MP 21-22

MEMO FONCTIONS DE LA VARIABLE REELLE

I Fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ 1

I.1 Fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ . . . 1

I.2 Fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ . . . 1

II Etude locale d'une fonction 3

II.1 Notion de limite . . . 3

II.2 Théorèmes généraux sur les limites . . . 5

II.3 Continuité en un point . . . 5

III Fonctions définies sur un intervalle 7

III.1 Théorème de la limite monotone . . . 7

III.2 Fonctions continues sur un intervalle . . . 7

Continuité et uniforme continuité . . . 7

Fonctions à valeurs réelles . . . 8

III.3 Fonctions continues strictement monotones sur un intervalle . . . 8

IV Dérivabilité d'une fonction en un point 10

IV.1 Dérivée d'une fonction . . . 10

IV.2 Calcul des dérivées . . . 11

IV.3 Dérivées successives . . . 11

V Etude globale des fonctions dérivables 13

V.1 Théorème de Rolle . . . 13

V.2 Théorème des accroissements finis . . . 13

V.3 Applications . . . 14

VI Construction de l'intégrale sur un segment 15

VI.1 Intégration de fonctions en escalier sur un segment . . . 15

Définitions . . . 15

Propriétés . . . 15

VI.2 Intégration de fonctions continues par morceaux sur un segment . . . 16

VI.3 Propriétés de l'intégrale . . . 17

Propriétés issues de la définition . . . 17

Inégalités . . . 17

Sommes de Riemann . . . 18

VII Primitives et intégrales 19

VII.1 Intégrale fonction d'une de ses bornes . . . 19

VII.2 Procédés d'intégration . . . 19

Changement de variable . . . 20

Intégration par parties . . . 20

VIII Formules de Taylor 21

VIII.1 Formule de Taylor reste intégrale (dite de Taylor-Laplace) . . . 21

VIII.2 Inégalité de Taylor-Lagrange . . . 21

VIII.3 Formule de Taylor-Young . . . 21

I. Fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. $\mathbb{A}$ désigne une partie non vide de $\mathbb{R}$.

I.1 Fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$

Rappelons que $\mathbb{R}^{\mathbb{A}}$ est muni de la relation d'ordre définie par

$$\forall (f,g) \in \left(\mathbb{R}^{\mathbb{A}}\right)^2, \quad f \leqslant g \Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{A},\ f(x) \leqslant g(x)$$

Définition 1 Soit $(f,g) \in \left(\mathbb{R}^{\mathbb{A}}\right)^2$. On appelle valeur absolue de f l'application, notée $|f|$, définie par

$$\begin{array}{rccl} |f| : & \mathbb{A} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & |f(x)| \end{array}$$

On note $\sup(f,g)$ (resp. $\inf(f,g)$) l'application définie par

$$\begin{array}{rccl} \sup(f,g) : & \mathbb{A} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & \max\left(f(x), g(x)\right) \end{array} \quad \textit{resp.} \quad \begin{array}{rccl} \inf(f,g) : & \mathbb{A} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & \min\left(f(x), g(x)\right) \end{array}$$

On note f^+ (resp. f^-) l'application définie par $f^+ = \sup(f,0)$ (resp. $f^- = \sup(-f,0)$).

Remarque I.1 $\sup(f,g)$ *(resp.* $\inf(f,g)$*) est la borne supérieure (resp. inférieure) de* $\{f,g\}$ *dans l'ensemble ordonné* $(\mathbb{R}^{\mathbb{A}}, \leqslant)$.
Avec les notations précédentes, f^+ *et* f^- *sont à valeurs positives et on a les relations suivantes :*

$$f = f^+ - f^- \qquad |f| = f^+ + f^-$$

puis

$$f^+ = \frac{1}{2}\left(|f| + f\right) \qquad f^- = \frac{1}{2}\left(|f| - f\right)$$

Remarque I.2 *Soit* $(f,g) \in \left(\mathbb{R}^{\mathbb{A}}\right)^2$*. On a les relations*

$$\sup(f,g) = \frac{1}{2}\left(f + g + |f-g|\right) \qquad \inf(f,g) = \frac{1}{2}\left(f + g - |f-g|\right)$$

Définition 2 Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{A}}$. L'application f est dite majorée (resp. minorée) lorsqu'il existe un réel M tel que

$$\forall x \in \mathbb{A},\ f(x) \leqslant M \qquad (\textit{resp.}\ \forall x \in \mathbb{A},\ f(x) \geqslant M)$$

Si f est majorée et minorée, on dit que f est bornée.
Si f est majorée (resp. minorée), elle admet une borne supérieure (resp. inférieure) qui est par définition celle de $f(\mathbb{A})$ et est notée $\sup\limits_{\mathbb{A}} f$ ou $\sup\limits_{x \in \mathbb{A}} f(x)$ (resp. $\inf\limits_{\mathbb{A}} f$ ou $\inf\limits_{x \in \mathbb{A}} f(x)$).

Remarque I.3 *Soit* $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{A}}$*. Une condition nécessaire et suffisante pour que* f *soit bornée est que* $|f|$ *soit majorée.*

I.2 Fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

Définition 3 Soit $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{A}}$. On appelle module de f, l'application, notée $|f|$, définie par

$$\begin{array}{rccl} |f| : & \mathbb{A} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & |f(x)| \end{array}$$

On dit que l'application f est bornée lorsque l'application $|f|$ est majorée.
On appelle partie réelle (resp. imaginaire) de f l'application, notée $\mathrm{Re}(f)$ (resp. $\mathrm{Im}(f)$), définie par

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Re}(f) : \mathbb{A} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & \mathrm{Re}(f(x)) \end{array} \quad (resp. \begin{array}{rcl} \mathrm{Im}(f) : \mathbb{A} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & \mathrm{Im}(f(x)) \end{array})$$

On appelle conjuguée de f l'application, notée $\overline{f}$, définie par

$$\begin{array}{rcl} \overline{f} : \mathbb{A} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & \overline{f}(x) \end{array}$$

Remarque I.4 *Soit $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{A}}$. Une condition nécessaire et suffisante pour que f soit bornée est que $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le soient.*

Notation : Lorsque la fonction f (à valeurs réelles ou complexes) est bornée, on note communément $\|f\|_{\infty,\mathbb{A}}$, ou plutôt $\|f\|_\infty$ si le contexte est assez clair, le réel

$$\|f\|_{\infty,\mathbb{A}} = \|f\|_\infty = \sup_{\mathbb{A}} |f|$$

II. Etude locale d'une fonction

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. $\mathbb{A}$ désigne une partie non vide de $\mathbb{R}$.

