Formulaire de trigonométrie

MP 20-21

Les fonctions sinus et cosinus, notées respectivement sin et cos, sont définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[-1,+1]$ dérivables, périodiques de période 2π.

Par exemple la relation $e^{i\,x}\,e^{-i\,x}=1$ fournit l'identité remarquable $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$.

La fonction tangente, notée tan, définie sur $\mathbb{R}$ privé des points de la forme $\dfrac{\pi}{2}+k\,\pi,\ k\in\mathbb{Z}$, par $\tan(x)=\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$, est périodique de période π.

La fonction cotangente, notée cotan, définie sur $\mathbb{R}$ privé des points de la forme $k\,\pi,\ k\in\mathbb{Z}$, par $\mathrm{cotan}(x)=\dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}=\dfrac{1}{\tan(x)}$, est périodique de période π.

A partir de la dérivée de la fonction tangente et de cette définition, on obtient la dérivée de la cotangente sur son ensemble de définition, à savoir : $\mathrm{cotan}'(x)=-\dfrac{1}{\sin^2(x)}=-1-\mathrm{cotan}^2(x)$.

1. Périodicité et symétrie

Sous réserve d'existence des quantités apparaissant ci-dessous, on a les relations suivantes :

$$
\begin{array}{rclccc}
\cos(-x) & = & \cos(x) & \sin(-x)=-\sin(x) & \tan(-x)=-\tan(x) \\
\cos(\pi+x) & = & -\cos(x) & \sin(\pi+x)=-\sin(x) & \tan(\pi+x)=\tan(x) \\
\cos(\pi-x) & = & -\cos(x) & \sin(\pi-x)=\sin(x) & \tan(\pi-x)=-\tan(x) \\
\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right) & = & -\sin(x) & \sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=\cos(x) & \tan\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=-\mathrm{cotan}(x) \\
\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right) & = & \sin(x) & \sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\cos(x) & \tan\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\mathrm{cotan}(x)
\end{array}
$$

2. Formules d'addition

On a les relations suivantes :

$$
\begin{array}{rclc}
\cos(a+b) & = & \cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b) & \cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b) \\
\sin(a+b) & = & \sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b) & \sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b)
\end{array}
$$

ainsi que $\tan(a+b)=\dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\,\tan(b)}$ (sous réserve d'existence de ces quantités).

3. Transformation d'un produit en somme

On a les relations suivantes :

$$
\begin{array}{rcl}
\cos(a)\cos(b) & = & \dfrac{1}{2}\left(\cos(a+b)+\cos(a-b)\right) \\
\sin(a)\sin(b) & = & \dfrac{1}{2}\left(\cos(a-b)-\cos(a+b)\right) \\
\sin(a)\cos(b) & = & \dfrac{1}{2}\left(\sin(a+b)+\sin(a-b)\right)
\end{array}
$$

4. Transformation d'une somme en produit

On a les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
\cos(p)+\cos(q) &= 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\\
\cos(p)-\cos(q) &= -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\\
\sin(p)+\sin(q) &= 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\\
\sin(p)-\sin(q) &= 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)
\end{aligned}$$

5. Lignes trigonométriques de l'angle double

Pour tout réel x, on a les relations suivantes :
$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$
$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$
et sous réserve d'existence de ces quantités :

$$\cos(2\,x) = \frac{1-\tan^2(x)}{1+\tan^2(x)} \qquad \sin(2\,x) = \frac{2\,\tan(x)}{1+\tan^2(x)} \qquad \tan(2\,x) = \frac{2\,\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$$

6. Linéarisation de polynômes trigonométriques

Les relations rappelées précédemment permettent de linéariser des polynômes trigonométriques, c'est-à-dire des expressions de la forme $\cos^m(x)\,\sin^n(x)$, où m et n sont des entiers naturels, afin par exemple d'en obtenir des primitives ou la dérivée.

7. Autre transformation

Si a, b et θ sont trois réels, vérifiant $a^2+b^2 \neq 0$, on transforme la quantité $a\cos(\theta)+b\sin(\theta)$ en introduisant le réel c défini par $c = \sqrt{a^2+b^2}$. On peut alors définir un réel φ vérifiant $\cos(\varphi) = \dfrac{a}{c} \quad \sin(\varphi) = \dfrac{b}{c}$.

Ainsi on obtient $\quad a\cos(\theta) + b\sin(\theta) = c\,\cos(\theta - \varphi)$.