-groupe de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$.

300 $\boxed{\text{Sn,Red} : \alpha}$

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. Pour n dans $\mathbb{N}$, on pose $v_n = \sup\{u_p,\ p \geqslant n\} \in \overline{\mathbb{R}}$.

(a) Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite $\lambda(u)$ dans $\overline{\mathbb{R}}$.

(b) $\boxed{\beta}$ Montrer qu'il existe une suite extraite de u qui tend vers $\lambda(u)$.

(c) Montrer que les valeurs d'adhérence de la suite u sont inférieures ou égales à $\lambda(u)$.

(d) Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe. On pose ici $u = (|z_n|^{1/n})_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Montrer que si $\lambda(u) > 1$, alors la série de terme général z_n est divergente, et si $\lambda(u) < 1$, alors la série de terme général z_n est convergente.

(e) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses n valeurs propres et $\rho(A) = \sup(|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_n|)$.
On pose ici $u = (|\operatorname{Tr}(A^p)|^{1/p})_{p \in \mathbb{N}^*}$. Montrer que $\lambda(u)$ est égal à $\rho(A)$. *Ind.* On pourra admettre que, si $a_1, \ldots, a_s$ sont des réels, alors la suite $\left(\sum_{j=1}^{s} \exp(ipa_j)\right)_{p \in \mathbb{N}}$ admet s comme valeur d'adhérence.

(f) $\boxed{\gamma}$ Montrer le résultat admis.

301 $\boxed{\text{Top,ED : } \beta}$

Soit $E = \{f \in C^2([0,1], \mathbb{R}),\ f(0) = f'(0) = 0\}$.
Si $f \in E$, on pose $N(f) = \|f + 2f' + f''\|_\infty$.

(a) $\boxed{\alpha}$ Montrer que N est une norme sur E.

(b) On fixe $f \in E$ et on pose $g = f + 2f' + f''$. Exprimer f en fonction de g.

(c) Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $f \in E$, $\|f\|_\infty \leqslant a\, N(f)$.

(d) $\boxed{\alpha}$ Les normes $\|\ \|_\infty$ et N sont-elles équivalentes ?

302 $\boxed{\text{Top,F,AQ : } \alpha}$

(a) On munit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ de la norme de convergence uniforme. Soit Φ qui à $f \in E$ associe $\exp(f)$. La fonction Φ est-elle continue ?

(b) Soit N qui à $f \in E$ associe $\sqrt{f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2 \mathrm{d}t}$.

(i) Montrer que N est une norme sur E.

(ii) Comparer N et la norme de convergence uniforme.

303 $\boxed{\text{Top,ED : } \alpha}$

Soit $E = \{f \in C^1([0,1], \mathbb{R})\,;\ f(0) = 0\}$.
Pour $f \in E$, on pose $n(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ et $N(f) = \|f + f'\|_\infty$.

(a) Montrer que n et N sont des normes sur E.

(b) Montrer qu'elles sont équivalentes.

304 $\boxed{\text{AQ,IntS,F : } \beta}$

Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel $\langle f, g\rangle = \int_0^1 fg$. On note $H = \{f \in E \mid \int_0^{1/2} f = 0\}$.
Déterminer $H^\perp$.

305 $\boxed{\text{Top : } \alpha}$

Soient $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé et $A \subset E$. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], E)$ telle que $f(0) \in A$ et $f(1) \notin A$.

(a) Montrer qu'il existe $t \in [0,1]$ tel que $f(t) \in \operatorname{Fr}(A)$.

(b) Montrer que, si A est distinct du vide et de E, alors sa frontière est non vide.

306 $\boxed{\text{Top : } \alpha}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme $\|\ \|$. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que l'image réciproque par f de tout compact est compacte si et seulement si $|f(x)| \to +\infty$ lorsque $\|x\| \to +\infty$.

307 $\boxed{\text{Top : } \beta}$

Soient E un espace normé réel, A une partie convexe de E, B une partie de E telle que $A \subset B \subset \overline{A}$. Montrer que B est connexe par arcs.

308 $\boxed{\text{AQ,Top : } \beta}$

Soient E un espace euclidien et $f : E \mapsto E$ telle que :

$$f(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall (x,y) \in E^2,\ \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|.$$

(a) Que dire de f ?

(b) Étudier la suite de terme général $u_n = \dfrac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f^k$.

309 $\boxed{\text{Sn,IntS : } \alpha}$

Déterminer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\sum_{k=0}^{n-1} \ln(n+k) = n\ln(n) + an + b + \mathrm{o}(1)$.

310 Sn : α

Donner un développement asymptotique à deux termes de la somme partielle $\sum\limits_{k=2}^{n} \frac{\ln k}{k}$.

311 IntS : α

Étudier la convergence de la suite de terme général $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right) \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

312 Sn,F : β

Soit $(x_n)_{n \geqslant 1}$ une suite réelle définie par : $\forall n \geqslant 1,\ x_{n+1} = n\,(x_n - n)$.
Montrer que $x_n = \mathrm{O}(n)$ si et seulement si $x_1 = 2\mathrm{e}$.

313 Sn : α

Soient, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $d_n = H_n - \ln n$.

(a) Montrer que (d_n) est monotone et converge. On note γ sa limite.
(b) Montrer que, pour $p, q \in \mathbb{N}^*$, $\gamma \leqslant H_p + H_q - H_{pq} \leqslant 1$.

314 Sn,F : α

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x} + e^{-x}$ et l'équation $(E_n)\quad f(x) = n$.

(a) **(i)** Montrer que, pour n assez grand, (E_n) possède deux solutions $a_n > 0 > b_n$.
(ii) Montrer que (a_n) et (b_n) convergent et donner leurs limites.
(b) **(i)** Trouver A et α tels que $a_n \sim \frac{A}{n^\alpha}$.
(ii) Donner un équivalent de $a_n - \frac{A}{n^\alpha}$.
(c) **(i)** Trouver un équivalent simple β_n de b_n.
(ii) Donner un équivalent de $b_n - \beta_n$.

315 Sn : β

Soit $(x_n)_{n \geqslant 1}$ définie par $x_0 > 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \frac{n x_n}{2n + 2^{n+1} x_n}$. Donner un équivalent de x_n.
Ind. Considérer $y_n = 2^n x_n$.