Définition 4 On dit que l'élément a de $\overline{\mathbb{R}}$ est adhérent à $\mathbb{A}$ s'il existe une suite d'éléments de $\mathbb{A}$ qui tend vers a.

Dans ce paragraphe $f \in \mathbb{K}^{\mathbb{A}}$ et a est un point de $\overline{\mathbb{R}}$ adhérent à $\mathbb{A}$.

Définition 5 Si a est réel, on dit que f vérifie une propriété au voisinage de a s'il existe un réel strictement positif h tel que $f_{|\mathbb{A}\cap]a-h,a+h[}$ vérifie cette propriété.
Si $a = +\infty$ (resp. $a = -\infty$), on dit que f vérifie une propriété au voisinage de a s'il existe un réel c tel que $f_{|\mathbb{A}\cap]c,+\infty[}$ (resp. $f_{|\mathbb{A}\cap]-\infty,c[}$) vérifie cette propriété.

II.1 Notion de limite

Définition 6 On suppose a réel et ℓ appartient à $\mathbb{K}$.
On dit que f a pour limite ℓ en a (ou que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a) lorsque

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \mid \forall x \in \mathbb{A},\ |x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Remarque II.1 *En cas d'existence, le nombre ℓ est unique et appelé la limite de f en a. On utilise les notations*

$$\ell = \lim_{x\to a} f(x) \qquad \ell = \lim_a f \qquad f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$$

Lorsque a appartient à $\mathbb{A}$, on a nécessairement $\ell = f(a)$.

Définition 7 On suppose a réel et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
On dit que f a pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) en a (ou que $f(x)$ tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) quand x tend vers a) lorsque

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists \eta > 0 \mid \forall x \in \mathbb{A},\ |x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \geqslant M$$

resp.

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists \eta > 0 \mid \forall x \in \mathbb{A},\ |x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \leqslant M$$

On utilise les notations

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \qquad \lim_a f = +\infty \qquad f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$$

resp.

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \qquad \lim_a f = -\infty \qquad f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty$$

Définition 8 On suppose a réel.
Ou bien $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, soit alors $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, ou bien $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, soit alors $\ell \in \mathbb{C}$.
On dit que f admet ℓ pour limite à droite (resp. à gauche) en a si a est adhérent à $\mathbb{A}\cap]a,+\infty[$ (resp. $\mathbb{A}\cap]-\infty,a[$) et $f_{|\mathbb{A}\cap]a,+\infty[}$ (resp. $f_{|\mathbb{A}\cap]-\infty,a[}$) admet ℓ pour limite en a.
Lorsque $\ell \in \mathbb{K}$, ceci s'écrit

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \mid \forall x \in \mathbb{A},\ 0 < x-a \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

resp.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \mid \forall x \in \mathbb{A},\ -\eta \leqslant x-a < 0 \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

et lorsque $\ell = +\infty$

$$\forall M \in \mathbb{R},\, \exists \eta > 0 \mid \forall x \in \mathbb{A},\, 0 < x - a \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \geqslant M$$

resp.

$$\forall M \in \mathbb{R},\, \exists \eta > 0 \mid \forall x \in \mathbb{A},\, -\eta \leqslant x - a < 0 \Longrightarrow f(x) \geqslant M$$

Remarque II.2 *En cas d'existence, la limite à droite (resp. à gauche) de f en a est unique et on utilise les notations*

$$\ell = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) \qquad \ell = \lim_{a^+} f \qquad f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x > a}}{\longrightarrow} \ell \qquad f(a^+) = \ell \ (Mouais...)$$

resp.

$$\ell = \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) \qquad \ell = \lim_{a^-} f \qquad f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x < a}}{\longrightarrow} \ell \qquad f(a^-) = \ell \ (Mouais...)$$

Propriété II.1 Notations de la définition.

S'il existe $r > 0$ vérifiant $[a - r, a + r] \subset \mathbb{A}$, une condition nécessaire et suffisante pour que f ait une limite en a est que f ait une limite à droite et une limite à gauche en a toutes deux égales à $f(a)$.

Si a n'appartient pas à $\mathbb{A}$ et s'il existe $r > 0$ vérifiant $[a - r, a + r] \setminus \{a\} \subset \mathbb{A}$, une condition nécessaire et suffisante pour que f ait une limite en a est que f ait une limite à droite et une limite à gauche en a qui soient égales.

Définition 9 On suppose $a = +\infty$ ou $a = -\infty$ et ℓ appartient à $\mathbb{K}$.
On dit que f a pour limite ℓ en $+\infty$ (resp. $-\infty$) (ou que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$)) lorsque

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists B \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{A},\, x \geqslant B \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

resp.

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists B \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{A},\, x \leqslant B \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Remarque II.3 *En cas d'existence, le nombre ℓ est unique et appelé la limite de f en $+\infty$ (resp. $-\infty$). On utilise les notations*

$$\ell = \lim_{x \to +\infty} f(x) \qquad \ell = \lim_{+\infty} f \qquad f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$$

resp.

$$\ell = \lim_{x \to -\infty} f(x) \qquad \ell = \lim_{-\infty} f \qquad f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} \ell$$

Proposition II.1 *Soit $\ell \in \mathbb{C}$ avec $\ell = \ell_1 + i\,\ell_2$, avec $\ell_1 = \mathrm{Re}\,(\ell)$ et $\ell_2 = \mathrm{Im}\,(\ell)$).*
Une condition nécessaire et suffisante pour que f admette ℓ pour limite en a est que $\mathrm{Re}(f)$ *et* $\mathrm{Im}(f)$ *admettent pour limites respectives ℓ_1 et ℓ_2 en a.*

Définition 10 On suppose $a = +\infty$ ou $a = -\infty$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
On dit que f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ (resp. $-\infty$) (ou que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$)) lorsque

$$\forall M \in \mathbb{R},\, \exists B \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{A},\, x \geqslant B \Longrightarrow f(x) \geqslant M$$

resp.

$$\forall M \in \mathbb{R},\, \exists B \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{A},\, x \leqslant B \Longrightarrow f(x) \geqslant M$$

On utilise les notations

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{+\infty} f = +\infty \qquad f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

resp.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{-\infty} f = +\infty \qquad f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

On dit que f admet pour limite $-\infty$ en $+\infty$ (resp. $-\infty$) (ou que $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$)) lorsque $-f$ a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ (resp. $-\infty$).

