MP 20-21

CALCULS DE PRIMITIVES

Soit $f : \mathcal{D}_f \longrightarrow \mathbb{K}$. On détermine les plus grands intervalles de $\mathcal{D}_f$ sur lesquels f est continue et sur chacun d'entre eux, on cherche à expliciter les primitives de f à l'aide des fonctions usuelles. Pour cela, on utilise les propriétés de l'intégrale (linéarité) et les procédés de calcul vus précédemment (changement de variable, intégration par parties).

La notation $\displaystyle\int f(x)\,dx$ désigne la primitive générale de f sur tout intervalle où elle est définie continue.

I. Produit d'une exponentielle et d'un polynôme

Soit $(P, \alpha) \in (\mathbb{C}[X] \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}^*$. En notant $d = \deg P$, une intégration par parties "répétée" fournit

$$\int e^{\alpha x} P(x)\, dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} P(x) - \int \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} P'(x)\, dx = \cdots = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} \sum_{k=0}^{d} \frac{(-1)^k}{\alpha^k} P^{(k)}(x) + c^{te}$$

On peut aussi procéder par identification en déterminant une primitive de la forme $x \longmapsto e^{\alpha x} Q(x)$, où Q est un polynôme de degré égal à d.

Remarque I.1 *Par changement de variable, un calcul de primitive de la forme* $\int t^{\alpha} P(\ln t)\, dt$ *se ramène à un calcul similaire au précédent.*

II. Fonctions rationnelles

II.1 Exemple (très) particulier

Soit F une fraction rationnelle impaire. Alors la fraction rationnelle $\dfrac{F(X)}{X}$ est paire et, dans ce cas, il existe une fraction rationnelle G telle que $\dfrac{F(X)}{X} = G\left(X^2\right)$ (exercice). Le changement de variable défini par $x = t^2$ fournit

$$\int F(t)\,dt = \int G\left(t^2\right) t dt = \frac{1}{2}\int G(x)\,dx$$

Par exemple

$$\int_0^1 \frac{t\,dt}{t^4+1} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\left[\arctan x\right]_0^1 = \frac{\pi}{8}$$

(la technique générale de décomposition en éléments simples aurait conduit à des calculs beaucoup plus longs).

II.2 Cas général

Pour un calcul de primitive de fonction rationnelle, on en effectue en général la décomposition en éléments simples.

II.2.a Décomposition dans $\mathbb{C}(X)$

Lorsque l'on effectue la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$, on est ramené au calcul de primitives de la partie entière et d'éléments simples de la forme $x \longmapsto \dfrac{1}{(x-a)^k}$ $(k \in \mathbb{N}^*)$.

Lorsque $k \geqslant 2$

$$\int \frac{dx}{(x-a)^k} = -\frac{1}{(k-1)\,(x-a)^{k-1}} + c^{te}$$

Lorsque $k = 1$, en notant $a = \alpha + i\,\beta$ (avec $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$), on écrit

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a\},\ \frac{1}{x-a} = \frac{x-\alpha}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + i\frac{\beta}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$$

et ainsi

$$\int \frac{dx}{x-a} = \frac{1}{2}\ln\left((x-\alpha)^2+\beta^2\right) + i\arctan\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) + c^{te}$$

II.2.b Décomposition dans $\mathbb{R}(X)$

Lorsque l'on effectue la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$, on est ramené au calcul de primitives de la partie entière et d'éléments simples de première espèce ou de seconde espèce de la forme $x \longmapsto \dfrac{\alpha\,x+\beta}{\left((x-a)^2+b^2\right)^k}$ avec $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, $(a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$ (après factorisation canonique du trinôme au dénominateur).

Concernant les élemants simples de seconde espèce, on peut écrire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{\alpha\, x+\beta}{\left((x-a)^2+b^2\right)^k} = \frac{\alpha}{2}\,\frac{2\,(x-a)}{\left((x-a)^2+b^2\right)^k} + \frac{a\,\alpha+\beta}{\left((x-a)^2+b^2\right)^k}$$

Le calcul de $\displaystyle\int \frac{2\,(x-a)}{\left((x-a)^2+b^2\right)^k}\,dx$ s'effectue "aisément" puisque l'on reconnaît une dérivée de fonction "usuelle".

