MP 20-21

MEMO DETERMINANTS

Document de 4 pages 30 septembre 2020

I. Déterminants

$(\mathbb{K},+,\times)$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$, n un entier naturel non nul et $(E,+,\cdot)$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n. On note $\mathcal{B}=(e_1,e_2,\ldots,e_n)$ une base de E.

I.1 Formes $n-$linéaires alternées sur E

Définition 1 Une application $\varphi : E^n \longrightarrow \mathbb{K}$ est appelée une forme $n-$linéaire sur E si elle est linéaire par rapport à chacune de ses variables.

Proposition I.1 *L'ensemble $\mathcal{L}_n(E)$ des formes $n-$linéaires sur E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (en tant que sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{E^n}$).*

Remarque I.1 *Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$ et $\varphi \in \mathcal{L}_n(E)$, on définit $\sigma * \varphi \in \mathcal{L}_n(E)$ en posant*
$\forall (x_1,\ldots,x_n) \in E^n$, $\sigma * \varphi(x_1,\ldots,x_n) = \varphi\left(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)}\right)$
On a alors les propriétés suivantes :
- $\forall \sigma \in \mathcal{S}_n$, $\forall \varphi_1,\varphi_2 \in \mathcal{L}_n(E)$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\sigma * (\lambda\,\varphi_1+\varphi_2) = \lambda\,\sigma * \varphi_1 + \sigma * \varphi_2$
- $\forall \sigma,\rho \in \mathcal{S}_n$, $\forall \varphi \in \mathcal{L}_n(E)$, $(\sigma\,\rho) * \varphi = \sigma * (\rho * \varphi)$

Définition 2 Une forme $n-$linéaire φ sur E est dite :
- antisymétrique lorsque $\forall \sigma \in \mathcal{S}_p$, $\sigma * \varphi = \varepsilon(\sigma)\,\varphi$
- alternée lorsque pour tout $n-$uplet $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ de E^n dont deux vecteurs sont égaux, on a $\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0$.

Proposition I.2 *Soit $\varphi \in \mathcal{L}_n(E)$. Si φ est alternée, alors φ est antisymétrique.*
Réciproquement, comme $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$, si φ est antisymétrique, alors φ est alternée.

Proposition I.3 *L'ensemble $\mathcal{A}_n(E)$ des formes $n-$linéaires alternées sur E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}_n(E)$.*

I.2 Déterminant dans la base $\mathcal{B}$

Théorème 1 *Il existe une et une seule forme n-linéaire alternée sur E prenant la valeur 1 sur $\mathcal{B}$. Elle est appelée déterminant dans la base $\mathcal{B}$ et notée $\det_{\mathcal{B}}$.*
Le $\mathbb{K}-$espace vectoriel $\mathcal{A}_n(E)$ est une droite vectorielle (c'est la droite vectorielle engendrée par $\det_{\mathcal{B}}$) et on a : $\boxed{\forall \varphi \in \mathcal{A}_n(E),\ \varphi = \varphi(e_1,e_2,\ldots,e_n)\,\det_{\mathcal{B}}}$.
Pour tout $(x_1,\ldots,x_n) \in E^n$ avec $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\,e_i$ le scalaire $\det_{\mathcal{B}}(x_1,\ldots,x_n)$ est appelé déterminant dans la base $\mathcal{B}$ du système de vecteurs $(x_1,\ldots,x_n)$ et a pour expression

$$\boxed{\det_{\mathcal{B}}(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)\,a_{1\sigma(1)}\,a_{2\sigma(2)}\,\ldots a_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)\,a_{\sigma(1)1}\,a_{\sigma(2)2}\ldots a_{\sigma(n)n}}$$

Proposition I.4 *Une condition nécessaire et suffisante pour que le système de vecteurs $(x_1,\ldots,x_n)$ soit libre (et donc une base de e) est : $\det_{\mathcal{B}}(x_1,\ldots,x_n) \neq 0$.*

I.3 Déterminant d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

Théorème 2 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Il existe un et un seul scalaire, appelé déterminant de f et noté* $\det(f)$ *tel que* $\forall \varphi \in \mathcal{A}_n(E)$, $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in E^n$, $\varphi(f(x_1), \ldots, f(x_n)) = \det(f)\, \varphi(x_1, \ldots, x_n)$.
On a l'expression de $\det(f)$ *suivante* $\boxed{\det(f) = \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \ldots, f(e_n))}$.