II.2 Théorèmes généraux sur les limites

Proposition II.2 *Caractère local de la limite.*

Proposition II.3 *Ou bien $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, soit alors $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, ou bien $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, soit alors $\ell \in \mathbb{C}$.*
On suppose que f a pour limite ℓ en a.
Si $\mathbb{B}$ est une partie de $\mathbb{A}$ telle que $f_{|\mathbb{B}}$ soit définie au voisinage de a, alors $f_{|\mathbb{B}}$ a pour limite ℓ en a.
En particulier l'existence de limite en a entraîne celle des limites à droite et à gauche en a (sous réserve que ceci ait un sens).

Proposition II.4 *Caractérisation séquentielle de l'existence de limite.*
Une condition nécessaire et suffisante pour que f ait une limite en a est que pour toute suite $(t_n)_n$ d'éléments de $\mathbb{A}$ de limite a, la suite $(f(t_n))_n$ ait une limite.

Proposition II.5 *Composition des limites.*

Proposition II.6 *Compatibilité avec la relation d'ordre (lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).*

Propriété II.2 Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, si f a une limite dans $\mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ en a, alors au voisinage de a, f est minorée par une constante strictement positive.

Proposition II.7 *Opérations algébriques sur les limites finies.*

II.3 Continuité en un point

Dans ce paragraphe, a appartient à $\mathbb{A}$ (notamment a est réel).

Définition 11 On dit que la fonction f est continue au point a lorsque

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \mid \forall x \in \mathbb{A},\ |x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$$

Il est équivalent d'écrire que f a une limite en a (nécessairement égale à $f(a)$).

Propriété II.3 • Si f est continue en a, il en est de même de $|f|$.
• Si f est continue en a, alors f est bornée au voisinage de a.
• Si f est continue en a, et si on a $f(a) > 0$, alors au voisinage de a, f est minorée par une constante strictement positive.

Proposition II.8 *On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Une condition nécessaire et suffisante pour que f soit continue en a est que $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ soient continues en a.*

Définition 12 On dit que f est continue à droite en a lorsque $f_{|\mathbb{A}\cap[a,+\infty[}$ est continue en a, ce qui s'écrit

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \mid \forall x \in \mathbb{A},\ 0 \leqslant x-a \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$$

On définit de manière analogue la continuité à gauche de f en a.

Remarque II.4 • *S'il existe $h > 0$ tel que l'on ait $[a-h, a+h] \subset \mathbb{A}$, une condition nécessaire et suffisante pour que f soit continue en a est que f soit continue à droite et à gauche en a.*
• *Si $\mathbb{A}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ dont a est l'extrémité inférieure (resp. supérieure), les notions de continuité et de continuité à droite (resp. à gauche) de f en a coïncident.*

Définition 13 Lorsque $f(a^+)$ et $f(a^-)$ existent finies sans que f ne soit continue en a (éventuellement une seule de ces limites a un sens par exemple si $\mathbb{A}$ est un intervalle dont a est une extrémité), on dit que a est un point de discontinuité de première espèce de f.
Si une de ces deux limites n'existe pas dans $\mathbb{K}$ (par exemple égale à $+\infty$ lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), a est appelé point de discontinuité de seconde espèce de f.

Prolongement par continuité :

Soit α un nombre réel adhérent à $\mathbb{A}$ et $\ell \in \mathbb{K}$. Si f admet ℓ pour limite en α, on définit une fonction

$$g : \mathbb{A} \cup \{\alpha\} \to \mathbb{K}$$

continue en α en posant $g_{|\mathbb{A}} = f$ et $g(\alpha) = \ell$.
La fonction ainsi obtenue est appelée le prolongement par continuité de f en α.

Caractère local de la notion de continuité :

- Une condition nécessaire et suffisante pour que f soit continue en a est qu'il existe $h > 0$ tel que $f_{|[a-h,a+h]\cap\mathbb{A}}$ soit continue en a.
- Si f est continue en a et si $\mathbb{B}$ est une partie de $\mathbb{A}$ telle que $f_{|\mathbb{B}}$ soit définie au voisinage de a, alors $f_{|\mathbb{B}}$ est continue en a. La réciproque est fausse en général.

Opérations algébriques :

Soit $(g, \lambda) \in \mathbb{K}^{\mathbb{A}} \times \mathbb{K}$. Si f et g sont continues en a, il en est de même de $\lambda f + g$ et de $f g$.
Lorsque de plus on a $g(a) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est définie au voisinage de a et est continue en a.

Composition de fonctions continues :

Soit $\mathbb{B}$ une partie de $\mathbb{R}$ telle que $f(\mathbb{A}) \subset \mathbb{B}$. Soit de plus $g \in \mathbb{K}^{\mathbb{B}}$.
Si f est continue en a et si g est continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.

Proposition II.9 *Caractérisation séquentielle de la continuité en un point.*

III. Fonctions définies sur un intervalle

Définition 14 Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, on appelle intérieur de I, noté $\overset{o}{I}$, l'ensemble des points de I distincts des extrémités de I. Notamment $\overset{o}{I}$ est un intervalle ouvert.

Désormais I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide.

III.1 Théorème de la limite monotone

Théorème 1 *de la limite monotone*
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante et a un élément de $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ adhérent à $I \cap]-\infty, a[$.
Alors f admet une limite à gauche (inutile si $a = +\infty$) en a qui est la borne supérieure de l'ensemble $\{f(x) \mid x \in I \cap]-\infty, a[\}$ lorsque celui-ci est majoré, et égale à $+\infty$ sinon.
En particulier lorsque a est un élément de I, cette limite est finie et vérifie $f(a^-) \leqslant f(a)$.

Corollaire III.1 *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante et a un élément de $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ adhérent à $I \cap]a, +\infty[$.*
Alors f admet une limite à droite (inutile si $a = -\infty$) en a qui est la borne inférieure de l'ensemble $\{f(x) \mid x \in I \cap]a, +\infty[\}$ lorsque celui-ci est minoré, et égale à $-\infty$ sinon.
En particulier lorsque a est un élément de I, cette limite est finie et vérifie $f(a) \leqslant f(a^+)$.

Corollaire III.2 *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante.*
• *Si a est un point de I tel qu'il existe $h > 0$ vérifiant $[a - h, a + h] \subset I$, alors f a une limite à gauche et à droite en a finies vérifiant $f(a^-) \leqslant f(a) \leqslant f(a^+)$.*
• *f admet une limite à gauche (resp. à droite) en l'extrémité supérieure (resp. inférieure) de I.*

Remarque III.1 *On peut écrire des énoncés analogues pour une fonction décroissante.*

III.2 Fonctions continues sur un intervalle

III.2.a Continuité et uniforme continuité

Définition 15 Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$.
On dit que la fonction f est uniformément continue sur I lorsqu'elle vérifie

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \mid \forall u, v \in I, |u - v| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(u) - f(v)| \leqslant \varepsilon$$

Proposition III.1 *Toute fonction lipschitzienne sur I est uniformément continue sur I.*
Toute fonction uniformément continue sur I est continue sur I.
Les réciproques sont fausses.