316 Sn : α

Soient $u_0 > 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1 + \left(\sum\limits_{k=0}^{n} u_k\right)^2}$.

(a) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $\theta_n \in \left]0, \pi/2\right]$ tel que $u_n = \frac{1}{\sin \theta_n}$.
Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{\tan(\theta_{n+1})} - \frac{1}{\tan(\theta_n)} = \frac{1}{\sin(\theta_n)}$.
(b) Déterminer θ_n pour $n \in \mathbb{N}^*$; donner un équivalent de u_n.

317 Sn : β

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. On considère la suite $(a_n)_{n \geqslant 1}$ définie par $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ avec $a_1 + a_2 > 0$ et, pour $n \geqslant 2$, $a_{n+1} = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Discuter de la convergence de (a_n) en fonction de α.

318 Sn,Pol : α

On pose, pour tout $n \geqslant 2$, $P_n = X(X-1)\cdots(X-n)$.

(a) Montrer que P_n' s'annule en un unique r_n sur $]0,1[$.
(b) Trouver un équivalent de r_n.

319 Sn : β

Soient $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$.
Donner un développement asymptotique à deux puis trois termes de u_n.

320 Sn,F : β

Soient $\lambda \in \left]0,1\right[$ f une fonction de classe C^2 de $[0,1]$ dans $[0,1]$ telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = \lambda$. On définit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ par $u_0 \in [0,1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que, si u_0 est non nul et assez près de 0, $(u_n)_{n \geqslant 0}$ converge vers 0 et qu'il existe $C > 0$ tel que $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} C\lambda^n$.

321 $\boxed{\text{Sn,F : } \alpha}$

(a) $\boxed{\Delta}$ Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \to \ell \in \mathbb{C}$. Montrer que $\frac{1}{n}(u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}) \to \ell$.

Soient $a > 0$, $\alpha > 1$, $\lambda \neq 0$ et $f \in \mathcal{C}^0([0,a],[0,a])$.

On suppose que $f(x) = x - \lambda x^\alpha + \mathrm{o}(x^\alpha)$ lorsque x tend vers 0.

(b) Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que 0 soit le seul point fixe de f sur $[0,\varepsilon]$.

(c) On suppose que $u_0 \in [0,\varepsilon]$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que $u_n \to 0$.

(d) Donner un équivalent en 0 de $f(x)^{1-\alpha} - x^{1-\alpha}$.

(e) Donner un équivalent de u_n.

(f) Appliquer **(e)** à $f = \sin$ et à $f : x \mapsto \ln(1+x)$.

322 $\boxed{\text{Sn : } \alpha}$

Soit (u_n) une suite réelle bornée telle que $u_n + \frac{1}{2}u_{n+1} \to 1$.

Montrer que (u_n) converge et donner sa limite.

323 $\boxed{\text{Sn : } \alpha}$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Nature de la série de terme général $\frac{(-1)^n n^\alpha + 1}{n^{2\alpha}}$?

324 $\boxed{\text{Sn : } \beta}$

Nature de la série de terme général $\frac{\cos(k)}{k}$?

325 $\boxed{\text{Sn : } \alpha}$

Nature des séries de terme général $\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ et $\frac{1}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}}$.

326 $\boxed{\text{Sn,IntS : } \alpha}$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Nature de la série de terme général $\displaystyle\int_n^{2n} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}$.

327 $\boxed{\text{Sn,IntS : } \alpha}$

Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}$.

(a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur (a,b) pour que la série de terme général $u_n = a^n n^b$ diverge.

(b) $\boxed{\beta}$ Si cette condition est réalisée, donner un équivalent de $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.

328 $\boxed{\text{Sn,IntS : } \alpha}$

Soit $(u_n)_{n \geqslant 0} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$. On suppose que la série de terme général u_n converge.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{u_n}{R_{n-1}{}^\alpha}$.

(a) On suppose $\alpha \leqslant 0$. Montrer que la série de terme général v_n converge.

(b) On suppose $\alpha \geqslant 1$. Montrer que la série de terme général v_n diverge.

(c) On suppose $\alpha \in\,]0,1[$. Montrer que la série de terme général v_n converge.

329 $\boxed{\text{Sn : } \beta}$

Soit f une bijection de $\mathbb{N}^*$. On pose $E(f) = \left\{ \alpha \in \mathbb{R} \,;\ \sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{f(n)}{n^\alpha} \text{ converge} \right\}$.

(a) Montrer que $E(f)$ peut être vide et que, s'il est non vide, c'est un intervalle minoré par 2 et non majoré.

(b) $\boxed{\gamma}$ Soit $B \geqslant 2$. Montrer l'existence de f tel que $E(f) = \,]B,+\infty[$.

330 $\boxed{\text{Sn : } \beta}$

Pour $s \in\,]1,+\infty[$, soit $\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

(a) Si $n \in \mathbb{N}^*$, soit $d(n)$ le nombre de diviseurs de n dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que, si $s > 1$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{d(n)}{n^s} = \zeta(s)^2$.

(b) Pour $s > 2$, montrer que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$, où φ est l'indicatrice d'Euler.

331 $\boxed{\text{F,SE} : \alpha}$

La fonction f est définie par $f(0)=1$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x)=\frac{\sin(x)}{x}$. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

332 $\boxed{\text{IntS,F,Red} : \beta}$

Soit $E=\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Pour $f\in E$, on pose $u(f): x\in[0,1]\mapsto \displaystyle\int_0^1 \min\{x,t\}f(t)\mathrm{d}t$.

(a) $\boxed{\alpha}$ Montrer que u est un endomorphisme de E.

(b) Déterminer ses valeurs propres et ses espaces propres.

333 $\boxed{\text{F} : \beta}$

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivable telle que $f^2+(1+f')^2\leqslant 1$. Montrer que f est nulle.

334 $\boxed{\text{F} : \alpha}$

Déterminer l'ensemble $E=\left\{f\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}_+^*),\ \forall x\in\mathbb{R},\ f''(x)\,f(x)\geqslant 2\,f'(x)^2\right\}$.
Ind. Considérer $g=1/f$.

335 $\boxed{\text{F} : \alpha}$

Soient $f\in\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}_+)$ et $F: x\mapsto \displaystyle\int_0^x f$.

On suppose qu'il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que, pour tout $x\in[0,1]$, $f(x)\leqslant aF(x)$. Montrer que f est nulle.