Quant au calcul de $\displaystyle\int \frac{dx}{\left((x-a)^2+b^2\right)^k}$, le changement de variable défini par $x = a + b\,t$ conduit au calcul de

$$\int \frac{dt}{\left(t^2+1\right)^k}$$

Lorsque k est supérieur ou égal à 2, on peut procéder de deux façons :

- Le changement de variable défini par $\theta = \arctan t$ (c'est-à-dire $\theta = \arctan\left(\dfrac{x-a}{b}\right)$ ou $x = a + b\,\tan\theta$) conduit au calcul de

$$\int \cos^{2\,(k-1)}(\theta)\; d\theta$$

  Classiquement, le calcul d'une telle intégrale s'effectue par linéarisation de $\cos^{2\,(k-1)}$.
- On peut aussi penser à procéder par récurrence, car si l'on pose

$$F_k\,(t) = \int \frac{dt}{\left(t^2+1\right)^k}$$

  une intégration par parties conduit à

$$2\,k\,F_{k+1}\,(t) = (2\,k-1)\;F_k\,(t) + \frac{t}{\left(t^2+1\right)^k}$$

  Cette méthode peut être envisagée lorsque l'on a $k \geqslant 3$ et (ou) lorsque l'on calcule une intégrale sur un intervalle (notamment non borné).

Exercice 1

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2\,(x^2+x+1)} = -\frac{1}{3\,(x-1)} - \frac{1}{3}\ln\left(|x-1|\right) + \frac{1}{6}\ln\left(x^2+x+1\right) + \frac{\sqrt{3}}{9}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c^{te}$$

Exercice 2 Calcul de

$$\int \frac{1-x}{\left(x^2+x+1\right)^2}\,dx$$

On obtient

$$\int \frac{1-x}{\left(x^2+x+1\right)^2}\,dx = \frac{x+1}{x^2+x+1} + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\,(2x+1)\right) + c^{te}$$

III. Primitives de $x \longmapsto R(\sin(x), \cos(x))$, R fonction rationnelle

III.1 R est un polynôme

Par linéarité, on s'intéresse au calcul de $\displaystyle\int \sin^p(x)\,\cos^q(x)\,dx$, avec $(p,q) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

- Si p (resp. q) est impair : on utilise le changement de variable défini par $u = \cos(x)$ (resp. $u = \sin(x)$)
- Si p et q sont impairs, on peut penser à utiliser le changement de variable défini par $u = \cos(2x)$
- Si p et q sont pairs, on linéarise le polynôme trigonométrique sous l'intégrale.

Exemple 1 *Calcul des intégrales suivantes :*

$$\int \cos^4(x)\,\sin^3(x)\,dx \qquad \int \cos^4(x)\,\sin^2(x)\,dx$$

Exercice 3 Pour tout couple d'entiers naturels non nuls (n,p) calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(x)\cos(2px)\,dx$.
Indication : pour cela, on pourra linéariser $\cos^{2n}(x)$.

III.2 R n'est pas un polynôme

III.2.a Méthode générale

On utilise le changement de variable défini par $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$. On est alors ramené au calcul de

$$\int R\left(\frac{2\,t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

c'est-à-dire à celui de primitives d'une fonction rationnelle.
Ce changement de variable peut conduire à des calculs assez longs. En outre, ce changement de variable ne peut être utilisé que sur des intervalles de la forme $](2\,m-1)\pi, (2\,m+1)\pi[$ $(m \in \mathbb{Z})$ ne contenant pas de singularité de la fonction à intégrer. Par conséquent, lorsque les primitives calculées sont continues aux points de la forme $(2\,m+1)\pi$ $(m \in \mathbb{Z})$, on peut être amené à "raccorder" les restrictions obtenues sur deux intervalles ouverts consécutifs.

Exemple 2 *Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $\alpha > |\beta|$. Sur $]-\pi, +\pi[$, on a*

$$\int \frac{dx}{\alpha + \beta\,\cos(x)} = \frac{2}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + c^{te}$$

La fonction intégrée étant continue sur $\mathbb{R}$, ses primitives sont définies continues sur $\mathbb{R}$. On obtient par exemple

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{dx}{\alpha+\beta\,\cos(x)} = 2\int_0^{+\pi} \frac{dx}{\alpha+\beta\,\cos(x)} = \frac{2\,\pi}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}$$

Exemple 3 *Calculs de* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin(x)}$ *et de* $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos(x)}$. *On obtient*

$$\int \frac{dx}{\sin(x)} = \ln\left(\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|\right) + c^{te}$$

sur tout intervalle de la forme $]m\,\pi, (m+1)\,\pi[$ *sans raccordement possible. De même on trouve*

$$\int \frac{dx}{\cos(x)} = \ln\left(\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|\right) + c^{te}$$

sur tout intervalle de la forme $]m\,\pi - \dfrac{\pi}{2}, m\,\pi + \dfrac{\pi}{2}[$ *sans raccordement possible.*

Exercice 4 Déterminer les primitives de $x \longmapsto \dfrac{1}{1-\cos x}$ sur $]0, 2\,\pi[$.

Exercice 5 Calcul de

$$\int \frac{\sin x}{2 + 3\,\sin x + \sin^2 x}\,dx$$

Pour cela, on pourra commencer par décomposer la fraction rationnelle $\dfrac{X}{2+3\,X+X^2}$ en éléments simples avant de poser $t = \tan\dfrac{x}{2}$.