Proposition III.2 *Soient f, g deux applications uniformément continues sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.*
Alors $\lambda f + g$ est uniformément continue sur I.
Attention *$f g$ n'est pas nécessairement uniformément continue sur I.*

Proposition III.3 *La composée de deux fonctions uniformément continues sur un intervalle est uniformément continue sur un intervalle.*

Théorème 2 *de Heine*
Toute application continue sur un segment est uniformément continue sur ce segment.

Exemple 1 *Ainsi la fonction* $x \in [0,1] \to \sqrt{x} \in \mathbb{R}$ *est uniformément continue sur* $[0,1]$ *sans y être lipschitzienne.*

III.2.b Fonctions à valeurs réelles

Théorème 3 *des valeurs intermédiaires*
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue sur* I. *Alors* $f(I)$ *est un intervalle.*

Lemme 4 *Soit* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue sur* I *et* $a, b \in I$, *avec* $a < b$.
Si on a $f(a)\,f(b) \leqslant 0$, *alors il existe* $c \in [a,b]$ *tel que* $f(c) = 0$.
C'est parfois ce lemme que l'on qualifie de théorème des valeurs intermédiaires.

Corollaire III.3 *Soit* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue sur* I.
Si f *ne s'annule pas sur* I, *alors* f *garde un signe constant sur* I.

Théorème 5 *L'image d'un segment par une application à valeurs réelles continue sur ce segment est un segment.*
Notamment une application à valeurs réelles continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes, c'est-à-dire admet un maximum et un minimum global sur ce segment.

Remarque III.2 *Il n'y a pas de résultat similaire pour un intervalle non fermé ou non borné.*

III.3 Fonctions continues strictement monotones sur un intervalle

Proposition III.4 *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction à valeurs réelles continue sur un intervalle soit injective est qu'elle soit strictement monotone.*

Remarque III.3 *Ce résultat tombe en défaut si* f *n'est pas continue ou si elle est définie sur une partie de* $\mathbb{R}$ *qui n'est pas un intervalle.*

Proposition III.5 *Soit* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction monotone.*
Si $f(I)$ *est un intervalle de* $\mathbb{R}$, *alors* f *est continue sur* I.

Corollaire III.4 *Si* f *est une bijection continue de l'intervalle* I *sur l'intervalle* I_1, *alors* f^{-1} *est continue.*

Corollaire III.5 *La fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone sur un intervalle est continue strictement monotone sur un intervalle. Les deux fonctions réciproques ont même sens de variation.*

Théorème 6 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'extrémités a et b ($-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$) et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone sur I.*
Alors $f(I)$ est un intervalle de même nature que I (ouvert, "semi-ouvert", fermé) d'extrémités $\alpha = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$ et $\beta = \lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x)$.

IV. Dérivabilité d'une fonction en un point

IV.1 Dérivée d'une fonction

Dans ce §, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide, a un point de I et $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$.

Définition 16 On dit que f est dérivable en a lorsque la fonction $\tau_a(f)$

$$\begin{array}{rccc} \tau_a(f): & I \setminus \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{array}$$

admet une limite finie en a. Dans ce cas, cette limite est appelée dérivée (ou nombre dérivé) de f en a et notée $f'(a)$ ou $D(f)(a)$.
Une condition nécessaire et suffisante pour que f soit dérivable en a, de dérivée $f'(a)$ en a est qu'il existe une fonction ε, de I dans $\mathbb{K}$, vérifiant $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ telle que

$$\forall x \in I,\ f(x) = f(a) + (x-a)\ f'(a) + (x-a)\ \varepsilon(x)$$

Ceci permet d'écrire $f(x) =_a f(a) + (x-a)\ f'(a) + o(x-a)$ expression appelée un développement limité à l'ordre 1 de f au voisinage de a. On dit aussi que f est différentiable en a.

Proposition IV.1 *Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, une condition nécessaire et suffisante pour que f soit dérivable en a est que $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ soient dérivables en a. Dans ce cas, on a : $f'(a) = (\operatorname{Re} f)'(a) + i\ (\operatorname{Im} f)'(a)$.*

Définition 17 On dit que f est dérivable à droite (resp. à gauche) en a lorsque la fonction $\tau_a(f)$ admet une limite finie à droite (resp. à gauche) en a.
En cas d'existence, cette limite est appelée dérivée à droite (resp. à gauche) de f en a et notée $f'_d(a)$ (resp. $f'_g(a)$).
Par définition, f est dérivable à droite en a si, et seulement si, il existe $h > 0$ tel que l'on ait $[a, a+h[\subset I$ et la restriction de f à $I \cap [a, +\infty[$ soit dérivable en a.

Si a est l'extrémité inférieure (resp. supérieure) de I, les notions de dérivabilité et de dérivabilité à droite (resp. à gauche) en a coïncident.

Remarque IV.1 *Si a n'est pas une extrémité de I, une condition nécessaire et suffisante pour que f soit dérivable en a est que f soit dérivable à droite et à gauche en a et que l'on ait $f'_d(a) = f'_g(a)$. Dans ce cas, on a $f'(a) = f'_d(a) = f'_g(a)$.*

Remarque IV.2 *Si f est dérivable à droite (resp. à gauche) en a, alors f est continue à droite (resp. à gauche) en a.*
Notamment si f est dérivable à droite et à gauche en a, alors f est continue en a.

Définition 18 On dit que f est dérivable sur I lorsque f est dérivable en tout point de I. Dans ce cas, on définit l'application $\begin{array}{rccc} f': & I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \longrightarrow & f'(x) \end{array}$ (ou $D(f)$) appelée la fonction dérivée de f sur I.
On note $\mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ ou $\mathcal{D}^1(I, \mathbb{K})$ (ou $\mathcal{D}^1(I)$) l'ensemble des fonctions dérivables sur I.
De même, si f est dérivable à droite (resp. à gauche) sur I, on définit la fonction dérivée à droite (resp. à gauche) de f sur I.

