DEVELOPPEMENTS LIMITES USUELS

MP 20-21

A connaître par coeur

Dans ce qui suit, n désigne un entier naturel et les développements limités sont exprimés au voisinage de 0.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right)$$

$$\mathrm{ch}\left(x\right) = 1 + \frac{x2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2\,n)!} + o\left(x^{2n}\right)$$

$$\mathrm{sh}\left(x\right) = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2\,n+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

$$\cos\left(x\right) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n\,\frac{x^{2n}}{(2\,n)!} + o\left(x^{2n}\right)$$

$$\sin\left(x\right) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n\,\frac{x^{2n+1}}{(2\,n+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

Etant donné un réel α

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}\,x + \frac{\alpha\,(\alpha-1)}{2!}\,x^2 + \cdots + \frac{\alpha\,(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\,x^n + o\left(x^n\right)$$

Notamment

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n\,x^n + o\left(x^n\right)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o\left(x^n\right)$$

puis si n est non nul

$$\ln\left(1+x\right) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\,\frac{x^n}{n} + o\left(x^n\right)$$

$$\ln\left(1-x\right) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o\left(x^n\right)$$

sans oublier

$$\arctan\left(x\right) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n\,\frac{x^{2n+1}}{2\,n+1} + o\left(x^{2n+1}\right)$$