III.2.b Changements de variables simplificateurs : règles de Bioche (hors-programme)

Posons $R(X,Y) = \dfrac{P(X,Y)}{Q(X,Y)}$. En écrivant
$Q(\sin(x), \cos(x)) = Q_0(\cos(x)) + \sin(x)\,Q_1(\cos(x))$ on aboutit (en multipliant par la quantité "conjuguée") à

$$f(x) = R(\sin(x), \cos(x)) = \frac{P_1(\sin(x), \cos(x))}{Q_2(\cos(x))}$$

Ainsi une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction f soit impaire est que l'on puisse écrire $f(x) = \sin(x)\,R_1(\cos(x))$. Dans ce cas, on effectue le changement de variable défini par $u = \cos(x)$.

On montrerait de même qu'une condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait $\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f(\pi - x) = -f(x)$ est que l'on puisse écrire $f(x) = \cos(x)\,R_2(\sin(x))$. Dans ce cas, on effectue le changement de variable défini par $u = \sin(x)$.

Enfin, on montre de même qu'une condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait $\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f(\pi + x) = f(x)$ est que l'on puisse écrire $f(x) = R_3(\tan(x))$. Dans ce cas, on effectue le changement de variable défini par $u = \tan(x)$ (ou $u = \text{cotan}(x)$).

La règle retenue est la suivante. Si l'élément différentiel $R(\sin(x), \cos(x))\,dx$ est invariant en remplaçant x par

- $-x$ on pense à effectuer le changement de variable défini par $u = \cos(x)$
- $\pi - x$ on pense à effectuer le changement de variable défini par $u = \sin(x)$
- $\pi + x$ on pense à effectuer le changement de variable défini par $u = \tan(x)$ (ou $u = \text{cotan}(x)$).

Remarque III.1 *On peut retenir que, lorsqu'il existe un entier naturel non nul N tel que f soit périodique de période* $\dfrac{2\,\pi}{N}$, *on peut commencer par le changement de variable défini par $u = N\,x$.*

Exemple 4 *Calculer*

$$\int \frac{dx}{\sin(x)} \qquad \int \frac{dx}{\cos(x)}$$

Exemple 5 *Calculer*

$$\int \frac{\cos^3(x)}{\sin^5(x)}\,dx \qquad \int \frac{\sin^5(x)}{\cos(x)}\,dx \qquad \int \frac{dx}{\cos^4(x)+\sin^4(x)}$$

Exemple 6 *<u>Astuce!!</u>*
Calcul de $\displaystyle\int \frac{a\,\cos(x)+b\,\sin(x)}{c\,\cos(x)+d\,\sin(x)}\,dx.$

Exercice 6 Calcul de

$$\int_0^{\pi/4} \tan^7(x)\;dx \qquad \int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2\,\cos^2 x+\sin^2 x}$$

où a est un réel strictement positif.

IV. Primitives de $x \longmapsto R(\mathrm{sh}(x), \mathrm{ch}(x))$, R fonction rationnelle

On peut remplaces les fonctions hyperboliques par les fonctions trigonométriques correspondantes et on effectue un changement de variable analogue parmi ceux définis par

$$u = \mathrm{th}\left(\frac{x}{2}\right) \quad u = \mathrm{sh}(x) \quad u = \mathrm{ch}(x) \quad u = \mathrm{th}(x) \quad u = \mathrm{coth}(x).$$

En fait, il est préférable de retenir que le changement de variable défini par $u = e^x$ permet de se ramener au calcul de primitives d'une fonction rationnelle.

Exemple 7 *Soit $a > 0$. Calcul de*

$$\int \frac{dx}{\mathrm{ch}(x) - \mathrm{ch}(a)}$$

V. Dernière classe de fonctions

Il s'agit de calculer les primitives de $x \longmapsto R\left(x, \sqrt[n]{\dfrac{a\,x+b}{c\,x+d}}\right)$, où R est une fonction rationnelle.

On utilise le changement de variable défini par $y = \sqrt[n]{\dfrac{a\,x+b}{c\,x+d}}$ qui ramène à un calcul de primitive de fonction rationnelle. Ayant $x = \dfrac{b-dy^n}{cy^n-a}$, on remplace dx par $\dfrac{ad-bc}{(cy^n-a)^2}ny^{n-1}dy$.
On peut aussi penser à utiliser ce changement de variable lorsque F n'est pas une fonction rationnelle.

Exemple 8 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$ *(changement de variable défini par $u = \sqrt[6]{x+1}$).*

Exemple 9 $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\frac{dx}{x}$ *et* $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}\,dx$ *(changement de variable défini par $u = \sqrt[6]{x+1}$).*