IV.2 Calcul des dérivées

Proposition IV.2 *Soient f, g deux fonctions de I dans $\mathbb{K}$ dérivables en a et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $\lambda f + g$ et $f g$ sont dérivables en a et on a*

$$\boxed{(\lambda f + g)'(a) = \lambda f'(a) + g'(a) \qquad (f g)'(a) = f'(a)\, g(a) + f(a)\, g'(a)}$$

Si de plus on a $g(a) \neq 0$, alors g ne s'annule pas au voisinage de a, $\dfrac{1}{g}$ est définie au voisinage de a et est dérivable en a avec $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(a) = -\dfrac{g'(a)}{g(a)^2}$.

Dans ce cas, $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en a et $\boxed{\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)\, g(a) - f(a)\, g'(a)}{g(a)^2}}$.

Extension de ces propriétés à des fonctions dérivables sur I.

Corollaire IV.1 *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_1, \dots, f_n$ des fonctions de I dans $\mathbb{K}$ dérivables en a. Alors $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} f_i$ est dérivable en a et $\left(\displaystyle\prod_{i=1}^{n} f_i\right)'(a) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i'(a) \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq}}^{n} f_j(a)$.*

Notamment si on a $f_1 = \dots = f_n = f$, on obtient $(f^n)'(a) = n\, f^{n-1}(a)\, f'(a)$.

Proposition IV.3 *Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $f(I) \subset J$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{K}$ et $a \in I$.*
Si f est dérivable en a et si g est dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et $\boxed{(g \circ f)'(a) = g'(f(a))\, f'(a)}$.
Si f est dérivable sur I et si g est dérivable sur J, alors $g \circ f$ est dérivable sur I et $\boxed{(g \circ f)' = (g' \circ f)\, f'}$.

Corollaire IV.2 *Soit f définie dérivable sur un intervalle d'intérieur non vide centré en 0 : si f est paire (resp. impaire), alors f' est impaire (resp. paire).*
Si f est définie périodique de période $T, T > 0$, dérivable alors f' est périodique de période T.

Proposition IV.4 *Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide, $a \in I$, et $f : I \longrightarrow J$ une bijection continue sur I dérivable en a.*
Une condition nécessaire et suffisante pour que f^{-1} soit dérivable en $f(a)$ est $f'(a) \neq 0$.
Dans ce cas, on a $\boxed{\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \dfrac{1}{f'(a)}}$.
Si f est dérivable sur I, une condition nécessaire et suffisante pour que f^{-1} soit dérivable sur J est que f' ne s'annule pas et dans ce cas $\boxed{\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}}$.

Remarque IV.3 *On retrouve cette expression en écrivant $\forall x \in I,\ f^{-1} \circ f(x) = x$.*

IV.3 Dérivées successives

Définition 19 Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ et $a \in I$.
Si f' existe au voisinage de a, continue en a, on dit que f est continûment dérivable en a.

Si f' existe continue sur I, on dit que f est continûment dérivable sur I : on dit aussi que f est de classe C^1 sur I.
On pose $f^{(0)} = f$. Par récurrence, pour $n \in \mathbb{N}^*$, si $f^{(n-1)}$ existe au voisinage de a, dérivable en a, on dit que f est n fois dérivable en a : on note la dérivée n^{me} de f en a

$$f^{(n)}(a) = \left(f^{(n-1)}\right)'(a) = \frac{d^n f}{dx^n}(a)$$

Lorsque $f^{(n-1)}$ est dérivable sur I, on dit que f est n fois dérivable sur I : l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{K}$ n fois dérivables sur I est noté $\mathcal{D}^n(I, \mathbb{K})$.
Lorsque $f^{(n)}$ (que l'on note aussi $D^n(f)$) existe au voisinage de a, continue en a, on dit que f est n fois continûment dérivable en a.
Lorsque $f^{(n)}$ existe continue sur I, on dit que f est n fois continûment dérivable sur I : on dit aussi que f est de classe C^n sur I.
Lorsque f est de classe C^n sur I, pour tout entier naturel n, on dit que f est indéfiniment dérivable sur I, ou de classe C^∞ sur I.
Par extension, une fonction continue sur I est dite de classe C^0 sur I.
Pour $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{K}$ de classe C^n sur I est noté $C^n(I, \mathbb{K})$ ou $C^n(I)$.

Proposition IV.5 *Soient f, g deux fonctions de I dans $\mathbb{K}$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.*
• *Si f et g sont n fois dérivables sur I alors $\lambda f + g$ et $f g$ sont n fois dérivables sur I et*

$$\boxed{(\lambda f + g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + g^{(n)} \qquad (f g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}}$$

(formule de Leibniz). De plus si g ne s'annule pas sur I, $\dfrac{f}{g}$ est n fois dérivable sur I.
• *Si f et g sont de classe C^n sur I, il en est de même de $\lambda f + g$ et $f g$ et si de plus g ne s'annule pas sur I, $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont de classe C^n sur I.*

Proposition IV.6 *Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $f(I) \subset J$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.*
Si f est de classe C^n sur I et si g est de classe C^n sur J, alors $g \circ f$ est de classe C^n sur I.

Proposition IV.7 *Soit $n \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide, $f : I \longrightarrow J$ une bijection de classe C^n.*
Alors f^{-1} est de classe C^n sur J si, et seulement si, f' ne s'annule pas sur I.

V. Etude globale des fonctions dérivables

V.1 Théorème de Rolle

Proposition V.1 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \overset{o}{I}$.*
On suppose que f admet un extremum local en a et que f est dérivable en a. Alors $f'(a) = 0$.

Remarque V.1 *Pour que ce résultat soit valable, I doit être un voisinage de a.*
La réciproque est fausse : exemple $x \longmapsto x^3$.

Théorème 7 *Théorème de Rolle.*
Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.
On suppose f continue sur $[a, b]$, $f_{|]a,b[}$ dérivable sur $]a, b[$ et $f(a) = f(b)$.
Alors il existe c, $c \in]a, b[$, tel que l'on ait $f'(c) = 0$.

Interprétation graphique et cinématique :
Avec les hypothèses et notations du théorème de Rolle, le théorème signifie que le graphe de f admet une tangente "horizontale" en un point d'abscisse appartenant à $]a, b[$.
Si un point matériel se déplace sur un axe et repasse par son point de départ, sa vitesse s'est annulée entre temps (résultat plus fin qu'il n'y parait puisque la vitesse n'est pas nécessairement continue !).