336 $\boxed{\text{F} : \beta}$

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle. On dit que (u_n) converge au sens de Cesàro vers $\ell\in\mathbb{R}$ si la suite de terme général $\frac{u_0+\cdots+u_{n-1}}{n}$ converge vers ℓ.
On dit que $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est continue au sens de Cesàro si, pour toute suite (u_n) convergeant vers a au sens de Cesàro, la suite $(f(u_n))_{n\geqslant 0}$ converge vers $f(a)$ au sens de Cesàro.
Déterminer les fonctions continues au sens de Cesàro.

337 $\boxed{\text{F,IntG} : \beta}$

Soit $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. On suppose que $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} f''(x)=+\infty$. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{f'(x)}=0$.

338 $\boxed{\text{F} : \alpha}$

Soit $f\in C^1(\mathbb{R})$ strictement croissante ayant une limite finie ou non en $+\infty$.
La fonction f' a-t-elle nécessairement une limite ?

339 $\boxed{\text{IntS,Sn} : \alpha}$

Soit $\alpha\in]0,\pi[$. On pose, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\displaystyle\int_0^\pi \frac{\cos(nt)}{1-\sin(\alpha)\cos(t)}\mathrm{d}t$.

Déterminer la valeur de u_n en fonction de n et α.

340 $\boxed{\text{IntS,Pol,AL} : \alpha}$

Soient $n\geqslant 2$ et $x_1<y_1<x_2<y_2<\ldots<x_n<y_n$ des réels.

(a) Soit $P\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que, pour tout $i=1,\ldots,n$, $\displaystyle\int_{x_i}^{y_i} P=0$. Montrer que P est nul.

(b) Montrer qu'il existe $P\in\mathbb{R}_n[X]$, non nul, tel que $\displaystyle\int_{x_i}^{y_i} P=0$ pour tout $i=1,2,\ldots,n$.

341 $\boxed{\text{IntS} : \alpha\,\Delta}$

On considère une fonction continue $f:[0,1]\to\mathbb{R}_+^*$.

(a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe une subdivision $(a_{n,0},\ldots,a_{n,n})$ du segment $[0,1]$ telle que

$$\forall i\in\{0,\ldots,n-1\},\ \int_{a_{n,i}}^{a_{n,i+1}} f=\frac{1}{n}\int_0^1 f.$$

(b) Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}(a_{n,0}+\cdots+a_{n,n})$.

342 $\boxed{\text{IntG} : \alpha}$

Soit $f\in C^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ telle que $\lim\limits_{+\infty} f=\ell\in\mathbb{R}$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\displaystyle\int_0^n f$.

343 $\boxed{\text{F,IntS} : \alpha}$

Étudier et tracer le graphe de la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$.

344 $\boxed{\text{IntG,F} : \beta}$

Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \int_x^{2x} \frac{\sin^m t}{t^n}\,\mathrm{d}t$.

345 $\boxed{\text{IntG,F} : \alpha}$

Soit $F : x \in]1,+\infty[\to \displaystyle\int_{\ln(x)}^{2\ln(x)} \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t$. Déterminer la limite de F en 1^+. Montrer que F est injective.

346 $\boxed{\text{IntS,F} : \alpha}$

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe C^1 vérifiant, pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 = \int_0^x f(t)^2\,\mathrm{d}t.$$

347 $\boxed{\text{IntS,F} : \alpha}$

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ une fonction de classe C^1 et M un réel tel que $|f'(t)| \leqslant M$ pour tout $t \in [0,1]$.

(a) Soit $x \in [0,1]$. Montrer que $-2M\displaystyle\int_0^x f \leqslant f(x)^2 - f(0)^2 \leqslant 2M\int_0^x f$.

(b) Montrer que $\left|\displaystyle\int_0^1 f^3 - f(0)^2 \int_0^1 f\right| \leqslant M\left(\int_0^1 f\right)^2$.

348 $\boxed{\text{F} : \alpha}$

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$, $f \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ telle que $f'(a) = f'(b) = 0$.

Montrer l'existence de $x \in]0,1[$ tel que $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(x)$.

349 $\boxed{\text{IntS,Sf} : \beta}$

Soit E l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ telles que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

Montrer que, pour toute $f \in E$, $\displaystyle\int_0^1 |f' - f| \geqslant e^{-1}$. La constante e^{-1} est-elle optimale ?

350 $\boxed{\text{IntG} : \beta}$

Soient f une fonction continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ et de carré intégrable.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $F(x) = \frac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f$.

(a) $\boxed{\alpha}$ Montrer que F se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$.

(b) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} F^2 = 2\int_0^{+\infty} fF$.

(c) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} F^2 \leqslant 4\int_0^{+\infty} f^2$.

351 $\boxed{\text{F,IntS} : \alpha}$

Soit $f \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1) = 0$ et $f'(0) = a \in \mathbb{R}$. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 (f'')^2 \geqslant 3a^2$.

352 $\boxed{\text{IntS} : \beta}$

Soit $f \in \mathcal{C}^0[0,1],\mathbb{R})$ telle que $\forall x \in [0,1]$, $\displaystyle\int_x^1 f \geqslant \frac{1-x^2}{2}$. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f^2 \geqslant \frac{1}{3}$.

353 $\boxed{\text{IntG} : \alpha}$

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ décroissante et intégrable. Montrer que $x\,f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

354 $\boxed{\text{IntG,Sn} : \beta}$

Existence et calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{(-1)^{\lfloor 1/x \rfloor}}{x}\,\mathrm{d}x$.

355 $\boxed{\text{IntG,F} : \alpha}$

Convergence et calcul de $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{t}-\arcsin\left(\frac{1}{t}\right)\right)\mathrm{d}t$.

356 $\boxed{\text{IntG} : \beta}$

Étudier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos\left(x^2+ax+b\right)\mathrm{d}x$ pour $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Généraliser.

357 $\boxed{\text{IntG} : \alpha\,\Delta}$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ est-elle convergente ? absolument convergente ?

358 $\boxed{\text{IntG} : \alpha}$

Soit $f\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On suppose f et f'' de carré intégrable.

Montrer que f' est de carré intégrable et que $\displaystyle\left(\int_{-\infty}^{+\infty}(f')^2\right)^2\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty}f^2\int_{-\infty}^{+\infty}(f'')^2$.