Proposition I.5 *On a les propriétés suivantes :*
- $\det(\mathrm{id}_E) = 1$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall f \in \mathcal{L}(E)$, $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$
- $\forall f, g \in \mathcal{L}(E)$, $\det(g \circ f) = \det(g) \det(f)$

Proposition I.6 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Une condition nécessaire et suffisante pour que f soit inversible est* $\det(f) \neq 0$.
Dans ce cas, on a $\boxed{\det(f^{-1}) = (\det(f))^{-1}}$.

Définition 3 L'application $\begin{array}{ccc} GL(E) & \longrightarrow & \mathbb{K}^* \\ f & \longrightarrow & \det(f) \end{array}$ est un morphisme de groupes. Son noyau est un sous-groupe de $GL(E)$ appelé groupe spécial linéaire de E, noté $SL(E)$.
Ainsi $SL(E) = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid \det(f) = 1\}$.

Définition 4 Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle déterminant de A, noté $\det(A)$, le déterminant du système de vecteurs colonnes de A dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

On note aussi $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

Proposition I.7 *Mêmes notations et hypothèses. On a*

$$\boxed{\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{1\sigma(1)}\, a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1)1}\, a_{\sigma(2)2} \ldots a_{\sigma(n)n}}$$

et notamment $\boxed{\det(A) = \det({}^tA)}$.

Règles de calcul :

- Lorsque l'on échange deux lignes (ou deux colonnes) d'une matrice, son déterminant est changé en son opposé.
- Le déterminant d'une matrice est fonction linéaire de chacune de ses lignes (ou colonnes).
- Le déterminant d'une matrice est inchangé lorsque l'on ajoute à une ligne (ou colonne) une combinaison linéaire des autres.

Proposition I.8 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Le déterminant de f est égal au déterminant de la matrice représentant f dans une base arbitraire de E.*

Proposition I.9
- $\det(I_n) = 1$

- $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$
- $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(A B) = \det(A) \det(B)$

Proposition I.10 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Une condition nécessaire et suffisante pour que A soit inversible est* $\det(A) \neq 0$.
Dans ce cas $\boxed{\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}}$.

Définition 5 L'application $\begin{array}{ccc} GL_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K}^* \\ A & \longrightarrow & \det(A) \end{array}$ est un morphisme de groupes. Les matrices carrées d'ordre n inversibles de déterminant égal à 1 constituent un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{K})$ appelé groupe spécial linéaire d'ordre n et noté $SL_n(\mathbb{K})$.

Proposition I.11 *Formules de Cramer.*
Considérons le système de Cramer $A X = b$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$; il admet une et une seule solution. Celle-ci peut être calculée à l'aide des formules dites de Cramer

$$\forall j \in [\![1, n]\!],\ x_j = (\det(A))^{-1} \det(C_1, C_2, \dots, C_{j-1}, b, C_{j+1}, \dots, C_n)$$

où $C_1, C_2, \dots, C_n$ sont les vecteurs colonnes de la matrice A.

II. Méthodes de calcul des déterminants

Théorème 3 *Soit* $p, q \in \mathbb{N}^*$, $n = p + q$ *et* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *de la forme* $M = \begin{pmatrix} A & C \\ (0) & B \end{pmatrix}$ *avec* $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ *et* $B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$. *On a alors* $\boxed{\det(M) = \det(A)\ \det(B)}$.

Corollaire II.1 *Le déterminant d'une matrice triangulaire (notamment diagonale) est le produit de ses termes diagonaux.*

Désormais A désigne une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$, $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

Définition 6 On appelle mineur relatif au terme a_{ij} de la matrice A le déterminant D_{ij} de la matrice extraite de A en en supprimant la i^{me} ligne et la j^{me} colonne.
On appelle cofacteur du terme a_{ij} le scalaire $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}\, D_{ij}$.

Proposition II.1 *Pour tous* $i, j \in [\![1, n]\!]$ *on a* $\boxed{\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\, \Delta_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, \Delta_{ik}}$.
On dit que l'on effectue le développement de $\det(A)$ *suivant la* j^{me} *colonne ou suivant la* i^{me} *ligne.*

Définition 7 On appelle comatrice de A la matrice des cofacteurs des termes de A, notée $com\,(A)$, c'est-à-dire $com\,(A) = (\Delta_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

Proposition II.2 *On a* $\boxed{A\, {}^t com\,(A) = {}^t com\,(A)\ A = \det(A)\, I_n}$.
Notamment, si A *est inversible* $\boxed{A^{-1} = (\det(A))^{-1}\ {}^t com\,(A)}$.

Exemple 1 *Déterminant de Van der Monde.*
Etant donnés des scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *on a*

$$\boxed{\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\alpha_j - \alpha_i)}$$