Corollaire V.1 *Entre deux zéros d'une fonction dérivable, il existe au moins un zéro de la dérivée.*

Remarque V.2 *Ce résultat est faux pour une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$.*

V.2 Théorème des accroissements finis

Théorème 8 *des accroissements finis.*
Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose f continue sur $[a, b]$, $f_{|]a,b[}$ dérivable sur $]a, b[$.
Alors il existe c, $c \in]a, b[$, tel que l'on ait $f(b) - f(a) = (b - a)\, f'(c)$. Ainsi la tangente au graphe de f au point de coordonnées $(c, f(c))$ est parallèle à la droite passant par les points de coordonnées $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.
On a la même écriture si on a $b < a$ et f est définie sur le segment $[b, a]$.

Autre écriture :
Soit $h > 0$, $f : [a, a + h] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, a + h]$ telle que $f_{|]a,a+h[}$ soit dérivable sur $]a, a + h[$.
Alors il existe θ, $\theta \in]0, 1[$, tel que l'on ait $f(a + h) - f(a) = h\, f'(a + \theta\, h)$ et cette écriture reste valable avec $h < 0$.

Corollaire V.2 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $\overset{o}{I} \neq \emptyset$, et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose f continue sur I, $f_{|\overset{o}{I}}$ dérivable sur $\overset{o}{I}$. Soit $k \in \mathbb{R}_+$.*
Une condition nécessaire et suffisante pour que f soit $k-$lipschitzienne sur I est que l'on ait $\forall x \in \overset{o}{I},\ |f'(x)| \leqslant k$.
Notamment une condition nécessaire et suffisante pour que f soit constante est que l'on ait
$\forall x \in \overset{o}{I},\ f'(x) = 0$.

V.3 Applications

Proposition V.2 *Variation des fonctions à valeurs réelles.*
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $\overset{o}{I} \neq \emptyset$, et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose f continue sur I, $f_{|\overset{o}{I}}$ dérivable sur $\overset{o}{I}$.
Une condition nécessaire et suffisante pour que f soit croissante (resp. décroissante) est que l'on ait

$$\forall x \in \overset{o}{I},\ f'(x) \geqslant 0 \qquad (\text{resp.} \forall x \in \overset{o}{I},\ f'(x) \leqslant 0)$$

Pour que f soit strictement croissante, il suffit que l'on ait $\forall x \in \overset{o}{I},\ f'(x) > 0$ (la réciproque est fausse : exemple $x \longmapsto x^3$).

Proposition V.3 *Théorème de la limite de la dérivée.*
Si f est continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et si f' admet une limite ℓ dans $\overline{\mathbb{R}}$ en a, alors

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$$

Si ℓ appartient à $\mathbb{R}$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.
Si ℓ appartient à $\{-\infty, +\infty\}$, alors le graphe de f admet une demi-tangente verticale en a.

Remarque V.3 *La réciproque est fausse. Une fonction peut être dérivable en un point sans que la dérivée n'y admette de limite.*

Corollaire V.3 *Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$, telle que $f_{|]a,b]}$ soit de classe C^1 sur $]a, b]$ et $f'_{|]a,b]}$ admette une limite à droite finie en a.*
Alors f est de classe C^1 sur $[a, b]$.
Ce résultat s'étend à une fonction f à valeurs complexes (il suffit de l'appliquer à $\mathrm{Re}(f)$ et à $\mathrm{Im}(f)$).

VI. Construction de l'intégrale sur un segment

VI.1 Intégration de fonctions en escalier sur un segment

VI.1.a Définitions

Définition 20 Soient $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. On appelle subdivision du segment $[a, b]$ toute suite finie strictement croissante de $[a, b]$, $\sigma = (x_i)_{0 \leqslant i \leqslant N}$ telle que $x_0 = a$ et $x_N = b$. L'ensemble $\{x_i \mid 0 \leqslant i \leqslant N\}$ est appelé le support de la subdivision σ.
Les segments $[x_{i-1}, x_i], 1 \leqslant i \leqslant N$, sont appelés les intervalles de la subdivision.
Le réel $h = \max\{x_i - x_{i-1} \mid 1 \leqslant i \leqslant N\}$ est appelé le pas (ou module) de la subdivision.

Définition 21 Soient $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$, $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{K}$.
L'application f est dite en escalier s'il existe une subdivision $\sigma = (x_i)_{0 \leqslant i \leqslant N}$ de $[a, b]$ telle que pour tout élément i de $[\![1, N]\!]$, la fonction $f_{|]x_{i-1}, x_i[}$ soit constante.
Avec ces notations, on dit que la subdivision σ de $[a, b]$ est adaptée à f.

Proposition VI.1 *Soient $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction en escalier sur $[a, b]$ et σ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f, $\sigma = (x_i)_{0 \leqslant i \leqslant N}$ avec $\forall i \in [\![1, N]\!]$, $\forall t \in]x_{i-1}, x_i[$, $f(t) = \mu_i$.*
Le scalaire $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} (x_i - x_{i-1})\, \mu_i$ est indépendant de la subdivision σ adaptée à f.

Définition 22 Mêmes notations. Le scalaire $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} (x_i - x_{i-1})\, \mu_i$ est appelé intégrale de la fonction f sur $[a, b]$ et noté $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ ou $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$.

VI.1.b Propriétés

Additivité par rapport aux intervalles :
Soient $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{K}$ et $c \in]a, b[$. Une condition nécessaire et suffisante pour que f soit une fonction en escalier sur $[a, b]$ est que $f_{|[a,c]}$ et $f_{|[c,b]}$ le soient. Dans ce cas $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f_{|[a,c]} + \int_{[c,b]} f_{|[c,b]}$.
Linéarité :
Soient $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{K}$ deux fonctions en escalier sur $[a, b]$. Pour tout scalaire λ, $\lambda f + g$ est en escalier sur $[a, b]$ et $\displaystyle\int_{[a,b]} \lambda f + g = \lambda \int_{[a,b]} f + \int_{[a,b]} g$.

Remarque VI.1 *Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$. Une condition nécessaire et suffisante pour que f soit en escalier sur $[a, b]$ est que $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le soient.*
Dans ce cas $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \mathrm{Re}(f) + i \int_{[a,b]} \mathrm{Im}(f)$.

Croissance :
Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction en escalier sur $[a, b]$ avec $f \geqslant 0$. Alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f \geqslant 0$.
Soient $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions en escalier sur $[a, b]$ vérifiant $f \leqslant g$. Alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} g$.

Majoration :
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction en escalier sur $[a,b]$. Alors $|\ f\ |$ est une fonction en escalier sur $[a,b]$ et $\left|\int_{[a,b]} f\right| \leqslant \int_{[a,b]} |\ f\ |$. Notamment $\left|\int_{[a,b]} f\right| \leqslant (b-a)\,\|f\|_\infty$.