359 $\boxed{\text{IntG} : \beta}$

(a) $\boxed{\alpha}$ On note L^2 le sous-espace des f de $C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ de carré intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que L^2 est un sous-espace vectoriel de $C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$.

(b) Soit $f\in C^2(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ tel que f,f',f'' appartiennent à L^2. Montrer que f' et f ont une limite réelle que l'on précisera en $+\infty$.

(c) $\boxed{\gamma}$ Avec les notations de **(b)**, montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(f''^2-4f'^2+16f^2\right)\geqslant 0$ et caractériser le cas d'égalité.

360 $\boxed{\text{IntG,Sf} : \alpha}$

(a) Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(t)}{1-t}\mathrm{d}t$.

(b) En déduire les valeurs de $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(t)}{1-t^2}\mathrm{d}t$ et de $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(t)}{1+t}\mathrm{d}t$.

361 $\boxed{\text{F,Pol} : \beta}$

Soient $a<b$ et $f\in C^0([a,b],\mathbb{R})$. Montrer que f est convexe si et seulement si f est limite uniforme de fonctions polynomiales convexes.

362 $\boxed{\text{Sf,Sn} : \beta}$

Soit (f_n) une suite de fonctions continues définies sur un segment S de $\mathbb{R}$. On suppose que (f_n) converge uniformément sur S vers une fonction f. Montrer que $(\min(f_n))_{n\geqslant 0}$ converge vers $\min(f)$ et $(\max(f_n))_{n\geqslant 0}$ converge vers $\max(f)$. Étudier la réciproque.

363 $\boxed{\text{Sf,Sn,IntS} : \alpha}$

Soit $f\in\mathcal{C}^0([1,+\infty[,\mathbb{R})$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}_+$, on pose $\displaystyle f_n(x)=\int_1^{1+x/n}n\,f(t^n)\mathrm{d}t$.

Étudier la convergence de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$.

364 $\boxed{\text{Sf} : \alpha}$

On définit une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ en posant $f_0=1$ et, si $n\in\mathbb{N}$ et $x\in[0,1]$, $\displaystyle f_{n+1}(x)=1+\int_0^x f_n(t-t^2)\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que les f_n sont polynomiales.

(b) Montrer que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f et que $\forall x\in[0,1], f(x)\leqslant e^x$.

(c) Montrer que $\sum(f_{n+1}-f_n)$ converge normalement sur $[0,1/2]$, puis que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur cet intervalle.

(d) Si $n\in\mathbb{N}$ et $x\in[0,1]$, que dire de $f_n(x)+f_n(1-x)$? Qu'en déduit-on sur f ?

(e) Montrer que f est de classe C^∞ sur $[0,1]$.

365 $\boxed{\text{Sf,IntG : } \alpha}$

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue, décroissante et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On pose $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f(nx)$.

(a) Montrer que g est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
(b) Donner un équivalent de $g(x)$ quand $x \to 0^+$.

366 $\boxed{\text{Sf,IntG : } \alpha}$

Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^\alpha x}$.

(a) Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.
(b) Donner la limite et un équivalent de f en $+\infty$.
(c) Donner la limite et un équivalent de f en 0^+.

367 $\boxed{\text{Sf : } \alpha}$

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} n^x e^{-nx}$. Déterminer le domaine de définition de f, ses variations de f, ainsi que ses limites et un équivalent aux bornes.

368 $\boxed{\text{Sf,F : } \alpha}$

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cos^n(x)\cos(nx)$.

(a) Déterminer le domaine de définition de f ; étudier sa parité et sa périodicité.
(b) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.
(c) Exprimer $f(x)$ et tracer sommairement le graphe de f.

369 $\boxed{\text{Sf,Sn,IntG : } \gamma}$

Soient $\lambda > 1$ et $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!(\lambda^n - 1)}$. Donner un équivalent de f en $+\infty$.

370 $\boxed{\text{Sf,Sn : } \alpha}$

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(x+n)}$.

(a) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculer $f(1)$.
(b) Exprimer $f(x+1)$ en fonction de $f(x)$ et de x.
(c) Déterminer un équivalent de f en 0^+.
(d) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
(e) Déterminer la limite et un équivalent de f en $+\infty$.

371 $\boxed{\text{Sf,Sn : } \alpha}$

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$.

(a) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculer $f(1)$.
(b) Exprimer $f(x+1)$ en fonction de $f(x)$ et de x.
(c) Déterminer un équivalent de f en 0^+.
(d) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
(e) Déterminer la limite et un équivalent de f en $+\infty$.

372 $\boxed{\text{Sf,IntG : } \alpha}$

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$.

(a) Donner le domaine de définition de f et étudier sa dérivabilité.
(b) Déterminer la limite puis un équivalent de f en $+\infty$.

373 $\boxed{\text{Sf : } \alpha}$

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}$.

(a) Déterminer le domaine de définition de f.
(b) Donner un équivalent de f en $+\infty$.

374 Sf,IntG : β

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x\, e^{-nx}}{\ln n}$. Étudier le domaine de définition, la continuité, la dérivabilité de f ; trouver sa limite en $+\infty$ et un équivalent simple.

375 Sf,IntG : α

Soit $f : t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{2^{-nt}} - 1\right)$. On admet que, pour $x \in [0,1]$, $0 \leqslant e^x - 1 - x \leqslant 2x^2$.

(a) Déterminer le domaine de définition de f.
(b) Soit $a > 0$. Étudier la convergence uniforme sur $[a, +\infty[$.
(c) La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}_+^*$?
(d) Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.

376 Sf,F : β

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue, croissante et nulle en 0.

(a) $\boxed{\alpha}$ Montrer qu'en posant $\forall x \in \mathbb{R}_+, g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n f\left(\frac{x}{n}\right)}{1+nx}$, on définit une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$.
(b) Donner une condition suffisante pour que g soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
(c) On suppose f de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$ et $f'(0) = 0$. Montrer que g est dérivable en 0.

377 Sf,IntG : β

Soit $u_n : x \mapsto x \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$.

(a) Montrer la convergence simple de $\sum u_n$ sur $\mathbb{R}_+$.
On pose $f : x \mapsto -\ln x - \sum_{n\geqslant 1} u_n(x)$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

(b) $\boxed{\gamma}$ Montrer que f est l'unique fonction vérifiant les trois points suivants :

$$\forall x > 0,\ f(x+1) - f(x) = \ln x, \quad f \text{ est convexe}, \quad f(1) = 0.$$

(c) Montrer que $f = \ln \Gamma$.

