Formulaire de trigonométrie hyperbolique

MP 20-21

1 DEFINITIONS

La fonction cosinus hyperbolique, notée ch, est, par définition, la partie paire de la fonction exponentielle, c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$$

La fonction sinus hyperbolique, notée sh, est, par définition, la partie impaire de la fonction exponentielle, c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{sh}(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$$

Pour tout réel x, on a alors $\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x) = e^x$ et $\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x) = e^{-x}$ et en multipliant ces relations terme à terme, on obtient

$$\boxed{\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1}$$

Les fonctions ch et sh sont dérivables et on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x) \quad \mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x)$$

La fonction tangente hyperbolique, notée th, est définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$$

C'est une fonction impaire vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{th}(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |\mathrm{th}(x)| < 1$$

La fonction cotangente hyperbolique, notée coth, est définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \mathrm{coth}(x) = \frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)} = \frac{1}{\mathrm{th}(x)}$$

C'est une fonction impaire vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \mathrm{coth}(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ |\mathrm{coth}(x)| > 1$$

2 TRIGONOMETRIE HYPERBOLIQUE

2.1 Formules d'addition

On a la relation suivante :

$$\forall a, b \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}(a)\ \mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(a)\ \mathrm{sh}(b)$$

qui nous permet d'obtenir celles-ci (comment ?) :

$$\mathrm{ch}(a-b) = \mathrm{ch}(a)\ \mathrm{ch}(b) - \mathrm{sh}(a)\ \mathrm{sh}(b)$$

$$\mathrm{sh}(a+b) = \mathrm{sh}(a)\ \mathrm{ch}(b) + \mathrm{ch}(a)\ \mathrm{sh}(b)$$

$$\mathrm{sh}(a-b) = \mathrm{sh}(a)\ \mathrm{ch}(b) - \mathrm{ch}(a)\ \mathrm{sh}(b)$$

ainsi que

$$\mathrm{th}(a+b) = \frac{\mathrm{th}(a) + \mathrm{th}(b)}{1 + \mathrm{th}(a)\ \mathrm{th}(b)} \qquad \mathrm{th}(a-b) = \frac{\mathrm{th}(a) - \mathrm{th}(b)}{1 - \mathrm{th}(a)\ \mathrm{th}(b)}$$

2.2 Transformation d'un produit en somme

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On a :

$$\mathrm{ch}(a)\ \mathrm{ch}(b) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{ch}(a+b) + \mathrm{ch}(a-b)\right)$$

$$\mathrm{sh}(a)\ \mathrm{sh}(b) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{ch}(a+b) - \mathrm{ch}(a-b)\right)$$

$$\mathrm{sh}(a)\ \mathrm{ch}(b) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{sh}(a+b) + \mathrm{sh}(a-b)\right)$$

2.3 Transformation d'une somme en produit

Soient $p, q \in \mathbb{R}$. On a :

$$\mathrm{ch}(p) + \mathrm{ch}(q) = 2\ \mathrm{ch}\left(\frac{p+q}{2}\right)\ \mathrm{ch}\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\mathrm{ch}(p) - \mathrm{ch}(q) = 2\ \mathrm{sh}\left(\frac{p+q}{2}\right)\ \mathrm{sh}\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\mathrm{sh}(p) + \mathrm{sh}(q) = 2\ \mathrm{sh}\left(\frac{p+q}{2}\right)\ \mathrm{ch}\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\mathrm{sh}(p) - \mathrm{sh}(q) = 2\ \mathrm{sh}\left(\frac{p-q}{2}\right)\ \mathrm{ch}\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

2.4 Formules de l'argument double

Pour tout réel x, on a :

$$\mathrm{ch}(2\,x) = \mathrm{ch}^2(x) + \mathrm{sh}^2(x) = 2\ \mathrm{ch}^2(x) - 1 = 1 + 2\ \mathrm{sh}^2(x) = \frac{1 + \mathrm{th}^2(x)}{1 - \mathrm{th}^2(x)}$$

ainsi que

$$\mathrm{sh}(2\,x) = 2\ \mathrm{sh}(x)\ \mathrm{ch}(x) = \frac{2\ \mathrm{th}(x)}{1 - \mathrm{th}^2(x)}$$

et

$$\mathrm{th}(2\,x) = \frac{2\ \mathrm{th}(x)}{1 + \mathrm{th}^2(x)}$$

2.5 Formules de l'argument multiple

Si m est un entier naturel, on a une formule similaire à la formule de Moivre puisque

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (\operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x))^m = e^{mx} = \operatorname{ch}(m\,x) + \operatorname{sh}(m\,x)\,.$$

En développant par la formule du binôme, et en identifiant les parties paire et impaire des expressions, on aboutit à

$$\operatorname{ch}(m\,x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \binom{m}{2\,k} \operatorname{ch}^{\,m-2k}(x)\ \operatorname{sh}^{\,2k}(x)$$

$$\operatorname{sh}(m\,x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \binom{m}{2\,k+1} \operatorname{ch}^{\,m-2k-1}(x)\ \operatorname{sh}^{\,2k+1}(x)$$

puis à

$$\operatorname{th}(m\,x) = \frac{\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \binom{m}{2\,k+1} \operatorname{th}^{2k+1}(x)}{\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \binom{m}{2\,k} \operatorname{th}^{2k}(x)}$$