VI.2 Intégration de fonctions continues par morceaux sur un segment

Définition 23 La fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ est dite continue par morceaux sur $[a,b]$ si elle n'admet qu'un nombre fini de points de discontinuité sur $[a,b]$, qui sont des points de discontinuité de première espèce (c'est-à-dire en lesquels elle a une limite à droite et à gauche dans $\mathbb{K}$, c'est-à-dire finies lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).
Ainsi la fonction f est continue par morceaux sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (x_i)_{0 \leqslant i \leqslant N}$ de $[a,b]$ telle que pour tout élément i de $[\![1,N]\!]$, la fonction $f_{|]x_{i-1},x_i[}$ soit continue sur $]x_{i-1},x_i[$ et admette un prolongement par continuité sur $[x_{i-1},x_i]$. Une telle subdivision σ de $[a,b]$ est dite adaptée à f.

Remarque VI.2 *Une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ est bornée sur $[a,b]$. Dans ce qui suit, on note $\|f\|_\infty = \sup\limits_{[a,b]} |f|$.*
Si f est continue par morceaux sur $[a,b]$, il en est de même de $|f|$.
Une fonction en escalier sur $[a,b]$ est continue par morceaux sur $[a,b]$.

Théorème 9 *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$.*
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ en escalier sur $[a,b]$ telles que $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ et $\psi - \varphi \leqslant \varepsilon$.

Corollaire VI.1 *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$.*
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ en escalier sur $[a,b]$ telles que $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ et $\psi - \varphi \leqslant \varepsilon$.

Corollaire VI.2 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$. Il existe une suite $(\chi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ en escalier sur $[a,b]$ telles que $\|f - \chi_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.*

Théorème 10 *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$.*
En notant $(\chi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ en escalier sur $[a,b]$ telles que $\|f - \chi_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, la suite $\left(\int_{[a,b]} \chi_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa limite est indépendante du choix de la suite de fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ en escalier sur $[a,b]$ telles que $\|f - \chi_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Définition 24 Avec ces notations, la limite de la suite $\left(\int_{[a,b]} \chi_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée l'intégrale de f sur $[a,b]$, et notée $\int_{[a,b]} f$ ou $\int_a^b f(t)dt$.
Une telle suite $(\chi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier sur $[a,b]$ est parfois dite associée à f.

Définition 25 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$. Alors $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont continues par morceaux sur $[a,b]$. On appelle intégrale de la fonction f sur $[a,b]$ le nombre complexe $\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \mathrm{Re}(f) + i \int_{[a,b]} \mathrm{Im}(f)$.

VI.3 Propriétés de l'intégrale

VI.3.a Propriétés issues de la définition

Additivité par rapport aux intervalles :
Soient $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ et $c \in]a,b[$. Une condition nécessaire et suffisante pour que f soit continue par morceaux sur $[a,b]$ est que $f_{|[a,c]}$ et $f_{|[c,b]}$ le soient. Dans ce cas $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f_{|[a,c]} + \int_{[c,b]} f_{|[c,b]}$.
Notamment si $\sigma = (x_i)_{0 \leqslant i \leqslant N}$ est une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f et si pour tout $i \in [\![1,N]\!]$, on note f_i le prolongement par continuité de $f_{|]x_{i-1},x_i[}$ à $[x_{i-1},x_i]$, on a $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \sum_{i=1}^{N} \int_{[x_{i-1},x_i]} f_i$.
Linéarité :
Soient $f,g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$. Pour tout scalaire λ, $\lambda f + g$ est continue par morceaux sur $[a,b]$ et $\displaystyle\int_{[a,b]} \lambda f + g = \lambda \int_{[a,b]} f + \int_{[a,b]} g$.
Croissance :
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ avec $f \geqslant 0$. Alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f \geqslant 0$.
Soient $f,g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ vérifiant $f \leqslant g$. Alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} g$.

Remarque VI.3 *Soient $f,g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ égales sauf en un nombre fini de points de $[a,b]$. Alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} g$.*

Proposition VI.2 *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ avec $f \geqslant 0$.*
Alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f = 0 \Leftrightarrow f = 0$.

Majoration :
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$. Alors $|\ f\ |$ est une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ et $\displaystyle\left|\int_{[a,b]} f\right| \leqslant \int_{[a,b]} |\ f\ |$.

Notamment, comme f est bornée sur $[a,b]$, on a $\boxed{\displaystyle\left|\int_{[a,b]} f\right| \leqslant (b-a)\ \|f\|_\infty}$.

VI.3.b Inégalités

Remarque VI.4 *Inégalité de la moyenne*
Soient $f,g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$.
Alors

$$\boxed{\left|\int_{[a,b]} fg\right| \leqslant \|f\|_\infty \left|\int_{[a,b]} |g|\right|}$$

Théorème 11 *Inégalités de Schwarz et de Minkowski*
Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$. Alors on a l'inégalité de Schwarz

$$\boxed{\left|\int_{[a,b]} fg\right| \leqslant \sqrt{\left(\int_{[a,b]} f^2\right)}\sqrt{\left(\int_{[a,b]} g^2\right)}}$$

On a l'inégalité de Minkowski

$$\boxed{\sqrt{\left(\int_{[a,b]} (f+g)^2\right)} \leqslant \sqrt{\left(\int_{[a,b]} f^2\right)} + \sqrt{\left(\int_{[a,b]} g^2\right)}}$$

Lorsque f et g sont continues sur $[a,b]$, une condition nécessaire et suffisante pour que l'inégalité de Schwarz soit une égalité est que f et g soient colinéaires, c'est-à-dire

$$f = 0 \quad ou \quad \exists \lambda \in \mathbb{R} : / \, g = \lambda f$$

Lorsque f et g sont continues sur $[a,b]$, une condition nécessaire et suffisante pour que l'inégalité de Minkowski soit une égalité est que f et g soient positivement colinéaires, c'est-à-dire

$$f = 0 \quad ou \quad \exists \lambda \in \mathbb{R}_+ \, / \, g = \lambda f$$

VI.3.c Sommes de Riemann

Définition 26 Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$.
Dans le cadre du programme, pour tout entier naturel non nul n, les seules sommes de Riemann associées à f, dites d'ordre n, sont les deux suivantes

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right) \qquad \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right)$$

Théorème 12 *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$.*
On a

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{[a,b]} f \qquad \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{[a,b]} f$$

VII.Primitives et intégrales

VII.1 Intégrale fonction d'une de ses bornes

<u>Formule de Chasles :</u>

On étend la définition du symbole $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ au cas où les bornes ne vérifient pas $a < b$ en posant $\displaystyle\int_a^a f(t)dt = 0 \quad \int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$ lorsque $b < a$.