378 Sf : α

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle et $g : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin^n x \sin(nx)$.

(a) On suppose (a_n) bornée. Montrer que g est de classe C^1 sur $\in]\pi/2, \pi/2[$.
(b) Donner une condition suffisante pour que g soit continue sur $\mathbb{R}$.
(c) Donner une condition suffisante pour que g soit de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

379 SE,Sn : α

(a) Rayon de convergence de $\sum \frac{(k+1)(k+2)}{2^k} x^k$?
(b) Calculer $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+1)(k+2)}{2^k}$.

380 SE : α

Montrer que, pour tout $x \in [-1, 1]$, $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$.

381 SE,Sn : β

Soit $\alpha > 1$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \left(\dfrac{1}{\alpha} \sin n + \alpha \sin \dfrac{1}{n}\right)^n$.

(a) Étudier la nature de la série $\sum a_n$.
(b) Quel est le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$?

382 SE,ED,IntG : α

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2^n n!)^2}$.

(a) Déterminer le domaine de définition réel de f.
(b) Trouver une équation différentielle vérifiée par f.
(c) Soit $x > 1$. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-xt} \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

383 $\boxed{\text{SE,ED,Sn : } \alpha}$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note u_n le cardinal de l'ensemble des partitions de $\{1, \ldots, n\}$. On pose $u_0 = 1$.

(a) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k$.

(b) Montrer que, pour tout n, $u_n \leqslant n!$.

(c) Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} x^n$. Montrer que le rayon de convergence de f est > 0.

Donner une expression de $f(x)$. Exprimer u_n sous forme de somme.

384 $\boxed{\text{IntG : } \alpha}$

Soit A une partie de $\mathbb{N}$. On suppose que $\sum_{x \in A} \frac{x^n}{n!} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{e^x}{x^2}$.

(a) Soit I une partie finie de A. Calculer $\displaystyle\sum_{x \in I} \int_0^{+\infty} \frac{x^n e^{-x}}{n!} \mathrm{d}x$. En déduire que A est fini.

(b) Conclusion ?

385 $\boxed{\text{SE : } \alpha}$

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, avec $a_0 \neq 0$. On note f sa somme.

(a) Montrer que $1/f$ est définie au voisinage de 0.

(b) $\boxed{\text{C}}$ Rappeler pourquoi, pour $\rho \in]-R, R[$, il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n|\rho^n < M$.

(c) On suppose dans cette question qu'il existe $r > 0$ et une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tels que :

$$\forall x \in]-r, r[\,, \ \frac{1}{f(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n.$$

Trouver une relation entre les suites (u_n) et (a_n).

(d) $\boxed{\gamma}$ Montrer que la fonction $1/f$ est développable en série entière au voisinage de 0.

386 $\boxed{\text{SE : } \gamma}$

Montrer que $x \mapsto \ln(1 + e^{-x})$ est développable en série entière au voisinage de 0.

387 $\boxed{\text{SE,ED : } \alpha}$

Soit $f : x \mapsto e^{-x^2} \displaystyle\int_0^x e^{t^2} \mathrm{d}t$.

(a) Étudier la parité de f. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

(b) Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0. Que peut-on dire du rayon de convergence de cette série entière ?

(c) Trouver une équation différentielle simple dont f est solution.

388 $\boxed{\text{SE,Sn : } \beta}$

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ et, pour $x \in]-1, 1[$, $f(x) = (1 + x)^\alpha$.

(a) $\boxed{\text{C}}$ Donner une suite réelle $(a_n)_{n \geqslant 0}$ telle que $\forall x \in]-1, 1[$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.

(b) Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $|a_n| \sim \frac{C}{n^{1+\alpha}}$.

(c) La série $\sum a_n$ converge-t-elle ? Si oui, quelle est sa somme ?

389 $\boxed{\text{SE,IntS,Sn : } \gamma}$

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et f sa somme.

(a) $\boxed{\beta}$ On suppose qu'il existe une suite $(z_k)_{k \geqslant 0}$ de complexes non nuls de modules $< R$, convergeant vers 0 et telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f(z_k) = 0$. Montrer que f est nulle.

(b) On suppose que $|f|$ admet un maximum local en 0. Montrer que f est constante.

390 $\boxed{\text{IntG : } \alpha}$

Déterminer un équivalent de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt}}{\sqrt{t}} |\cos t| \mathrm{d}t$.

391 IntG : α

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ bornée. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\,f(0)$.

392 IntG,Sn,SE : α

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^*$ continue et strictement décroissante. On suppose que $f(0) = 1$, que f est intégrable en $+\infty$ et que $\frac{1}{1-f}$ n'est pas intégrable en 0. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^{+\infty} f(t)^n \mathrm{d}t$.

(a) Montrer que I_n est bien définie et que $I_n \to 0$.
(b) Montrer que la série de terme général I_n diverge.
(c) Déterminer le rayon de convergence de $\sum I_n x^n$.

393 IntG : α

Soit $F : a \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \int_{-a}^{a} \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x$. Déterminer la limite de F en 0^+.

394 IntG,Pol : α

On pose $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$.

(a) Montrer que I converge. On admet que $I = -\frac{\pi \ln 2}{2}$.
(b) Soient λ et μ deux réels distincts.
Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{(\lambda+X)(\mu+X)}$.
(c) Pour $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, on considère $f(a,b) = F_b(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln\left(x^2+a^2\right)}{x^2+b^2}\,\mathrm{d}x$.
  (i) Montrer que f est bien définie.
  (ii) Soit $b > 0$. Montrer que F_b est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer F_b'.
  (iii) Calculer $f(b,b)$; on posera $x = b\tan\theta$.
  (iv) Calculer $f(a,b)$.

395 IntG : α

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $0 < a < b$. Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \cos(xt)\mathrm{d}t$.
Justifier l'existence et calculer $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

396 IntG : α

Calculer, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\arctan(x+t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

397 IntG,F : α

On pose $f : x \mapsto \int_0^1 t^{tx}\mathrm{d}t$. Déterminer le domaine de définition de f. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
Donner l'allure de son graphe.

398 IntG,F : α

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\int_1^{+\infty} f$ converge.

(a) Montrer, si $x \in \mathbb{R}_+$, la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^x}\mathrm{d}t$, dont on note $F(x)$ la valeur.
(b) $\boxed{\beta}$ Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+$.

399 IntG : α

Déterminer le domaine de définition et calculer $f : x \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{1+t^x}}$.

400 IntG : β

On pose, pour $x \in \,]0,1[$, $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x(t+1)}$. Montrer que f est bien définie. Trouver des équivalents simples de f au voisinage de 0 et de 1.

401 $\boxed{\text{IntG : }\alpha}$

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(xt)}{t^2}\, e^{-t}\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et paire.

(b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$. Calculer f'' et en déduire une expression de $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

402 $\boxed{\text{IntG : }\alpha}$

Soient $a > 0$ et $g \in \mathcal{C}^0([0,a],\mathbb{R})$ telle que $g(0) \neq 0$. Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^a g(t)\, e^{-xt}\mathrm{d}t$.

Montrer que $F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{g(0)}{x}$.

403 $\boxed{\text{IntG : }\alpha}$

Soient $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ bornée et $L : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-xt}\,\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que L est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) Montrer que $L(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$.

(c) On suppose $f(0)$ non nul. Déterminer un équivalent de L en $+\infty$.

(d) $\boxed{\beta}$ On suppose que $L(0)$ existe. Montrer que L est continue en 0.

(e) On suppose que $t \mapsto tf(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que L est dérivable en 0 et donner $L'(0)$.

404 $\boxed{\text{IntG,ED : }\beta}$

Soit $f \in \mathcal{C}^0\,(]0,1],\mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t$ convergent et telle que :

$$\forall x \in\,]0,1],\ \frac{1}{2}\int_0^x f^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2.$$

On note F la fonction définie sur $[0,1]$ par : $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que F est de classe C^1 sur $]0,1]$.

Trouver une équation différentielle vérifiée par F. En déduire f.

405 $\boxed{\text{IntG,ED : }\beta}$

Soit $I : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t-x/t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que la fonction I est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

(b) Montrer que I est C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifie l'équation différentielle $(E)\ :\ 2xy'' + y' - 2y = 0$.

(c) On pose $y(x) = z(\sqrt{x})$. Résoudre (E).

(d) Donner l'expression de $I(x)$.

406 $\boxed{\text{ED,SE,IntS : }\alpha}$

Soit $(*)$ l'équation différentielle $xy'' + y' - xy = 1$.

(a) Déterminer les solutions de $(*)$ développables en série entière.

(b) Montrer que $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{x\sin(t)}\mathrm{d}t$ est solution de $(*)$.

(c) $\boxed{\beta}$ Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\mathrm{d}t$.

407 $\boxed{\text{ED,IntG : }\beta}$

Soient $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de $y'' + fy = 0$. On suppose f intégrable sur $\mathbb{R}$.

(a) $\boxed{\text{C}}$ Soient $y_1, y_2 \in \mathcal{S}$ et $w = y_1y_2' - y_1'y_2$. Que peut-on dire de w ?

(b) Montrer que $\mathcal{S}$ contient des fonctions non bornées.

408 $\boxed{\text{ED : }\alpha}$

Soit f une fonction de classe C^2 de $[0,2\pi]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f'' + f \geqslant 0$. Quel est le signe de $\displaystyle\int_0^{2\pi} f$?

409 $\boxed{\text{ED} : \alpha}$

Soient $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et 2π-périodiques. Soient

$$A \ : x \mapsto \int_0^x a, \quad I = A(2\pi), \quad (E) \ : y' + a(x)y + b(x) = 0.$$

(a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur I pour que A soit 2π-périodique.

(b) Montrer que y est solution de (E) si et seulement si $x \mapsto y(x + 2\pi)$ l'est.

(c) $\boxed{\beta}$ On suppose $I \neq 0$. Montrer que (E) possède une unique solution 2π-périodique.

(d) $\boxed{\beta}$ Que se passe-t-il si $I = 0$?

(e) Dessiner les différentes situations.

410 $\boxed{\text{ED,AQ} : \beta}$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne canonique. Prouver l'équivalence entre :

(i) A est antisymétrique,

(ii) pour toute solution de $X' = AX$, l'application $t \mapsto \|X(t)\|$ est constante.

411 $\boxed{\text{CD} : \alpha}$

Étudier la continuité et la différentiabilité à l'origine de $f : (x, y) \mapsto \max\left(\frac{x^4 y}{|x|+y^2}, \frac{y^4 x}{|y|+x^2}\right)$.

412 $\boxed{\text{CD,Top,SE} : \alpha}$

Soient $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ \sin(xy) \neq -1\}$, $V = \{(x, y) \in U \ ; \ xy = 0\}$, f la fonction de U dans $\mathbb{R}$ égale à 1 sur V et telle que $\forall (x, y) \in U \setminus V, f(x, y) = \frac{\ln(1+\sin(xy))}{xy}$.

(a) Montrer que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, représenter U.

(b) $\boxed{\beta}$ Montrer que f est de classe C^∞ sur U.

413 $\boxed{\text{CD,IntG} : \beta}$

Soit $F : (x, y) \mapsto \displaystyle\int_0^\pi \ln(x + y \cos t) \mathrm{d}t$.

(a) Donner le domaine de définition D de F.

(b) Calculer $F(x, x)$.

(c) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intérieur de D.

(d) Donner une expression de $F(x, y)$ sans symbole d'intégration.

414 $\boxed{\text{CD,IntS} : \beta}$

On recherche le minimum de la fonction $f : (a, b) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \displaystyle\int_{-1}^1 |t^2 + at + b| \, \mathrm{d}t$.

(a) Déterminer le minimum de la fonction $b \mapsto f(0, b)$ et la valeur de b en laquelle il est atteint.

(b) $\boxed{\alpha}$ Soit $b \in \mathbb{R}$. On considère maintenant la fonction $a \mapsto f(a, b)$. Montrer qu'elle est paire et convexe. En déduire son minimum et le point où il est atteint.

(c) Déterminer le minimum de f. En quel(s) point(s) de $\mathbb{R}^2$ est-il atteint ?