Ainsi pour tous réels a, b, c et f continue par morceaux sur $[\min(a,b,c), \max(a,b,c)]$ on a la formule de Chasles $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$.

<u>Intégrale indéfinie :</u>

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$. Pour tout élément x de $[a,b]$, $f_{|[a,x]}$ est continue par morceaux sur $[a,x]$. On considère la fonction $\begin{array}{rccl} F_a : & [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \longrightarrow & \displaystyle\int_a^x f(t)dt \end{array}$.

La fonction F_a est lipschitzienne sur $[a,b]$ de rapport $\|f\|_\infty$ et donc continue sur $[a,b]$. Lorsque f est à valeurs positives, F_a est croissante.

Définition 27 Soient I un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$. On appelle primitive de f sur I toute application F de I dans $\mathbb{K}$, dérivable sur I, telle que $F' = f$.
Les primitives d'une fonction sur un intervalle, lorsqu'elles existent, sont définies à constante additive près.

Proposition VII.1 *Soient I un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ continue. Alors f admet des primitives sur I qui sont de la forme* $\begin{array}{ccl} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longrightarrow & \displaystyle\int_a^x f(t)dt + c^{te} \end{array}$ *avec $a \in I$.*

Remarque VII.1 *La relation $F(b) - F(a) = \displaystyle\int_a^b f(t)dt$ fournit un moyen élémentaire de calcul d'une intégrale définie. Par convention on note*

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) = [F(t)]_a^b}$$

Cette quantité est indépendante de la primitive de f considérée.
Si f est continue sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$, on note $\displaystyle\int f(x)\,dx$ la primitive "générale" de f. Si F est l'une d'entre elles, alors $\displaystyle\int f(x)\,dx = F(x) + c^{te}$.

Remarque VII.2 *f étant continue sur I, toute primitive de f sur I est de classe C^1 sur I.*

Proposition VII.2 *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ vérifiant $a < b$, $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ et $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1 sur $[a,b]$ vérifiant $|f'| \leqslant g'$. Alors $|f(b) - f(a)| \leqslant g(b) - g(a)$.*

VII.2 Procédés d'intégration

VII.2.a Changement de variable

Théorème 13 *Soient $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et $f : \varphi([a,b]) \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue. On a la formule dite de changement de variable*

$$\boxed{\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt}$$

Corollaire VII.1 *Supposons de plus que φ induise une bijection (que l'on note encore φ) de $[a,b]$ sur $\varphi([a,b])$ (c'est-à-dire φ est strictement monotone). En posant $\alpha = \varphi(a)$ et $\beta = \varphi(b)$, on a $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\ dx = \int_{\varphi^{-1}(\alpha)}^{\varphi^{-1}(\beta)} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$.*

Corollaire VII.2 *Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et $\varphi : J \longrightarrow I$ une bijection de classe C^1 de J sur I. Etant donnée $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue sur I et G une primitive de $(f \circ \varphi)\,\varphi'$ sur J, alors $G \circ \varphi^{-1}$ est une primitive de f sur I.*

VII.2.b Intégration par parties

Proposition VII.3 *Soient $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ de classe C^1 sur $[a,b]$. On a la formule d'intégration par parties*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = [f(x)\,g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx}$$

Si f et g sont de classe C^1 sur I, on a

$$\boxed{\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx}$$

VIII Formules de Taylor

On note n un entier naturel, I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et a, b deux points de I.

VIII.1 Formule de Taylor reste intégrale (dite de Taylor-Laplace)

Théorème 14 *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction de classe C^{n+1}. Alors pour tout $x, x \in I$, on a*

$$\boxed{f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!}\, f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}\, f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}\, f^{(n)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(t)\, dt}$$

c'est-à-dire $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!}\, f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(t)\, dt\,.$

Remarque VIII.1 *Pour $x \in I$, on note parfois $f(x) = T_{n,f,a}(x) + R_{n,f,a}(x)$ ou $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$ avec $T_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!}\, f^{(k)}(a)$ où $R_n(x)$ est appelé le reste de la formule de Taylor à l'ordre n de la fonction f en a. Le théorème précédent fournit une expression du reste sous forme d'intégrale.*

Remarque VIII.2 ***(Important)*** *Lorsque $x \neq a$, le changement de variable défini par $t = (1-u)\ a + x\, u$ fournit une expression utile du reste, à savoir*

$$\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(t)\, dt = \frac{(x-a)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n\ f^{(n+1)}\left((1-u)\ a + x\, u\right)\, du$$

On constate que cette égalité reste vraie si $x = a$.

VIII.2 Inégalité de Taylor-Lagrange

Théorème 15 *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction de classe C^{n+1} sur I dont la dérivée $(n+1)^{me}$ est <u>bornée</u> sur I. En notant $M_{n+1}(f)$ la borne supérieure de la fonction $\left|f^{(n+1)}\right|$ sur I, on a $\forall x \in I,\ |f(x) - T_n(x)| \leqslant \dfrac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}\, M_{n+1}(f)$, c'est-à-dire*

$$\boxed{\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!}\, f^{(k)}(a) \right| \leqslant \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}\, M_{n+1}(f)}$$

Ceci fournit une majoration du reste $R_n(x)$ de la formule de Taylor à l'ordre n de la fonction f en a.

VIII.3 Formule de Taylor-Young

Théorème 16 *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction de classe C^n. Il existe une fonction α, de I dans $\mathbb{K}$, telle que $\forall x \in I$, $f(x) = T_n(x) + (x-a)^n\, \alpha(x)$ vérifiant $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$.*

On obtient ainsi $\boxed{f(x) =_a \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!}\, f^{(k)}(a) + o\left((x-a)^n\right)}$.

On dit que l'on effectue le développement de Taylor-Young de f à l'ordre n au voisinage de a.
La partie polynomiale $T_n(x)$ en est appelée la partie régulière et le terme complémentaire $(x-a)^n\,\alpha(x)$ en est appelé le reste.

Remarque VIII.3 *La formule de Taylor-Young à l'ordre n est une conséquence de l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n pour une fonction de classe C^{n+1} sur I (développements limités usuels au sens fort avec un reste qui est un O du terme suivant).*

Remarque VIII.4 *La formule de Taylor-Young a un caractère local (comportement d'une fonction au voisinage d'un point).*
La formule de Taylor reste intégrale et l'inégalité de Taylor-Lagrange ont un caractère global (calcul approché d'intégrales, de racines d'une équation, calculs d'incertitudes...).