415 $\boxed{\text{CD} : \alpha}$

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Déterminer les fonctions de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telles que $a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

416 $\boxed{\text{CD} : \alpha}$

Montrer que les fonctions f de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, 2xy\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + (1 + y^2)\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

sont les applications de la forme $f(x, y) = g\left(\frac{x}{1+y^2}\right)$, où $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une application de classe C^1.

417 $\boxed{\text{AQ,F} : \alpha}$

Soient E un espace euclidien, $\| \ \|$ la norme de cet espace, $\varphi \in E^*$, f la fonction de E dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall x \in E, f(x) = \varphi(x) \, e^{-\|x\|^2}$. Étudier les extrema de f.

418 $\boxed{\text{CD,AL} : \gamma}$

Soit $n \geqslant 2$ un entier. Déterminer l'ensemble des vecteurs tangents à $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ en I_n.

Probabilités

419 $\boxed{\text{Pr} : \alpha}$

On part à la cueillette aux champignons. Le nombre N de champignons récoltés suit la loi de Poisson de paramètre 5. Chaque champignon a la probabilité $2/3$ d'être comestible.

(a) Déterminer la probabilité de ramasser exactement un champignon comestible et un champignon non comestible.

(b) Déterminer la probabilité que tous les champignons ramassés soient non comestibles.

420 $\boxed{\text{Pr} : \alpha}$

Une urne contient b boules blanches et a boules argentées, indiscernables au toucher. On tire les boules, une et à une et sans remise, et on note X la variable aléatoire correspondant au nombre de tirages nécessaires pour tirer toutes les boules blanches.

(a) Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \leqslant q$. Montrer que $\sum\limits_{k=p}^{q} \binom{k}{p} = \binom{q+1}{p+1}$.

(b) Établir la loi de X.

(c) Donner l'espérance et la variance de X.

421 $\boxed{\text{Pr} : \alpha}$

On considère une urne remplie de $2N$ boules numérotées de 1 à $2N$. On vide l'urne en tirant les boules une par une.

(a) On note X_N la variable aléatoire égale au rang de la dernière boule de numéro impair tirée. Déterminer l'espérance de X_N et sa loi.

(b) Donner un équivalent simple de $\mathbb{E}(X_N)$ quand N tend vers $+\infty$.

(c) Soit A l'événement : les boules impaires ont été tirées dans l'ordre croissant. Calculer $\mathbb{P}(A)$.

422 $\boxed{\text{Pr} : \alpha}$

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ avec $1 \leqslant p \leqslant n-1$. On extrait simultanément p boules d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. Soit X la variable aléatoire donnant le maximum des numéros tirés. Déterminer la loi de X. Calculer son espérance et sa variance.

423 $\boxed{\text{Pr} : \beta}$

Soient n et m deux entiers naturels non nuls tels que $n \geqslant m$. On dispose de n cases numérotées de 1 à n, dans lesquelles on répartit aléatoirement m boules. Soit Δ la variable qui donne la différence entre le numéro maximal et le numéro minimal des cases non vides. Déterminez la loi de Δ et son espérance.

424 $\boxed{\text{Pr} : \alpha}$

Soient $p \in]0, 1[$ et $\alpha \in]0, \frac{1}{p} - 1[$. Une famille a $n \in \mathbb{N}^*$ enfants avec la probabilité αp^n. Un enfant est un garçon ou une fille de façon équiprobable.

(a) Quelle est la probabilité de ne pas avoir d'enfant ?

(b) Quelle est la probabilité d'avoir exactement $k \in \mathbb{N}$ garçons ?

(c) Quelle est la probabilité d'avoir au moins deux garçons sachant qu'on a au moins un garçon ?

425 $\boxed{\text{Pr} : \beta}$

Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ avec $m < n$. Soient A une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'ensemble des parties à m éléments de $\{1, \ldots, n\}$, et $X = \max(A) - \min(A)$. Déterminer la loi et l'espérance de X.

426 $\boxed{\text{Pr,IntG} : \alpha}$

Soit $r > 0$.

(a) Montrer que $\left(p_k = \displaystyle\int_0^1 r x^{k-1}(1-x)^r \mathrm{d}x\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une distribution de probabilités sur $\mathbb{N}^*$. Soit X une variable telle que $\mathbf{P}(X = k) = p_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

(b) $\boxed{\beta}$ Quels sont les r pour lesquels X a une espérance ? Calculer $\mathbb{E}(X)$ lorsque X est d'espérance finie.

427 Pr : α

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilité, X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ suivant la loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots, n\}$, $m \in \{1, \ldots, n\}$. Soit Z la variable aléatoire telle que $Z(\omega) = X(\omega)$ si $Y(\omega) \leqslant m$ et $Z(\omega) = Y(\omega)$ sinon.

(a) Déterminer la loi de Z. Calculer $\mathbb{E}(Z)$.

(b) Déterminer les entiers m qui maximisent l'espérance de Z.

428 Pr : α

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant les lois géométriques de paramètres p_1 et p_2. Calculer les espérances de $\min(X_1, X_2)$ et $\max(X_1, X_2)$.

429 Pr : α

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, de même loi, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

Montrer que $\mathbb{E}(X/Y) \geqslant 1$.

430 Pr : β

Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $[a, b]$. Montrer que $\mathbb{V}(X) \leqslant \frac{(b-a)^2}{4}$.

431 Pr : α

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, $n \in \mathbb{N}^*$, $m \in \{1, \ldots, n\}$, $X_1, \ldots, X_n$ une suite i.i.d. de variables aléatoires discrètes suivant la loi de X. Calculer l'espérance de $\dfrac{\sum_{k=1}^{m} X_k}{\sum_{k=1}^{n} X_k}$.

432 Pr : α

On lance une pièce équilibrée et on appelle X la variable aléatoire donnant le rang d'apparition de la première séquence « pile-face ». Déterminer l'espérance de X.

433 Pr : α

Dans un jeu, deux joueurs s'affrontent indéfiniment dans une succession de parties indépendantes. Le joueur A (resp. B) a la probabilité p (resp. $q = 1 - p$) de gagner une partie. On note a_{2n} la probabilité pour qu'après $2n$ parties A et B aient gagné autant de parties.

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n} x^n$.

(a) Déterminer a_{2n} pour $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) Déterminer le rayon de convergence de f. La série $\sum a_{2n}$ est-elle convergente ?

(c) Exprimer $f(x)$.

(d) $\boxed{\gamma}$ Quelle est la probabilité qu'il n'y ait jamais égalité au cours du jeu ?

434 Pr : β

Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi géométrique de paramètre $p \in \,]0, 1[$.

(a) Donner la loi de $S_n = \sum_{k=1}^{n-1} X_k$.

(b) Évaluer $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} \left(X_k \geqslant \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq k}} X_i \right) \right)$.

436 Pr,Sn : α

Soit $(X_k)_{k \geqslant 1}$ une suite de variables i.i.d. de loi $\mathcal{B}(2/3)$.

Soit $T = \min\{k \geqslant 2, X_k = X_{k-1} = 1\}$. Calculer l'espérance de T.

437 Pr : α

Montrer, en utilisant une variable aléatoire, l'inégalité $\frac{n-1}{n} 2^{4n} \leqslant \sum_{k=n+1}^{3n-1} \binom{4n}{k}$.

438 Pr,SE : α

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres p et q dans $]0, 1[$. On pose $Z_n = \exp(-n(X + Y))$. Justifier que Z_n admet une variance. Trouver un équivalent de $\mathbb{V}(Z_n)$.

439 $\boxed{\text{Pr,Sn : }\alpha}$

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite i.i.d de variables aléatoires suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On pose $q = 1-p$. Pour $n,k \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$ et $k \geqslant 1$, on pose $A_n = (X_1 < \cdots < X_n)$, $B_{n,k} = (X_1 < \cdots < X_n,\ X_1 = k)$, $u_n = \mathbb{P}(A_n)$, $v_{n,k} = \mathbb{P}(B_{n,k})$. Si $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\pi_n = \prod_{j=1}^{n}(1-q^j)$.

(a) Calculer $\mathbb{P}(X_1 = X_2)$ et $\mathbb{P}(X_1 < X_2)$.

(b) Montrer, pour $n \geqslant 3$ et $k \in \mathbb{N}^*$, $v_{n,k} = pq^{k-1}\sum_{j=k+1}^{+\infty} v_{n-1,j}$.

(c) En déduire que, pour $n \geqslant 2$ et $k \in \mathbb{N}^*$, $v_{n,k} = \frac{1}{\pi_{n-1}}(pq^{k-1})^n q^{\alpha_n}$ où α_n est un entier que l'on précisera.

(d) $\boxed{\beta}$ En déduire que, pour $n \geqslant 2$, $u_n = \frac{1}{\pi_n}p^{\beta_n}q^{\gamma_n}$ où β_n et γ_n sont des entiers que l'on précisera. Donner enfin un équivalent de u_n.

440 $\boxed{\text{Pr : }\alpha}$

Un centre reçoit des appels téléphoniques. On suppose que la variable aléatoire N donnant le nombre d'appels entrants au cours d'une journée suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Au cours de la journée, certains appels peuvent être de faux appels. La probabilité qu'un appel entrant soit faux est p.

Donner la loi du nombre Z de faux appels reçus dans la journée.

441 $\boxed{\text{Pr : }\beta}$

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note $X \prec Y$ si pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\mathbb{P}(X \geqslant t) \leqslant \mathbb{P}(Y \geqslant t)$.

(a) Montrer que $X \prec Y$ si et seulement si, pour toute fonction $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ croissante et bornée, on a $\mathbb{E}(h(X)) \leqslant \mathbb{E}(h(Y))$.

(b) Soient X_λ et X_μ des variables de Poisson de paramètres respectifs λ et μ. Montrer que $X_\lambda \prec X_\mu$ si et seulement si $\lambda \leqslant \mu$.

(c) On suppose X et Y indépendantes et $X \prec Y$. Montrer que $\mathbb{P}(X \leqslant Y) \geqslant 1/2$.

442 $\boxed{\text{Pr,Sn : }\alpha}$

Une urne contient n boules identiques numérotées de 1 à n. On effectue des tirages. Après chaque tirage, on enlève les boules qui ont un numéro supérieur ou égal à celui de la boule tirée. On note X_n le nombre de tirages nécessaires pour vider l'urne.

(a) Calculer $\mathbb{E}(X_1)$ et $\mathbb{E}(X_2)$.

(b) Soit $n \geqslant 2$. Montrer que $\mathbb{E}(X_n) = 1 + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\mathbb{E}(X_k)$.

(c) Déterminer un équivalent de $\mathbb{E}(X_n)$.

443 $\boxed{\text{Pr : }\alpha}$

Soit X une variable aléatoire réelle positive admettant un moment d'ordre 2.

(a) Montrer que, pour tout $\lambda > 0$, $X \leqslant \lambda\mathbf{E}(X) + X\mathbf{1}_{x\geqslant\lambda\mathbf{E}(X)}$.

(b) On suppose que $\mathbb{E}(X^2) > 0$. Montrer que $\forall\lambda \in]0,1[$, $\mathbb{P}(X \geqslant \lambda\mathbf{E}(X)) \geqslant (1-\lambda)^2\frac{\mathbf{E}(X)^2}{\mathbf{E}(X^2)}$.

444 $\boxed{\text{Pr : }\beta}$

Soit $(X_k)_{k\geqslant 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires de Rademacher. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

(a) Montrer que $\forall (n,t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+, \mathbb{E}(e^{tS_n}) \leqslant e^{\frac{nt^2}{2}}$.

(b) Montrer que $\forall (n,a) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+^*, \mathbb{P}(|S_n| \geqslant a) \leqslant 2e^{-\frac{a^2}{2n}}$.

445 $\boxed{\text{Pr : }\gamma\,\Delta}$

Soit (X_n) une suite i.i.d. de variables aléatoires réelles ayant un moment d'ordre 4.

On pose $m = \mathbb{E}(X_1)$, $V_2 = \mathbb{E}\left((X_1 - \mathbb{E}(X_1))^2\right)$ et $V_4 = \mathbb{E}\left((X_1 - \mathbb{E}(X_1))^4\right)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Pour $n > 0$, on note A_n^ε l'événement $\left(\left|\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - m\right| \geqslant \varepsilon\right)$.

(a) Donner une majoration de $\mathbb{P}(A_n^\varepsilon)$ à l'aide de n, V_2 et V_4.

(b) En déduire que la série de terme général $\mathbb{P}(A_n^\varepsilon)$ converge.

(c) $\boxed{\beta}$ En déduire que la suite $\left(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers m.